

Differenciálegyenletek II

2. előadás ZH B csoport

Minden beadott papíron szerepeljen név és/vagy Neptun azonosító, mai dátum, valamint hogy A/B csoport-e! A ZH-ra 90 perc áll rendelkezésre. Bármilyen a ZH-t megelőzően keletkezett papíralapú segédlet használható. A feladatok megtalálhatóak lesznek a honlapon később.

1. Feladat: Keressük meg az alábbi csatolt differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását! (6 pont)

$$y_1' = -2y_1 + y_2, \quad y_2' = 4y_1 + y_2.$$

2. Feladat: Egy nem-lineáris differenciálegyenlet-rendszer fixpontjai (\vec{y}_0) körül linerizált alakja a következő:

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ -2y_1 & 2y_2 \end{bmatrix} (\vec{y} - \vec{y}_0).$$

A fixpontok és az azokhoz tartozó sajátvektorok:

$$\begin{aligned} \vec{p}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), & \vec{p}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), & \vec{p}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1), & \vec{p}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \\ \lambda_{1,2}^{(1)} &= \sqrt{2}(1 \pm i), & \lambda_{1,2}^{(2)} &= \pm 2, & \lambda_{1,2}^{(3)} &= -\sqrt{2}(1 \pm i), & \lambda_{1,2}^{(4)} &= \pm 2. \end{aligned}$$

Döntsük el milyen típusúak a fixpontok, razoljuk fel vázlatosan ez alapján a megoldás görbéket az (y_1, y_2) síkon (ne felejtjük el meghatározni a szükséges sajátvektorokat)! (6 pont)

3. Feladat: Adjunk meg egy másodrendű differenciálegyenletet, melynek általános megoldása az alábbi! (3 pont)

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 \ln x.$$

4. Feladat: Létezik-e a $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ parciális differenciálegyenletnek olyan megoldása, melyre

$$u(x, y = x) = x \cos x, \quad u(0, y) = y?$$

Amennyiben igen, adjuk is meg! (4 pont)

5. Feladat: Keressük a karakterisztikák módszerével az alábbi parciális differenciálegyenletnek olyan megoldását, mely a megadott kezdeti feltételt is teljesíti! (7 pont)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{u}, \quad u(x, y = x^2) = -2\sqrt{x}.$$

