Jegyzet a 10. differenciálegyenletek II gyakorlathoz (bővített változat)

December 2, 2015

1 Elsőrendű parciális diffegyenletek: karakterisztikák módszere

A vizsgált differenciálegyenlet:

$$\alpha\,(t,x,u)\,\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\,(t,x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma\,(t,x,u) \tag{1}$$

ahol az $u(t,x)$ ismeretlen függvényt keressük. Az ilyen alakű egyenleteket *kvázilineárisnak* nevezzük, mert az ismeretlen függvény parciális deriváltjai lineárisan szerepelnek benne. Vegyük észre, hogy maga az ismeretlen függvény viszont szerepelhet nemlineárisan, így (1)-be elvileg beleférnek pl. $u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$, vagy $\sin\frac{1}{u}$ alakú tagok is.

Meglepő módon az (1) típusú egyenletekre létezik egy általános megoldási módszer. Ezt a módszert hívják a karakterisztikák módszerének ("method of characteristics").

Jelölje az ismeretlen függvényt $u(t,x)$. Ez a függvény két független változótól függ: úgy képzelhetjük el, mint egy felületet a 3D térben. A megoldásra vezető gondolatmenethez szükségünk lesz ennek az a (egyelőre ismeretlen) felületnek a normálvektorára.

1.1 A normálvektor

Szeretnénk tehát meghatározni az $u(t,x)$ függvény normálvektorát az értelmezési tartomány síkjának (t,x) pontjában. Alkalmazzuk a következő trükköt: vezessük be a háromváltozós

$$\Phi\,(t,x,\tilde{u})=u(t,x)-\tilde{u} \tag{2}$$

függvényt. Ezt úgy értjük, hogy ha ismert lenne az $u\,(t,x)$ függvény, akkor u helyére beírnánk a t-vel és x-el kifejezett értékét. Φ egy skalármező, ami az $t,x,\tilde{u}$ 3D tér minden pontjában értelmezve van. Miért jó ez nekünk? Gondoljuk meg, hogy ennek a Φ függvénynek mik lesznek a konstans felületei. Például $\Phi(t,x,u)=0$, ha $\tilde{u}=u\,(t,x)$. Erről pedig vegyük észre, hogy ez éppen az általunk keresett ismeretlen függvény felületének egyenlete ebben a 3d térben!

Sikerült tehát konstruálnunk egy olyan 3 változós függvényt, amelynek az általunk keresett $u(x,t)$ függvény konstans, "ekvipotenciális" felülete. Most emlékezzünk, hogy a *gradiens* vektor merőleges az ekvipotenciális felületekre! ha tehát képezzük a $\Phi\,(t,x,\tilde{u})$ függvény gradiensét a 3D tér $(t,x,\tilde{u}=u(t,x))$ pontjában, akkor pontosan egy olyan vektort kapunk, ami merőleges lesz ebben a pontban az eredeti $u\,(t,x)$ függvényünk felületére. A gradiens definíciója szerint:

$$\nabla\Phi\,(t,x,u\,(t,x))=\left(\begin{array}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{u}}\end{array}\right)_{t,x,u(t,x)}=\left(\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial u}{\partial x}\\ -1\end{array}\right)_{t,x} \tag{3}$$

Eddig ez történt: $u(t,x)$ értékét továbbra sem tudjuk, de az ismeretlen felület normálvektorát ki tudtuk fejezni az u függvény parciális deriváltjaival.

1.2 A karakterisztikus görbék

Pillantsunk vissza az (1) egyenletre. Vegyük észre, hogy az egyenlet felírható, mint egy skalárszorzatra vonatkozó követelmény: ha bevezetjük az

$$\boldsymbol{\alpha}(t,x,\tilde{u}) = \begin{pmatrix} \alpha\,(t,x,\tilde{u}) \\ \beta\,(t,x,\tilde{u}) \\ \gamma\,(t,x,\tilde{u}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

vektort, akkor (1) értelmében

$$\boldsymbol{\alpha}\,(t,x,\tilde{u}) \cdot \nabla\Phi\,(t,x,\tilde{u}) = 0, \qquad \text{ha} \quad \tilde{u} = u\,(t,x) \tag{5}$$

A nagy trükk az, hogy képzeljük el $\boldsymbol{\alpha}$-t, mint egy egyparaméteres

