Differenciálegyenletek II

Hauszknecht Péter

Ez a jegyzet Pozsgay Balázs konzultációja alapján készült. Ahol tudtam, próbáltam a saját meglátásaim szerint magyarázni. Kicsit szájbarágós, de remélem, ezt majd értékelitek… Inkább vizsgacentrikus, néhol nem teljes az elmélet levezetése; főleg a megoldás módszerein van a hangsúly.

Sok sikert a vizsgához!

Állandók variálásának módszere

Íme egy másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

A jobb oldalon álló inhomogén tagot *forrás*-nak nevezzük.

Az egyenletet most az állandók variálásának módszerével oldjuk meg, mint azt tanultuk elsőrendűeknél. Elsőként válasszuk le a forrást, így kapunk egy homogén diffegyenletet!

$$y'' + py' + qy = 0$$

Ha egy másodrendű, homogén diffegyenletnek van két lineárisan független megoldása: z_1 és z_2, akkor ezek előállítják az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y(x) = A(x)z_1(x) + B(x)z_2(x)$$

Ebből z_1 ismert (Zalán megadja). A z_2 meghatározásához előállítjuk az úgynevezett önadjungált alakot, amely a következőképp néz ki:

$$\left(y' \cdot r(x)\right)' + sy = h$$

Ebből $r(x)$ függvényt kell megtalálnunk. Végezzük el a deriválást!

$$y''r + y'r' + sy = h$$

$$y'' + \frac{r'}{r} y' + \frac{s}{r} y = \frac{h}{r}$$

Innen látszik, hogy

$$p = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{dr}{r} = pdx$$

$$\ln r = \int pdx$$

$$r = e^{\int pdx}$$

A Wronsky-determináns a homogén egyenlet két megoldását és deriváltjait foglalja magába.

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = z_1 z_2' - z_2 z_1'$$

A Wronsky-determináns akkor zérus, ha a két megoldás lineárisan összefügg. Nézzük ezt meg!

$$W = 0$$

$$z_1 z_2' = z_2 z_1'$$

$$\frac{z_1'}{z_1} = \frac{z_2'}{z_2}$$

$$(\ln z_1)' = (\ln z_2)'$$

$$\ln z_1 = \ln z_2 + c$$

$$C = e^c$$

$$z_1 = C z_2$$

Látható, hogy a két megoldás linerárisan összefügg. Ez baj! Annak kell örülni, ha a Wronsky-determináns nem zérus!

Helyettesítsük be a homogén egyenlet két független megoldását az önadjungált alakba, és végezzük el a deriválást!

$$0=\left(z_1'r\right)'+sz_1=z_1''r+z_1'r+sz_1$$

$$0=\left(z_2'r\right)'+sz_2=z_2''r+z_2'r'+sz_2$$

Szorozzuk be a két egyenletet rendre z_2-vel és z_1-gyel, majd vonjuk ki egymásból a kettőt!

$$\left(z_1''z_2-z_2''z_1\right)r+\left(z_1'z_2-z_2'z_1\right)r'=0$$

Rásimerhetünk a két zárojeles kifejezésre, mivel az nem más, mint $-W'$ és $-W$. Így

$$-W'r-Wr'=0$$

Ez pedig

$$\left(Wr\right)'=0$$

egyenletet adja meg. Ebből

$$W=\frac{C}{r}$$

Ezt hívjuk Abel-tételnek, melyet a későbbiek során felhasználunk.

Osszuk el a Wronsky-determinánst z_1^2-tel!

$$\frac{W}{z_1^2}=\frac{z_1z_2'-z_2z_1'}{z_1^2}=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)'$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\int\frac{W}{z_1^2}dx$$

$$z_2=z_1\int\frac{W}{z_1^2}dx=z_1\int\frac{C}{rz_1^2}dx$$

Láthatjuk, hogy ebből már kifejezhető a homogén egyenlet második megoldása, ahol

$$r=e^{\int p\,dx}$$

C-t pedig majd úgy választjuk meg, hogy az kedvező legyen számunkra. Ezt majd a példában látni fogjuk. Ezzel megoldottuk a homogén egyenletet.

