Elektrodinamika feladatok, gyakorlófeladatok, példák,

Nagy Márton

2015. március 2.

A *-gal jelöltek nehezek, vagy gondolkodatósak (nem is biztos, hogy én tudom a megoldásukat :D). Jó gondolkodást! (Ilyen nyilván nem lesz ZHn).

Maxwell-egyenletek, mértékválasztás:

1. Vizsgáljuk a Coulomb-mértéket! Feltéve, hogy adott $\psi(\mathbf{r},t)$ függvényre létezik χ megoldása a $\triangle\chi = \psi$ egyenletnek, lássuk be, hogy mindig kiköthetjük a vektorpotenciálra a $\nabla\mathbf{A} = 0$ feltételt! Mik lesznek ekkor a Φ-re és $\mathbf{A}$-ra vonatkozó egyenletek? Lesz-e „maradék mértékszabadság" (azaz: ez a feltétel meghatározza-e már egyértelműen Φ-t és $\mathbf{A}$-t adott $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ esetén)?

2. Ugyanaz, mint az előbb, csak most a Lorenz-mértékre, azaz a $\nabla A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ feltételre. (Itt azt előlegezzük meg, hogy a $\Box\chi \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\chi = \psi$ inhomogén hullámegyenletnek lézetik megoldása.)

3. Vizsgáljuk az ún. *axiális mértéket*! Legyen adott egy $\mathbf{n}$ konstans egységvektor, és követeljük meg, hogy $\mathbf{An} = 0$ mindenhol! Lássuk be, hogy ezt tényleg kiköthetjük! Lesz-e maradék mértékszabadság?

4. (*) Általánosítsuk az előző feladatot helytől függő $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ mezőre! Milyen feltételt kell ennek kielégítenie, hogy bármilyen adott $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ esetén ki lehessen kötni az $\mathbf{nA} = 0$ feltételt?

Dipólusok „gyalogosan":

1. Mekkora erővel és forgatónyomatékkal hat egymásra két általános helyzetű elektromos dipólus?

2. Lássuk be az órán látott módszerek alkalmazásával, hogy egy külső $\mathbf{B}$ mágneses térben lévő $\mathbf{m}$ mágneses dipóusra ható erő és forgatónyomaték $F_k = \partial_k B_l \cdot m_l$, $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$.

3. Mekkora erő hat inhomogén elektromos térben egy pontszerű elektromos kvadrupólusra (azaz olyan töltéselrendezésre, amelynek se össztöltése, se dipólusmomentuma, csak kvadrupólusmomentuma van)?

4. Lássuk be, hogy egy síkbeli A területet körbezáró, I áramot szállító hurok mágneses momentuma $|\mathbf{m}| = I \cdot A$ nagyságú, és iránya merőleges a felületre, a jobbkézszabályos körbejárással[1]!

5. (*) Tekintsünk most egy I áram járta általános (nem feltétlenül síkbeli) vezető hurkot! Milyen $\mathbf{m}$ mágneses momentuma van ennek? Lássuk be, hogy $\mathbf{m}$ egy adott $\mathbf{n}$ egységvektor irányába eső vetületét, $\mathbf{mn}$-et megkapjuk, ha I-t megszorozzuk a hurok $\mathbf{n}$-re merőleges síkra vett vetülete által körbezárt területtel[2]!

6. Értelmezzük az elektromos dipólus fogalmát két dimenzióban! Tekintsük először azt az elrendezést, amikor két, $+\eta$ és $-\eta$ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes egymástól Δ távolságban van, és vegyük az $\eta \to \infty$, $\Delta \to 0$, $\eta\Delta = const$ határátmenetet! Milyen potenciál és térerősség alakul így ki? Ezután általánosabban is számoljuk ki egy adott $\eta(\mathbf{r})$ lokalizált kétdimenziós töltéseloszlás potenciálját nagy távolságban! (Itt $\mathbf{r}$ a kétdimenziós helykoordináta.) Milyen dipólus-fogalomhoz jutunk így? Lássuk be, hogy az előző ennek valóban speciális esete!

„Töltéstükrözések":

1. Milyen elektromos térerősség alakul ki, ha egy földelt végtelen fém síklap egyik oldalára általános helyzetű $\mathbf{d}$ elektromos dipólust helyezünk? Mekkora erő hat a dipólusra?

2. Az előző mágneses analógja: milyen $\mathbf{B}$ tér alakul ki, ha egy végtelen szupravezető síklap egyik oldalára

[1] Ez egy teljesen alapismeret; valamiért elfelejtettem külön megemlíteni. Mindenkinek kötelező tudnia!

[2] Segítség: a Stokes-tétel elemi „levezetésénél" látott módon „rakjuk tele" kis téglalapokkal a hurok belsejét! Az, hogy egy általános hurok vetületei vektorkomponensekként transzformálódnak, tisztán geometriailag is érdekes.

általános helyzetű $\mathbf{m}$ mágneses dipólust helyezünk? Mekkora erő és forgatónyomaték hat a dipólusra! Ez alapján értelmezzük azt, hogy egy szupravezető lap fölött gravitációs térben egy dipólmágnes lebeghet!

3. Végtelen síklappal elhatárolt ε_1 és ε_2 permittivitású végelen közegek közül az egyikbe egy pontszerű dipólust helyezünk. Milyen elektromos tér alakul ki a közegekben?