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \\ \tilde{u}(s) \end{pmatrix} \tag{6}$$

térgörbe iránymenti deriváltját:

$$\boldsymbol{\alpha}(t,x,u) := \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dx}{ds} \\ \frac{d\tilde{u}}{ds} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Elképzelni sok mindent el lehet, de $\boldsymbol{\alpha}$-t mindenesetre a (4) képlet definiálta, így ha (7) fennállását is megköveteljük, akkor teljesülnie kell a következő differenciálegyenlet-rendszernek:

$$\frac{dt(s)}{ds} = \alpha\,(t,x,\tilde{u}) \tag{8}$$

$$\frac{dx(s)}{ds} = \beta\,(t,x,\tilde{u}) \tag{9}$$

$$\frac{d\tilde{u}(s)}{ds} = \gamma\,(t,x,\tilde{u}) \tag{10}$$

Miért jó nekünk, ha az $\boldsymbol{\alpha}$ vektort a (7) alakban keressük? Vegyük észre, hogy (5) alakja ekkor a következő lesz:

$$\nabla\Phi \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = 0 \tag{11}$$

ennek az egyenletnek a bal oldala a Φ függvény $\mathbf{r}(s)$ görbén vett vonalmenti deriválja. Ez minden s-re 0, tehát a $\mathbf{r}(s)$ görbe mentén a Φ függvény állandó. Ebből következően, ha $\mathbf{r}(s)$-nek van olyan pontja, ami rajta van az $\Phi = 0$, azaz $\tilde{u} = u(t,x)$ felületen, akkor az egész $\mathbf{r}(s)$ görbe rajta van a felületen. A (8)-(10) egyenletrendszer megoldásával pedig kaphatunk végtelen sok ilyen görbét.

Felhívjuk a figyelmet, hogy ha az α,β,γ függvények a $(t,x,\tilde{u})$ tér minden pontjában értelmezve vannak, akkor (8)-(10) szerint a *tér minden pontján* áthalad egy karakterisztikus görbe. Ezt szemléletesen egyszerű látni, hiszen ekkor tetszőleges $(t,x,\tilde{u})$ pontot az egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítve megkapjuk a görbe vonalmenti deriváltját ebben a pontban, és innen kezdve numerikusan (pl. Euler-módszerrel) kiszámolható az adott ponton áthaladó görbe.

Az egyenletrendszer általános megoldása formálisan három független integrálási konstanst tartalmaz, de ezek közül egy a mi céljainkhoz redundáns. Egy adott görbe többféleképpen paraméterezhető, és ha csak a görbe $(t,x,\tilde{u})$ térbeli alakjára vagyunk kíváncsiak, de arra nem, hogy az s segédparaméter hogyan futja be a görbét, akkor ki kell küszöbölni a segédparamétert. A (8)-(10) egyenletrendszer több olyan megoldást tartalmaz, amihez ugyanaz a térgörbe tartozik, ezért az s kiküszöbölése egyben az integrálási konstansok számának csökkenésével is együtt jár.

Az egyenletrendszer megoldásával és s kiküszöbölésével a többi integrálási konstanst mindig megkaphatjuk a következő alakban:

$$c_1 = f_1\,(t,x) \tag{12}$$

$$c_2 = f_2\,(t,x,\tilde{u}) \tag{13}$$

Ezek tehát s-től már függetlenek. c_1 és c_2 rögzített értékeire A (12)-(13) egyenletek egy-egy felületet határoznak meg a $(t, x, \tilde{u})$ térben. A két felület egy görbe mentén metszi egymást: e mentén a görbe mentén teljesül egyszerre (12) és (13), tehát ez a c_1 és c_2 értékhez tartozó karakterisztikus görbe. c_1 és c_2 paraméterek változtatásával kapjuk a különböző karakterisztikus görbéket: más szóval egy kétparaméteres görbesereget kaptunk, ami lefedi a teljes $(t, x, \tilde{u})$ teret. (Le *kell*, hogy fedje, ld. két bekezdéssel feljebb.)

Tekintsünk most egy $\Psi(t, x, \tilde{u})$ skalármezőt, amelyről követeljük meg, hogy

$$\Psi(t, x, \tilde{u}) \equiv \Psi(f_1(t, x), f_2(t, x, \tilde{u})) \tag{14}$$

azaz Ψ csak f_1-en és f_2-n keresztül függ a független változóktól. Ez Ψ-re nézve azt jelenti, hogy ha f_1-et és f_2-t konstans értéken tartom, azaz rajta vagyok egy karakterisztikus görbén, akkor $\Psi(t, x, \tilde{u})$ értéke konstans. Más oldalról megközelítve, nézzük most Ψ valamely

$$\Psi(f_1(t, x), f_2(t, x, \tilde{u})) = C \tag{15}$$

konstans felületét! Ψ tetszőleges függvény, ezért az általánosság megkötése nélkül vehetjük a $C = 0$ esetet. (15)-ből gondolatban $\tilde{u}$-t kifejezve és átrendezve a konstans felület egyenlete