Most következik az állandók variálásának módszere. Tudjuk, hogy a homogén egyenlet két megoldása előállítja az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y(x)=A(x)z_1(x)+B(x)z_2(x)$$

A továbbiakban már ezzel az egyenlettel kell foglalkoznunk, hogy eljussunk az általános megoldáshoz. Azonban ehhez be kell vezetnünk egy feltételt. Okosak kitalálták a következőt:

$$A'z_1 + B'z_2 = 0$$

Állítólag ez működik, ezért ezt kell alkalmazni! Deriváljuk az általános megoldást!

$$y = Az_1 + Bz_2$$

$$\downarrow$$

$$y' = A'z_1 + Az_1' + B'z_2 + Bz_2'$$

Alkalmazzuk a feltételünket! Ekkor kapjuk a következő egyenlelet:

$$y' = Az_1' + Bz_2'$$

$$y'' = A'z_1' + Az_1'' + B'z_2' + Bz_2''$$

Behelyettesítünk az eredeti egyenletbe.

$$A'z_1' + Az_1'' + B'z_2' + Bz_2'' + p\left(Az_1' + Bz_2'\right) - q\left(Az_1 + Bz_2\right) = g$$

Csoportosítunk.

$$A'z_1' + B'z_2' + A\left(z_1'' + pz_1' + qz_1\right) + B\left(z_2'' + pz_2' + qz_2\right) = g$$

Láthatjuk, hogy a két zárojeles kifejezés a homogén egyenlet két független megoldása, ami egyenlő zérussal (mivel homogén). Így ez a két tag eltűnik. Marad tehát

$$A'z_1' + B'z_2' = g$$

$$A'z_1 + B'z_2 = 0$$

egyenletrendszer, melynek megoldása: A és B, elvezet az általános megoldáshoz. Írjuk ezt fel egy mátrixegyenletbe!

$$\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$$

Invertáljuk a mátrixot!

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = Z^{-1} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} z_2 & -z_2' \\ -z_1 & z_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-W} \begin{pmatrix} z_2 & -z_2' \\ -z_1 & z_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{W} z_2 g \\ \dfrac{1}{W} z_1 g \end{pmatrix}$$

Tehát

$$A = \int A'\,dx = \int -\frac{1}{W} z_2 g\,dx = -\frac{1}{C}\int r z_2 g\,dx + a$$

$$B = \int B'\,dx = \int \frac{1}{W} z_1 g\,dx = \frac{1}{C}\int r z_1 g\,dx + b$$

Ahol a és b integrálási konstansok. Ebből meghatározhatjuk az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y = Az_1 + Bz_2$$

Összegzés

- Válasszuk le a forrást, így kapunk egy homogén diffegyenletet:

  $$y'' + py' + qy = 0$$

  Ennek egyik megoldását, z_1-et Zalán megadja.
- Innen határozzuk meg z_2-t.

  $$z_2 = z_1 \int \frac{C}{e^{\int p\,dx} z_1^2}\,dx$$

  Használjuk a

  $$\begin{pmatrix} -\frac{1}{W} z_2 g \\ \frac{1}{W} z_1 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$$

  egyenletet. Ebből integtálással eljutunk A-hoz és B-hez.
- Írjuk fel az általános megoldást!

  $$y = Az_1 + Bz_2$$

- Ha kell, illesszünk kezdőfeltételekhez, és írjuk fel a partikuláris megoldást!

Példa

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = x$$

Leválasztjuk a forrást.

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$$

Ennek egyik megoldását Zalán megadja.

$$z_1 = x^2$$

Kiszámolhatjuk z_2-t.

$$p = \frac{1}{x}$$

$$r = e^{\int p\,dx} = x$$

$$z_2 = z_1 \int \frac{C}{e^{\int p\,dx} z_1^2} dx = x^2 \int \frac{C}{x^5} dx = -\frac{C}{4x^2} + \underbrace{const \cdot x^2}_{\text{Legyen 0!}}$$

Legyen $C = -4$! Ekkor

$$z_2 = \frac{1}{x^2}$$

Megoldottuk a homogén egyenletet, hisz rendelkezésünkre áll a két megoldása. Ilyenkor érdemes ellenőrizni ezeket, mielőtt továbbmennénk.

Az eredeti egyenletünk ez volt:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = x$$

Tudjuk, hogy a forrás nélküli homogén egyenlet két megoldása előállítja az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y = Az_1 + Bz_2$$

Az elméleti részben megkaptuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{W} z_2 g \\ \dfrac{1}{W} z_1 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$$

Ebben a példában

$$W = \frac{C}{r} = -\frac{4}{x}$$

$$g = x$$

$$z_1 = x^2 \qquad\qquad z_2 = \frac{1}{x^2}$$

Használjuk őket!

