A csoport: **Feladat:**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$x(1+4x^2)y'' + (4x^2-1)y' + 64x^3 = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!
Keresse meg az $y(0) = y(1/2) = 0$ peremfeltételek esetében a Green-függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:
Az egyenletet $x(1+4x^2)$-tel osztva:

$$y'' + \frac{4x^2-1}{x(1+4x^2)}y' = -\frac{64x^2}{1+4x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{4x^2-1}{x(1+4x^2)}dx\right) = \frac{x}{1+4x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \ ,$$

y_1-et behelyettesítve y_2-re:

$$y_2' = \frac{x}{1+4x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(0) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln\left(1+4x^2\right)$$

$$Y_2(x) = \ln\left(1+4x^2\right) - \ln 2$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{8x\ln 2}{1+4x^2}$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1+4\xi^2}{8\xi\ln 2}\left[\ln\left(1+4x^2\right) - \ln 2\right]\ln\left(1+4\xi^2\right) \ , & \text{ha} \quad 0<\xi<x \\ \frac{1+4\xi^2}{8\xi\ln 2}\left[\ln\left(1+4\xi^2\right) - \ln 2\right]\ln\left(1+4x^2\right) \ , & \text{ha} \quad x<\xi<\frac{1}{2} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{1/2} G(x,\xi)\left(-\frac{64\xi^2}{1+4\xi^2}\right)d\xi = -\frac{8}{\ln 2}\left[\ln\left(1+4x^2\right)-\ln 2\right]\int_0^x \ln\left(1+4\xi^2\right)\xi d\xi & (1) \\ &- \frac{8}{\ln 2}\ln\left(1+4x^2\right)\int_x^{1/2}\left[\ln\left(1+4\xi^2\right)-\ln 2\right]\xi d\xi & (2) \\ &= \frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{\ln 2} - 4x^2 & (3) \end{aligned}$$

B csoport: **Feladat:**
Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$(4+x^2)y'' + \left(x - \frac{4}{x}\right) y' - x^2 = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!
Keresse meg az $y(1/2) = y(1) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:
Az egyenletet $(4+x^2)$-tel osztva:

$$y'' + \frac{x^2-4}{x(4+x^2)} y' = \frac{x^2}{4+x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{x^2-4}{x(4+x^2)} dx\right) = \frac{x}{4+x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \ ,$$

y_1-et behelyettesítve y_2-re:

$$y_2' = \frac{x}{4+x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{2} \ln\left(4+x^2\right)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln\left(4+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)$$

$$Y_2(x) = \ln\left(4+x^2\right) - \ln 5$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{2x}{4+x^2} \ln\left(\frac{20}{17}\right)$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{4+\xi^2}{2\xi \ln(20/17)} \left[\ln\left(4+x^2\right) - \ln 5\right] \left[\ln\left(4+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)\right] \ , & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < \xi < x \\ \frac{4+\xi^2}{2\xi \ln(20/17)} \left[\ln\left(4+\xi^2\right) - \ln 5\right] \left[\ln\left(4+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)\right] \ , & \text{ha} \quad x < \xi < 1 \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{1/2}^{1} G(x,\xi) \frac{\xi^2}{4+\xi^2} d\xi & (4) \\ &= \frac{1}{2\ln(20/17)} \left[\ln\left(4+x^2\right) - \ln 5\right] \int_{1/2}^{x} \left[\ln\left(4+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)\right] \xi d\xi & (5) \\ &+ \frac{1}{2\ln(20/17)} \left[\ln\left(4+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)\right] \int_{x}^{1} \left[\ln\left(4+\xi^2\right) - \ln 5\right] \xi d\xi & (6) \\ &= -\frac{3}{16} \frac{\ln\left(4+x^2\right)}{\ln(20/17)} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{16} \frac{\ln 5}{\ln(20/17)} - \frac{1}{4} & (7) \end{aligned}$$

C csoport: **Feladat:**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$xy'' + \frac{x^2-1}{x^2+1}y' + \frac{4x^3}{x^2+1} = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!
Keresse meg az $y(1/4) = y(1/2) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:

Az egyenletet x-szel osztva:

$$y'' + \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}y' = -\frac{4x^2}{1+x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}dx\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \ ,$$

y_1-et behelyettesítve y_2-re:

$$y_2' = \frac{x}{1+x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(1/4) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)$$

$$Y_2(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{2x}{1+x^2}\ln\left(\frac{20}{17}\right)$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi^2}{2\xi\ln(20/17)}\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]\left[\ln\left(1+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)\right] \ , & \text{ha} \quad \frac{1}{4} < \xi < x \\ \frac{1+\xi^2}{2\xi\ln(20/17)}\left[\ln\left(1+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)\right] \ , & \text{ha} \quad x < \xi < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{1/4}^{1/2} G(x,\xi)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}d\xi && (8) \\ &= \frac{1}{2\ln(20/17)}\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]\int_{1/4}^{x}\left[\ln\left(1+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)\right]\xi d\xi && (9) \\ &+ \frac{1}{2\ln(20/17)}\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)\right]\int_{x}^{1/2}\left[\ln\left(1+\xi^2\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]\xi d\xi && (10) \\ &= \frac{3}{16}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln(20/17)} - x^2 - \frac{3}{16}\frac{\ln(17/16)}{\ln(20/17)} + \frac{1}{16} && (11) \end{aligned}$$

D csoport: **Feladat:**
Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$x\frac{4+9x^2}{4-9x^2}y'' - y' - \frac{81x^3}{4-9x^2} = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!
Keresse meg az $y(0) = y(2/3) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:
Az egyenletet $x(4+9x^2)/(4-9x^2)$-tel osztva:

$$y'' + \frac{9x^2-4}{x(4+9x^2)}y' = \frac{81x^2}{4+9x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{9x^2-4}{x(4+9x^2)}dx\right) = \frac{x}{4+9x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \ ,$$

y_1-et behelyettesítve y_2-re:

$$y_2' = \frac{x}{4+9x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{18}\ln\left(4+9x^2\right)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(0) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(2/3) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln\left(4+9x^2\right) - 2\ln 2$$

$$Y_2(x) = \ln\left(4+9x^2\right) - 3\ln 2$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1Y_2' - Y_2Y_1' = \frac{18x\ln 2}{4+9x^2}$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{4+9\xi^2}{18\xi\ln 2}\left[\ln\left(4+9x^2\right) - 3\ln 2\right]\left[\ln\left(4+9\xi^2\right) - 2\ln 2\right] \ , & \text{ha} \quad 0 < \xi < x \\ \frac{4+9\xi^2}{18\xi\ln 2}\left[\ln\left(4+9\xi^2\right) - 3\ln 2\right]\left[\ln\left(4+9x^2\right) - 2\ln 2\right] \ , & \text{ha} \quad x < \xi < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{2/3} G(x,\xi)\left(-\frac{81\xi^2}{4+9\xi^2}\right)d\xi & (12) \\ &= -\frac{9}{2\ln 2}\left[\ln\left(1+4x^2\right) - 3\ln 2\right]\int_0^x \left[\ln\left(4+9\xi^2\right) - 2\ln 2\right]\xi d\xi & (13) \\ &- -\frac{9}{2\ln 2}\left[\ln\left(4+9x^2\right) - 2\ln 2\right]\int_x^{2/3} \left[\ln\left(4+9\xi^2\right) - 3\ln 2\right]\xi d\xi & (14) \\ &= -\frac{\ln\left(4+9x^2\right)}{\ln 2} + \frac{9}{4}x^2 + 2 & (15) \end{aligned}$$