$$0 = u(t, x) - \tilde{u} \equiv \Phi(t, x, \tilde{u}) \tag{16}$$

alakban is írható. Mivel a tér minden pontján áthalad egy karakterisztikus görbe, ezért a kiválasztott konstans felület minden pontján is áthalad karakterisztikus görbe. Ugyanakkor, mivel Ψ a karakterisztikus görbék mentén konstans, ezért ha a görbe egy pontja rajta van a felületen, akkor az egész karakterisztikus görbe rajta van a felületen. A Ψ bármely konstans felületén teljesül a

$$\nabla\Psi \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = 0 \tag{17}$$

egyenlet, ahol $\mathbf{r}(s)$ alatt az adott ponton áthaladó karakterisztikus görbét értjük. Másrészt (16) szerint Ψ konstans felületén Φ is konstans, így $\nabla\Psi \parallel \nabla\Phi$, amiből

$$\nabla\Phi \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = 0 \tag{18}$$

következik, ami viszont éppen az eredeti differenciálegyenletünk (11) szerinti alakja. (15) és (16) felhasználásával az általános megoldást úgy kapjuk, hogy (15)-ben végrehajtjuk az $\tilde{u} \to u(t, x)$ cserét:

$$\Psi(f_1(t, x), f_2(t, x, u(t, x))) = 0 \tag{19}$$

amivel az $u(t, x)$ általános megoldást implicite kapjuk meg. Ebből már meg lehet határozni a partikuláris megoldásokat a peremfeltételek behelyettesítésével.

Egyszerű esetekben $u(t, x)$ explicite is kifejezhető (19)-ből. Ha a (13)-ból sikerül $\tilde{u}$-t kifejezni, akkor

$$\tilde{u} = g(t, x, c_2), \tag{20}$$

$\Psi(f_1, f_2)$ pedig egy ***tetszőleges*** függvény, ezért gondolatban kifejezhetjük (19)-ből f_2-t, melynek eredményeként:

$$f_2(t, x, u(t, x)) = \tilde{\Psi}(f_1(t, x)) \tag{21}$$

adódik, ahol $\tilde{\Psi}(f_1)$ egy másik tetszőleges függvény (de már csak egyváltozós). Felhasználva, hogy (13)-ból $\tilde{u}$-t kifejezve (20)-at kapjuk, az általános megoldás:

$$u(t, x) = g\left(t, x, \tilde{\Psi}(f_1(t, x))\right) \tag{22}$$

ahol tehát $f_1(t, x)$ alakja (12)-ből, $g(t, x, c_2)$ alakja pedig (20)-ból (vagyis (13)-ból) ismert és rögzített, $\tilde{\Psi}(x)$ viszont tetszőleges függvény, melyet a partikuláris megoldásokban a peremfeltételek rögzítenek.

Példa 1

$$t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda u \tag{23}$$

a kezdeti feltétel pedig legyen:

$$u(1,x) = \sin x \tag{24}$$

A (8)-(10) egyenletrendszer alakja most:

$$\frac{dt(s)}{ds} = t, \quad \frac{dx(s)}{ds} = x, \quad \frac{d\tilde{u}}{ds} = \lambda\tilde{u} \tag{25}$$

melynek megoldása:

$$\begin{aligned} t(s) &= c_1 e^s, && (26)\\ x(s) &= c_2 e^s, && (27)\\ \tilde{u}(s) &= c_3 e^{\lambda s} && (28) \end{aligned}$$

A két független invariáns mennyiség egyszerűen leolvasható:

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \text{konst}, && (29)\\ \frac{\tilde{u}}{x^\lambda} &= \text{konst} && (30) \end{aligned}$$

Tehát

$$\tilde{u} \equiv u(t,x) = x^\lambda f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{31}$$

ahol $f(x)$ tetszőleges függvény. Most a kezdeti feltételt illesztjük:

$$u(1,x) = x^\lambda f(x) = \sin x \tag{32}$$

ahonnan

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\lambda} \tag{33}$$

a keresett partikuláris megoldás pedig f argumentumában $x \to x/t$ helyettesítésével kapható:

$$u(t,x) = t^\lambda \sin\left(\frac{x}{t}\right).$$

Példa 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{34}$$

kezdeti feltétel:

$$u(0,x) = \sin x \tag{35}$$

Először felírjuk a (8)-(10) egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{dt(s)}{ds} &= 1 && (36)\\ \frac{dx(s)}{ds} &= xt && (37)\\ \frac{d\tilde{u}(s)}{ds} &= 0 && (38) \end{aligned}$$