4. Végtelen hosszú ε_1 permittivitású dielektromos hengert a tengelyére merőleges homogén $\mathbf{E}_0$ elektromos térbe helyezünk. Milyen tér alakul ki? (Segítség: próbálkozzunk azzal, hogy a tér bent homogén, kint pedig az eredeti tér + a henger tengelyébe rakott kétdimenziós dipólus tere!)

5. Az előző feladat 3D analógja: dielektromos gömb homogén külső térbe helyezve. Ötlet, mint fent.

6. Egy földeletlen (elszigetelt), nulla össztöltésű R sugarú vékony fémgömbhéj belsejébe a középponttól $l < R$ távolságra a) Q töltést, b) sugárirányba mutató pontszerű dipólust helyezünk[3]. Milyen térerősség alakul ki a gömbön belül és kívül?

Komplex függvények:

1. Egy tetszőleges $\alpha < \pi$ szöget bezáró két végtelen földelt síklap között velük párhuzamosan álló töltött szál feladatát megoldottuk komplex függvényekkel. Konkrétan számoljuk ki a valós Φ-t az $\alpha = 90°$ és $60°$ esetekben. Ezek töltéstükrözéssel is megoldhatók; lássuk be, hogy a két módszer ugyanazt adja!

2. Az előbb bevezetett síkbeli dipólus potenciálja milyen komplex differenciálható függvény valós része? Milyen komplex függvény valós része az általános síkbeli irányban álló ilyen dipólus potenciálja? (Segítség: továbbra is emlékezzünk, hogyan is képzeltük el a dipólusokat!)

3. Egy R sugarú fémhenger tengelyétől $L > R$ távolságra vele párhuzamosan egy töltött szál fut.
a.) Idézzük fel a tükrözéses megoldást! Konkrétan írjuk fel egy adott síkbeli pontban a potenciált! Keressünk olyan komplex differenciálható függvényt, aminek ez a valós része!
b.) Oldjuk meg komplex függvénytannal a feladatot! Állítás: a komplex $z' = g(z) = \frac{a}{z}$ függvény az origón átmenő köröket egyenesekbe képezi. Lássuk be ezt! Ennek segítségével (az origót tehát *nem* a kör középpontjába helyezve) oldjuk meg a feladatot!

4. Lássuk be, hogy a $g(z) = z^2$ leképezés (ami ugye a $90°$-ban összeérő lapokat „kinyitja” síklappá), az $xy = const$ egyenletű egyenlőszárú hiperbolákat a valós tengellyel párhuzamos egyenesekbe viszi! Ez alapján határozzuk meg egy fémből hajlított, földelt egyenlőszárú hiperbola belső részében kialakuló potenciált, ha egy η töltésű szálat helyezünk bele! (Ellenőrizzük, hogy tényleg nulla a hiperbolán!)

5. Egy végtelen félsík élével párhuzamosan (nem feltétlenül vele egy síkban) fut egy szál.
a.) Legyen a sík fémből, és a szál egy η töltés. Milyen potenciál alakul ki?
b.) A félsík most legyen szupravezető, és a szálban fusson áram. Milyen $\mathbf{B}$ tér alakul ki?
Mindkét esetben konkrétan ellenőrizzük a valós mennyiségekre, hogy tényleg teljesülnek a határfeltételek! (Itt vigyázni kell a most alkalmazandó $g(z) = \sqrt{z}$ leképezésben előkerülő vágásra.)

6. Földelt fémlapból parabola alakú „vályút” hajlítunk, a fókuszvonalban η töltést helyezünk. A parabola legyen vízszintes, jobbra nyitott, origó fókuszpontú. Lássuk be, hogy a $z' = g(z) = \sqrt{z}$ függvény (hova tegyük a vágást?) a parabolát a valós féltengellyel párhuzamos egyenessé „csukja össze”! Hova képeződik a parabola belseje? Mi $\tilde{Phi}$ a z' síkon, illetve a z síkon a parabola belsejében? Mekkora töltés legyen a z' síkon, hogy az eredeti töltésünk tényleg η legyen? (Vigyázat: most a $z' = g(z)$ leképezés *nem* differenciálható a töltés helyén, vagyis nem biztos, hogy a leképezés η-t változatlanul hagyja; és tényleg nem.)

7. Tekintsünk egy földelt fémlapból hajlított parabola alakú „vályút”, melynek fókuszvonalában halad egy η töltött szál! Legyen a parabola vízszintes, jobbra nyitott, origó fókuszpontú. Lássuk be, hogy a $z' = g(z) = \sqrt{z}$ függvény (hova tegyük a vágást?) a parabolát a valós féltengellyel párhuzamos egyenessé „csukja össze”! Hova képeződik a parabola belseje? Ez alapján határozzuk meg a komplex potenciált a z' síkon, majd nézzük konkrétan meg, hogy az eredeti z síkon ez milyen potenciálnak felel meg a parabola belsejében! Mekkora origóbeli töltésnek felel ez meg? (Vigyázat: lássuk be, hogy ebben a feladatban a $z' = g(z)$ konform leképezés *nem* differenciálható a töltés helyén! Vagyis nem működik az a gondolatmenet, ami alapján η változatlanságát látnánk be.)

Nagy Márton

[3] Pl. elképzelhetjük, hogy a fémgömböt kivágjuk, beletesszük, majd visszahegggesztjük.