Elektrodinamika gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2014. március 11.

1. (dipólusok) Lássuk be a mágneses momentumra ható forgatónyomaték képletét külső mágneses térben az órán nézett, lokalizált árameloszlásokat használó módszerrel! Ezt is felhasználva mekkora erővel ill. forgatónyomatékkal hat egymásra két általános helyzetű mágneses dipóus? (Ugyanaz lesz az eredmény, mint elektromos dipólusokra, egyúttal tehát azt is kiszámoltuk.)

2. (elektromos multipólusok) Határozzuk meg, mekkora erő hat inhomogén külső elektromos térben egy elektromos kvadrupólusra (azaz olyan töltéselrendezésre, amelynek se össztöltése, se dipólusmomentuma, csak kvadrupólusmomentuma van)!

3. (gondolkodtató) Láttuk, hogy egy síkbeli A területet körbezáró, I áramot szállító hurok $|\mathbf{m}| = I \cdot A$ nagyságú mágneses momentumot kelt. Tekintsünk most egy általános (nem feltétlenül síkbeli) vezető hurkot! Milyen irányú és mekkora mágneses momentumot kelt ez? Lássuk be, hogy $\mathbf{m}$ egy adott $\mathbf{n}$ egységvektor irányába eső vetületét, $\mathbf{mn}$-et megkapjuk, ha I-t megszorozzuk a hurok $\mathbf{n}$-re merőleges síkra vett vetülete által körbezárt területtel!

4. (elektromos dipólusok) Értelmezzük a dipólus fogalmát két dimenzióban! Tekintsük először azt az elrendezést, amikor két, $+\eta$ és $-\eta$ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes egymástól Δ távolságban van, és vegyük az $\eta \to \infty$, $\Delta \to 0$, $\eta\Delta = const$ határátmenetet! Milyen potenciál és térerősség alakul így ki? Ezután általánosabban is számoljuk ki egy adott $\eta(\mathbf{r})$ lokalizált kétdimenziós töltéseloszlás potenciálját nagy távolságban! (Itt $\mathbf{r}$ a kétdimenziós helykoordináta.) Milyen dipólusfogalomhoz jutunk így? Lássuk be, hogy az előző ennek valóban speciális esete!

5. (komplex függvények + elektromos dipólusok) Találjunk olyan komplex differenciálható függvényt, amelynek valós része leírja az előbb bevezetett kétdimenziós dipólus potenciálját! (Segítség: itt is az első pont alapján érdemes eljárni, egyből a 2D töltés komplex potenciáljával dolgozva).

6. (tükrözés + komplex függvények) Megbeszéltük, hogyan kell a $90°$ középponti szögű fémlapok között elhelyezett ponttöltés terét kiszámolni. Nézzük meg ugyanezt a feladatot két dimenzióban, azaz vonalmenti η töltésekkel! Lássuk be konkrétan, hogy a komplex függvényes módszer ugyanazt az eredményt adja, mint a töltéstükrözéses módszer!

7. (tükrözés) Milyen potenciál alakul ki, ha egy végtelen hosszú, R sugarú, földelt (azaz $\Phi = 0$ potenciálon tartott) fémhengertől $L > R$ távolságban vele párhuzamosan elhelyezünk egy η hosszant töltéssűrűségű szálat? (Útmutatás: oldjuk meg „tükrözéssel”, azaz: ötleteléssel a feladatot; elég lesz egy képzeletbeli síkbeli töltéssel kísérletezgetni a hengeren belül.)

8. (komplex függvények) Írjuk fel az előző feladat megoldásaként kapott potenciált egy alkalmas komplex differenciálható függvény valós részeként! Meg lehetett volna-e oldani a feladatot közvetlenül a komplex függggvényes módszerrel? Ehhez — az óraiak mintájára — olyan $g(z)$ leképezést kéne találni, ami a körvonalat egyenesbe viszi. Vizsgáljuk ehhez a $g(z) = R^2/z$ leképezést, lássuk be, hogy ez bizonyos R sugarú köröket valóban egyenesekbe visz, majd oldjuk meg a feladatot így is! (Tehát: legyen $z' = R^2/z$, és oldjuk meg a feladatot a z' síkon a szokásos tükrözéssel!)