Ebből egyrészt

$$\begin{aligned} t(s) &= s + c_1 && (39)\\ \tilde{u}(s) &= c_3 && (40) \end{aligned}$$

másrészt (39) miatt $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$, ezért (37)-ot írhatjuk, mint $x(t)$-re vonatkozó diffegyenletet:

$$\frac{dx}{dt} = xt \tag{41}$$

ahonnan

$$x(t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \tag{42}$$

A két keresett invariáns mennyiség tehát:

$$\tilde{u} \equiv u(t,x) = \text{konst}, \tag{43}$$

$$xe^{-\frac{t^2}{2}} = \text{konst} \tag{44}$$

Ahonnan

$$u(t,x) = f\left(xe^{-\frac{t^2}{2}}\right) \tag{45}$$

A (35) kezdeti feltétel illesztéséből:

$$u(0,x) = f(x) = \sin x \tag{46}$$

amiből

$$u(t,x) = \sin\left(xe^{-\frac{t^2}{2}}\right). \tag{47}$$

2 A változók szeparálása (parciális diffegyenleteknél)

Létezik egy másik módszer, ami bizonyos esetekben alkalmazható magasabb rendű, lineáris vagy nemlineáris parciális diffegyenletek megoldásainak meghatározására is. *Lineáris* diffegyenletek esetében, amikor a változók szétválasztása alkalmazható, a megoldások lineárkombinációjaként sokszor az általános megoldás is előállítható. *Nemlineáris* esetben a lineárkombináció sajnos nem vezet új partikuláris megoldásra, így a változók szétválasztása is csak korlátozottan alkalmas a diffegyenlet megoldására.

Legyen adott egy parciális differenciálegyenlet:

$$\Phi\left(u, \partial_t u, \partial_x u, \partial_t^2 u, \partial_x^2 u, \partial_t \partial_x u, \ldots, t, x\right) = 0 \tag{48}$$

A módszer lényege, hogy az $u(x,t)$ függvényt szorzat alakjában keressük:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{49}$$

ahol a jelölésnek megfelelően az X függvény csak az x változótól, a T függvény pedig csak a t változótól függ. (Több független változó esetén a módszer értelemszerűen általánosítható.) A (49) ansatzot visszahelyettesítve a (48) egyenletbe, az egyenlet általában különböző tagok összegére bomlik. Két független változó esetén akkor szétválasztható az egyenlet, ha a (49) próbafüggvényt behelyettesítve az egyenlet olyan alakra hozható, ahol minden tag vagy csak az egyik, vagy csak a másik független változótól függ. Ekkor a parciális differenciálegyenlet két közönséges differenciálegyenlet megoldására vezethető vissza. Ezzel általában a diffegyenlet *teljes* megoldását kapjuk meg. A teljes megoldás véges számú szabad paramétert tartalmaz (hasonlóan a közönséges differenciálegyenletek megoldásához), de kevesebbet mond, mint az *általános* megoldás. Az általános megoldást lineáris egyenletek esetében a legtöbbször előállíthatjuk a változók szétválasztásával kapott teljes megoldások ismeretében.

Példa 3 A feladat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{50}$$

Az egyenletnek keressük azt az $u(t,x)$ partikuláris megoldását az $x > 0$ félegyenesen, amelyre

$$u(t,0) = 5\sin(3t) + 2\cos(7t) \tag{51}$$

továbbá u csengjen le a térbeli végtelenben:

$$\lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0 \tag{52}$$

és legyen *minden* $x > 0$-ra időben periodikus a megoldás:

$$u(t,x) = u(t+2\pi, x) \tag{53}$$

. (Itt fejeződik be a feladat kitűzése.)

A megoldás első lépéseként tegyük fel, hogy

$$u(t,x) = T(t)X(x) \tag{54}$$

és helyettesítsük ezt be (50)-be, majd osszunk le $X(x)T(t)$-vel:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{2X'' - X''''}{X} \tag{55}$$