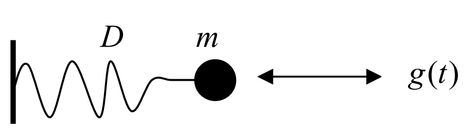
$$A' = \frac{1}{4} \rightarrow A = \frac{1}{4}x + a$$

$$B' = -\frac{1}{4}x^4 \rightarrow B = -\frac{x^5}{20} + b$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x + a\right)x^2 + \left(-\frac{x^5}{20} + b\right)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5}x^3 + ax^2 + \frac{b}{x^2}$$

A Green-függvény bevezetése

Nézzük a következő példát:



Rugóra rögzített testet egy $g(t)$ gerjesztőerő rángat. A mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -Dx + g(t)$$

Legyen $m = 1$ és $D = 1$ az egyszerűség kedvéért, hogy ne kelljen hordozni a számolások során. Így

$$\ddot{x} + x = g(t)$$

Ez egy másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, amit állandók variálásával meg tudunk oldani. Oldjuk is meg! Mivel fizikusok vagyunk, tudjuk, hogy a forrás leválasztásával kapott homogén diffegyenlet egyik független megoldása egy tiszta, szinuszos rezgés.

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$x_1 = \sin t$$

Ahogy már láttuk, x_2-t meghatározhatjuk a következő képlettel:

$$x_2 = x_1 \int \frac{C}{e^{\int p\,dx} x_1^2} dt = \sin t \int \frac{C}{1 \cdot \sin^2 t} dt = C \sin t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) = -C \cos t$$

Legyen $C = -1$! Így

$$x_2 = \cos t$$

Megoldottuk a homogén egyenletet. Ekkor

$$x(t) = A \sin t + B \cos t$$

Használhatnánk ugye a

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{W} z_2 g \\ \frac{1}{W} z_1 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$$

egyenletet. A gyakorlás kedvéért járjuk azonban most végig azt az utat, amit az állandók variálásának elméletében megtettünk.

Ismerjük az okosak által kitalált feltételt:

$$A' \sin t + B' \cos t = 0$$

Továbbá a mozgásegyenletbe behelyettesítve az általános megoldás jelenlegi alakját, megkapjuk a következő egyenletet:

$$A' \cos t + B'(-\sin t) = g(t)$$

Szorozzuk be a két egyenletet rendre $\sin t$-vel és $\cos t$-vel, és vonjuk ki egymásból a kettőt. Ekkor ezt kapjuk:

$$A'(\sin^2 t + \cos^2 t) = g(t) \cos t$$

$$A' = g(t) \cos t \to A = a + \int g(t) \cos t \, dt$$

Most szorozzuk be ugyanazt a két egyenletet rendre $\cos t$-vel és $\sin t$-vel, és ismét vegyük a különbségüket!

$$B'\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = -g(t)\sin t$$

$$B' = -g(t)\sin t \rightarrow B = b - \int g(t)\sin t\, dt$$

Mivel nem ismerjük $g(t)$-t, kénytelenek leszünk az integrálformulákat visszahelyettesíteni az általános megoldásba. Azonban vigyázzunk az integrálási változókkal, ezért bevezetjük t'-t.

$$x(t) = \left(\int_0^t g(t')\cos t'\, dt'\right)\sin t + \left(\int_0^t g(t')\left(-\sin t'\, dt'\right)\right)\cos t$$

$$x(t) = \int_0^t g(t')\left(\cos t' \sin t - \cos t \sin t'\right) dt' = \int_0^t g(t')\sin\left(t - t'\right) dt'$$

Ezt az átalakítást azért tehetjük meg, mert az integrálás szempontjából a vessző nélküli t-s, trigonometrikus függvények konstansok. Az alábbi kifejezést

$$G\left(t, t'\right) = \sin\left(t - t'\right)$$

jelen feladatban Green-függvénynek hívjuk, és azt mondja meg, hogy egy kis lökés hatására, hogy viselkedik a függvény. Ha ezt integráljuk 0-tól t-ig, akkor megkapjuk az időbeli teljes gerjesztőerő által kialakított mozgást leíró egyenletet.

A Dirac-delta az a speciális *tű* alakú függvény, amely mindenhol zérus, kivéve a 0-ban és közvetlen környezetében, ahol kicsi ε a szélessége, és $\frac{1}{\varepsilon}$ a magassága. Tehát az integrálja pontosan 1. A Dirac-delta úgy definiált, hogy ez az ε határértékban tart a nullához, tehát tetszőlegesen kicsinek vehető – mindig annyira, hogy az adott probléma számára elegendő legyen.

