I. zh pótlása:

Feladat:
Az

$$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = x^3 \mathrm{e}^{-x^2}$$

differenciálegyenlet homogén részének egyik partikuláris megoldása

$$\mathrm{e}^{-x^2} \ .$$

Határozza meg

- a másik, lineárisan független partikuláris megoldást,
- az
$$y(1) = y'(2) = 0$$
peremfeltételekhez tartozó Green-függvényt,
- az inhomogén egyenlet előbbi peremfeltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Először a homogén egyenlet másik megoldását, y_2-t keressük. A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int 4x dx\right) = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \ ,$$

$y_1 = \mathrm{e}^{-x^2}$-et behelyettesítve y_2-re

$$\mathrm{e}^{-x^2} y_2' + 2x\mathrm{e}^{-x^2} y_2 = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

adódik. Ezt pl. a következőképpen oldhatjuk meg:

$$\mathrm{e}^{-2x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2} y_2\right)' = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

$$\left(\mathrm{e}^{x^2} y_2\right)' = 1$$

$$\mathrm{e}^{x^2} y_2 = x$$

(az integrációs állandó elhagyható, mivel az y_1 számszorosát adja)

$$y_2 = x\mathrm{e}^{-x^2}$$

A következő feladat y_1 és y_2 alkalmas lineárkombinációival olyan Y_1 és Y_2 megoldások szerkesztése, amelyek egyike az egyik, másika a másik határfeltételt teljesíti, tehát

$$Y_1(1) = Y_2'(2) = 0 \ .$$

Y_1 nehézség nélkül felírható, pl.

$$Y_1 = y_2 - y_1 = (x-1)\mathrm{e}^{-x^2}$$

alakban. A másik határfeltételt teljesítő megoldást keressük

$$Y_2 = a y_1 - y_2 = (a - x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

alakban! Ekkor az Y_2-re kirótt határfeltételből

$$Y_2'(2) = [-2x(a-x)-1]\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{x=2} = 0$$

adódik, azaz

$$(-4a+7)\mathrm{e}^{-4} = 0\ ,$$

amiből

$$a = \frac{7}{4}\ .$$

Tehát

$$Y_2 = \left(\frac{7}{4} - x\right)\mathrm{e}^{-x^2}\ .$$

Az Y_1, Y_2 megoldások Wronski-determinánsa:

$$\begin{aligned} W(Y_1,Y_2) = Y_1Y_2' - Y_1'Y_2 &= (y_2-y_1)(ay_1-y_2)' - (y_2-y_1)'(ay_1-y_2) \\ &= (-a+1)W(y_1,y_2) - aW(y_1,y_1) - W(y_2,y_2) \\ &= (-a+1)W(y_1,y_2) = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}\ . \end{aligned}$$

Mindezek segítségével a Green-függvény explicit alakban:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\left(\frac{7}{4}-x\right)(\xi-1)\mathrm{e}^{\xi^2-x^2}\ , & \text{ha} \quad 1 \le \xi \le x \\ -\frac{4}{3}\left(\frac{7}{4}-\xi\right)(x-1)\mathrm{e}^{\xi^2-x^2}\ , & \text{ha} \quad x \le \xi \le 2 \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása pedig

$$\begin{aligned} y &= \int_1^2 G(x,\xi)\xi^3\mathrm{e}^{-\xi^2}d\xi \\ &= -\frac{4}{3}\left(\frac{7}{4}-x\right)\mathrm{e}^{-x^2}\int_1^x(\xi-1)\xi^3 d\xi - \frac{4}{3}(x-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_x^2\left(\frac{7}{4}-\xi\right)\xi^3 d\xi \\ &= -\frac{4}{3}\left(\frac{7}{4}-x\right)\mathrm{e}^{-x^2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{20}\right) - \frac{4}{3}(x-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(-\frac{7x^4}{16}+\frac{x^5}{5}+\frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{11}{15}x + \frac{41}{60}\right)\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

II. zh pótlása:

1. feladat:

Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 t \quad (x \in \mathcal{R})$$

inhomogén hullámegyenlet

$$u\big|_{t=0} = 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:

Az egydimenziós inhomogén hullámegyenlet megoldása jelen esetben

$$u = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi^2\tau\, d\xi d\tau$$

alakba írható, amit kiértékelve

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\xi^3}{3}\Bigg|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau d\tau \\
&= \frac{1}{6}\int_0^t \left[(x+(t-\tau))^3 - (x-(t-\tau))^3\right] \tau d\tau \\
&= \frac{1}{6}\int_0^t \left[6x^2(t-\tau) + 2(t-\tau)^3\right] \tau d\tau \\
&= \int_0^t \left[x^2 t_1 + \frac{1}{3}t_1^3\right](t-t_1)dt_1 \\
&= x^2 t\frac{t^2}{2} - x^2\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t\frac{t^4}{4} - \frac{1}{3}\frac{t^5}{5} = \frac{1}{6}x^2t^3 + \frac{1}{60}t^5 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - 2u = 0 \quad (x \in [-1,1])$$

parciális differenciálegyenlet

$$u(x=\pm 1, t) = 0$$

peremfeltételekhez és

$$u(x, t=0) = \sqrt{7}\cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right)$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

Az egyenletbe beírva és u-val osztva:

$$\frac{A''}{A} - \frac{B'}{B} - 2 = 0$$

Az egyes tagok külön-külön állandók:

$$\frac{A''}{A} = -\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 - 2$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a\cos(\kappa x) + b\sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = c e^{-(2+\kappa^2)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek teljesítéséhez

$$\kappa = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

szükséges a koszinuszos ill.

$$\kappa = n\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

a szinuszos megoldás esetében. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(2+\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\right)t\right] + b_n \sin(n\pi x) \exp\left[-\left(2+(n\pi)^2\right)t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) + b_n \sin(n\pi x) = \sqrt{7}\cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right) \ ,$$

ahonnan leolvasható, hogy minden b_n együttható nulla, valamint minden a_n együttható is nulla a_4 kivételével, ami

$$a_4 = \sqrt{7} \ .$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x,t) = \sqrt{7}\cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(2+\left(\frac{7}{2}\pi\right)^2\right)t\right]$$

3. feladat:
Határozza meg a

$$\triangle\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r=R,\vartheta,\varphi) = U_0 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták. Emlékeztető: az első néhány gömbfüggvény alakja

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

Megoldás:
A Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátákban az $r^l Y_{lm}$, $r^{-(l+1)}Y_{lm}$ kifejezések lineárkombinációja. $r < R$ esetén az első, az origóban nem divergáló, $r > R$ esetén a második, végtelenben lecsengő alakot kell használnunk.

Mivel $\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)$, vagyis Y_{00} és Y_{10} lineárkombinációja, a fentiek alapján közvetlenül felírhatjuk a határfeltételnek eleget tevő megoldást:

$r < R$ esetén:

$$\Phi = \frac{U_0}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\vartheta\right)$$

$r > R$ esetén:

$$\Phi = \frac{U_0}{2}\left(\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2}\cos\vartheta\right)$$