Jól látható, hogy az egyenletet két olyan tagra sikerült felbontani, melyek egyike csak t-től, a másik pedig csak x-től függ. Mivel pedig t, x független változók, ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet egymástól függetlenül *minden* t, x-re, ha a bal és a jobb oldal is egy x, t-től független konstanssal egyenlő:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda \tag{56}$$

$$\frac{2X'' - X''''}{X} = \lambda \tag{57}$$

A felbukkanó λ szám tetszőlegesen választható, de hangsúlyozzuk, hogy (56) és (57) jobb oldalán ugyanannak a számnak kell állnia. Az egyenletek megoldásának alakja gyakran lényegesen függ a λ paraméter előjelétől. Célszerű ezért ezt a paramétert olyan alakban bevezetni, ami tükrözi az általunk használni kívánt előjelet:

$$\lambda = \pm a^2 \tag{58}$$

Hogy a kettő közül melyik előjel kényelmesebb, azt a kezdeti és peremfeltételek határozzák meg. Ebben a példában például a $\lambda = -a^2$ választás (56) szerint a

$$T_a(t) = A^{(a)}\cos(at) + B^{(a)}\sin(at) \tag{59}$$

függvényalakra vezet, míg a $\lambda = +a^2$ választással

$$T_a(t) = A^{(a)}\cosh(at) + B^{(a)}\sinh(at) \tag{60}$$

alakú függvényt kapnánk. (51) alakját figyelembe véve a $\lambda = -a^2$ alak tűnik előnyösebbnek. (Nagy baj a fordított előjel választása esetén sem történne, de akkor imaginárius a értékekkel kéne dolgozni, hogy ki tudjuk elégíteni a peremfeltételt.)

(57)-ből:

$$X'''' - 2X'' - a^2X = 0 \tag{61}$$

Ez egy állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenlet, így keressük a megoldást $X(x) = e^{qx}$ alakban. Ezt (61)-be helyettesítve algebrai egyenletet kapunk q-ra:

$$q^4 - 2q^2 - a^2 = 0 \tag{62}$$

ami egy másodfokú egyenlet q^2-re. Ennek megoldása:

$$q_{1,2}^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4a^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+a^2} \tag{63}$$

ahonnan

$$q_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1+a^2}} \tag{64}$$

A (61) közönséges diffegyenlet általános megoldása tehát:

$$X_a(x) = C^{(a)} e^{x\sqrt{1+\sqrt{1+a^2}}} + D^{(a)} e^{-x\sqrt{1+\sqrt{1+a^2}}} + E^{(a)} e^{x\sqrt{1-\sqrt{1+a^2}}} + F^{(a)} e^{-x\sqrt{1-\sqrt{1+a^2}}} \tag{65}$$

ahol $C^{(a)}, D^{(a)}, E^{(a)}, F^{(a)}$ szabad konstansok (emlékezzünk, az (61) alatti diffegyenlet *negyedrendű* volt, ezért a négy szabad konstans.)

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(x) T_a(t) d\left(a^2\right) \tag{66}$$

A partikuláris megoldáshoz meg kell határozni az $A^{(a)}, B^{(a)}, C^{(a)}, D^{(a)}, E^{(a)}, F^{(a)}$ mennyiségeket, melyekkel (66) teljesíti a peremfeltételeket. Először is vizsgáljuk meg, vannak-e olyanok ezek közül, melyekről tudjuk, hogy minden a-ra nullát kell felvenniük?

(52) következtében, (65)-et szemügyre véve látszik, hogy $C^{(a)}$, $E^{(a)}$ és $F^{(a)}$ is azonosan 0 minden a-ra, mert ha nem így lenne, a megoldás ($C^{(a)}$ esetében) felcsengene, vagy ($E^{(a)}$ és $F^{(a)}$ esetében) oszcillálna, de mindenesetre nem csengene le a végtelenben, szemben a kirótt peremfeltétellel. A keresett megoldás alakja tehát

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(k_1^{(a)} \cos(at) + k_2^{(a)} \sin(at)\right) e^{-x\sqrt{1+\sqrt{1+a^2}}} d\left(a^2\right) \tag{67}$$

Ugyanakkor (53) következtében elég az $a^2 > 0$ értékekre venni az integrált, mert $a^2 < 0$-ra a megoldás nem lenne időben periodikus. Most vessük össze (67)-ot (51)-el! $x = 0$-ban

$$u(t,0) = \int_{0}^{\infty} \left(k_1^{(a)} \cos(at) + k_2^{(a)} \sin(at)\right) d\left(a^2\right) \overset{!}{=} 5\sin(3t) + 2\cos(7t) \tag{68}$$

Az együtthatók összeillesztésével

$$k_1^{(a)} = 2\delta\left(a^2 - 49\right) \tag{69}$$

$$k_2^{(a)} = 5\delta\left(a^2 - 9\right) \tag{70}$$

amit az (67) általános megoldásba visszahelyettesítve:

$$u(t,x) = 2\cos(7t)\, e^{-x\sqrt{1+\sqrt{50}}} + 5\sin(3t)\, e^{-x\sqrt{1+\sqrt{10}}}. \tag{71}$$