A Dirac-delta egy kicsi lökés a rendszerre nézve. Képzeljük el úgy, hogy az előbbi példában a rugót meglökjük egy kis Dirac-deltával t'-ben. Ekkor a rendszer szinuszos rezgésbe jön. Ha mindig meglökjük egy picit úgy, hogy a kis lökésekből egy folytonos gerjesztő, *rángató* erő jöjjön létre (vagyis ezeket a t' helyeket integráljuk a t tengelyre vonatkozólag), akkor kapjuk a rendszert teljes egészében leíró differenciálegyenletet, amely általában így néz ki:

$$y(x) = \int_x G\left(x, \xi\right) h(\xi)\, d\xi$$

Tehát a forrás (mint a rángatást időben leíró függvény) és a Green-függvény (amely megmondja, hogyan reagál a rendszer a rángatásra) integrálja a megoldás. Persze a *rángatás* kifejezés képletes. Általában forrásnak nevezzük, ahogy azt rögtön a jegyzet elején írtam. A forrás lehet akár egy termodinamikus rendszer külső fűtése is, vagy egy elektromos rendszerre rákapcsolt külső feszültség, vagy bármilyen külső potenciál, amely változhat térben és időben egyaránt.

$$\text{RENDSZER VISELKEDÉSE} = \int_{\text{INTERVALLUMRA}}^{\text{VIZSGÁLT}} \text{KICSI REAKCIÓ} \cdot \text{KICSI HATÁS}$$

Ebben a *képletes* képtletben a hatás, mint forrás jelenik meg, a reakció pedig, mint Green-függvény. A vizsgált intervallum lehet térben vagy időben.

A szemléltetés kedvéért képzeljünk el egy húrt, ami a szél hatására kitér helyzetéből, felvesz valamilyen alakot. Minden kicsi darabra megnézzük: ha ott egy kis szél fúj, akkor milyen alakot vesz fel az egész húr. Ugyanezt megcsináljuk az egész húrra. Ezt jelenti a ξ szerinti integrálás. Húr esetében azonban peremfeltételek is vannak.

Peremfeltételek beágyazása a Green-függvénybe

Egy differenciálegyenletet két fajta feltételhez illeszthetünk. Kezdőérték megadásakor megmondjuk, hogy egy adott pillanatban, hogy viselkedik a függvény. Ez a görbeseregből kiválaszt egy függvényt. A kezdőérték nem befolyásolja a függvény milyenségét. Ellenben, egy rendszert leíró diffegyenlet módosul, ha megmondjuk, hogy viselkedik a rendszer bizonyos határokon. Peremértékproblémák megoldására használható a Green-függvény. Ez beépül a mozgás- vagy pályaegyenlet integrálformulájába, és eszerint kell majd integrálni.

Vegyünk egy közönséges, másodrendű, függvényegyütthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenletet:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

A peremfeltételek adottak.

$$y(a) = y_1$$

$$y(b) = y_2$$

A homogén egyenlet egyik megoldása is adott.

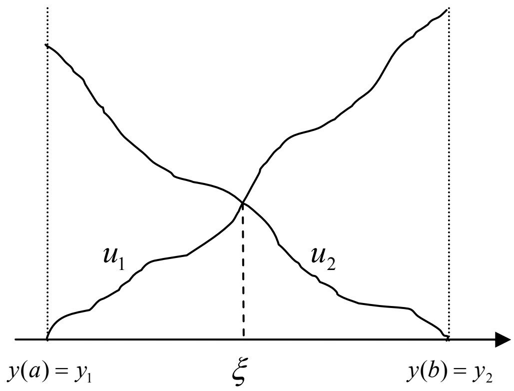
$$z_1 = \text{valami}$$

Állítsuk elő az önadjungált alakját!

$$\left(r(x)y'(x)\right)' + s(x)y(x) = h(x)$$

Ahol, mint tudjuk

$$r(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$



Legyen $u_1(x)$ és $u_2(x)$ a homogén egyenlet megoldásai, és állítsuk elő ezeket $z_1(x)$ és $z_2(x)$ lineáris kombinációjaként úgy, hogy a két u-t a két peremfeltételhez illesztjük. Ezt úgy kell elképzelni, hogy u_1 az egyik peremfeltételhez, u_2 a másik peremfeltételhez igazított.

Az ábrán az látszik, hogy a két u-kat külön-külön igazítottuk a két peremfeltételhez, majd ennek a kettőnek az összegéből (szuperpozíciójából) áll elő az általános megoldás.