9. (szupravezetők) Tekintsünk most az előzővel analóg mágneses feladatot: legyen a hengerünk szupravezető, és legyen az η vonalmenti töltéssűrűség helyett egy I áramot szállító vezető szál! Milyen *mágneses* tér alakul ki?

10. (tükrözés, dielektrikumok) Számoljuk ki az órán részletesen megnézett, ε_1 és ε_2 permittivitású félterek feladatát, ha most nem pontszerű, hanem a határolólapokkal párhuzamos η vonalszerű töltést teszünk az egyik féltérbe!

11. (komplex függvények) Vizsgáljuk a $g(z) = z^2$ leképezést! Azt már láttuk, hogy ez az $90°$-ban összeérő lapokat kinyitja $180°$-os „szöggé”, azaz síklappá. Lássuk most be, hogy ez a $g(z)$ a valós és a képzetes tengellyel párhuzamos aszimptotájú egyenlőszárú hiperbolákat a valós tengellyel párhuzamos egyenesekbe viszi! Ez alapján oldjuk meg azt a feladatot, amikor egy fémből hajlított, földelt egyenlőszárú hiperbola „belső” részében van egy η kétdimenziós töltés! Tanulságos itt konkrétan is végigszámolni a végeredményt, és ellenőrizni, hogy az tényleg nulla a hiperbolán.

12. (tükrözés) Egy földelt R sugarú fémgömbhéjtól $L > R$ távolságra elhelyezünk egy d nagyságú, a helyét a gömb középpontjával összekötő egyenessel párhuzamos irányú dipólust. Milyen potenciál alakul ki a gömbön belül és kívül? Hát akkor, ha a belsejébe tesszük?

13. (dielektrikumok, tükrözés v. Legendre-polinomok) Egy R sugarú, ε permittivitású dielektromos tömör gömböt külső homogén E_0 elektromos térbe helyezünk. Milyen lesz a térerősség belül és kívül?

14. (dielektrikumok, Legendre-polinomok) Egy R sugarú, ε permittivitású dielektromos tömör gömbtől $L > R$ távolságban pontszerű Q töltést helyezünk el. Adjuk meg a potenciált a gömbön belül és kívül sorfejtett alakban!

15. (Fourier-szerű sorok) Adjuk meg a homogén Laplace-egyenlet $\Phi(\mathbf{r})$ megoldását[1] sorfejtett alakban egy a, b, c oldalú téglatest belsejében, ha belül $\triangle\Phi = 0$, továbbá azt tudjuk, hogy öt lapon $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$, a hatodikon (mondjuk a fedlapon) pedig $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ adott függvény!

16. (Legendre-polinomok) Mi lesz egy R sugarú gömb belsejében a homogén Laplace-egyenlet Φ

[1] Ez a feladat elég nehezen képzelhető el elektrosztatikai elrendezésként, ezért is nem mondtam, hogy „elektromos pontenciált” keresünk.

megoldása, ha a felületen azt írjuk elő, hogy ott $\Phi\left(r=R,\theta\right)=\alpha+\beta z+\gamma z^2+\xi z^3$ legyen? (Ugye $z=R\cos\theta$.)

17. (Legendre-polinomok, sorfejtés) Láttuk órán, hogy mi a z tengelyek r' pontba helyezett töltés $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ potenciáljának sora a Legendre-polinomos módszerrel. Mi lesz ez alapján egy, az $\mathbf{r}'$ pontba helyezett, tengelyirányú dipólus potenciáljának sora? (Segítség: gondoljunk szokás szerint a dipólusra úgy, mint két közeli ponttöltésre!)

18. (Legendre-polinomok, sorfejtés) Az előző feladat eredményei alapján keressük meg sorfejtett alakban a potenciált, ami akkor keletkezik, ha egy fémgömbön kívül egy dipólust helyezünk el (az elrendezés tengelyszimmetrikus)!

19. (mágneses testek, Legendre-polinomok) Ugyanúgy, mint az előző feladatban, keressük meg a mágneses teret egy para- vagy diamágneses, μ permeabilitású gömbön belül és kívül, ha a z tengelyre egy mágneses dipólust helyezünk! Használjunk skalárpotenciált a mágneses tér esetében is!

Nagy Márton