Könnyű belezavarodni ebbe a sok partikuláris megoldásba: z_1, z_2, u_1, u_2. Ugyan mindegyik megoldása a homogén egyenletnek, de ebből z_1 és z_2 nincs a peremfeltételekhez illesztve. Ezért z_1- és z_2-ből elkészítjük u_1 és u_2 függvényeket úgy, hogy a lineáris együtthatók megválasztásakor figyelembe vesszük a peremfeltételeket. Ezt hívják úgy, hogy áttérünk egy másik megoldásbázisra. Mivel lineáris az egyenlet, ezért nyugodtan játszhatunk a partikuláris megoldásokkal, mert tudjuk, hogy ezek összege úgyis előállítja majd az általános megoldást, ha jól választjuk meg az együtthatókat. Az együtthatók megválasztása pedig mindig kezdő- vagy peremfeltétel alapján történik. Akár lehet mindkettő is.

$$z_2 = z_1 \int \frac{C}{r(x) z_1^2}\, dx$$

$$u_1 = Az_1 + Bz_2 \qquad u_1(a) = y_1$$

$$u_2 = Cz_1 + Dz_2 \qquad u_2(b) = y_2$$

Ebből a négy egyenletből meghatározzuk A, B, C, D-t. Majd fel is írhatjuk u_1-et és u_2-t.

Jelen levezetés olyan esetre vonatkozik, amikor a peremfeltételek deriváltakban nem jelennek meg. Ha Zalán mégis ilyet ad, akkor se ijedjünk meg; deriváljunk nyugodtan *ízlésünk szerint*, és oldjuk meg az egyenletrendszert.

A Green-függvény általános esetben

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)} & x < \xi \\[2ex] \dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)} & x > \xi \end{cases}$$

A Wronsky-determináns itt

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \frac{C}{r}$$

A félreértések elkerülése végett a determinánsban és a mögötte álló C nem ugyanaz! A determinánsban szereplő az állandók variálásából származó együttható, míg a külső C a z_2 meghatározásánál előkerülő konstans.

A megoldás pedig

$$y(x)=\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi$$

Összegzés

- Meghatározzuk $r(x)$-et, majd beszorozzuk vele az egyenletünket, így megkapjuk az önadjungált alakot. Jegyezzük meg $h(x)$-et, mert később szükségünk lesz rá!

$$\left(r(x)y'(x)\right)'+s(x)y(x)=h(x)$$

- Adott z_1 állítsuk elő z_2 t.

$$z_2=z_1\int\frac{C}{r(x)z_1^2}\,dx$$

- z_1 és z_2 lineáris kombinációjaként állítsuk elő u_1-et és u_2-t úgy, hogy felhasználjuk a peremfeltételeinket. Ezekből meghatározzuk A,B,C,D-t, majd felírjuk u_1-et és u_2-t.

$$u_1=Az_1+Bz_2 \qquad u_1(a)=y_1$$

$$u_2=Cz_1+Dz_2 \qquad u_2(b)=y_2$$

- Írjuk fel a megoldást!

$$y(x)=\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi$$

Példa

$$\left(x^2-1\right)y''-2xy'+2y=\left(x^2-1\right)^3$$

$$y(1)=0 \qquad y(2)=0$$

$$z_1=x$$

Osszunk le $\left(x^2-1\right)$-gyel!

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = \left(x^2-1\right)^2$$

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2-1}$$

$$r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = \frac{1}{x^2-1}$$

Az önadjungált alakot úgy kapjuk, hogy $r(x)$ -szel beszorozzuk az egyenletet.

$$\left(y'\frac{1}{x^2-1}\right)' + \frac{2}{\left(x^2-1\right)^2}y = x^2-1$$

Ebből

$$h(x) = x^2-1$$

Határozzuk meg z_2 -t!

$$z_2 = z_1\int\frac{C}{r(x)z_1^2}dx = Cx\int\frac{x^2-1}{x^2} = Cx\int 1-\frac{1}{x^2} = Cx^2+1 = \left(C\equiv 1\right) = x^2+1$$

Írjuk fel u_1 -et és u_2 -t z_1 és z_2 lineáris kombinációjaként.
Legyen $u_1(1)=0$ és $u_2(1)=0$ (behelyettesítettük a peremfeltételeket).

$$u_1 = Az_1 + Bz_2$$

$$0 = A\cdot 1 + B\left(1^2+1\right)$$

$$A = -2 \qquad\qquad B = 1$$

$$u_2 = Cz_1 + Dz_2$$

$$0 = C\cdot 2 + D\left(2^2+1\right)$$

$$C = -5 \qquad\qquad D = 2$$

Tehát

$$u_1 = -2x + x^2 + 1 = \left(x-1\right)^2$$

$$u_2 = -5x + 2\left(x^2+1\right)$$

$$W=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\frac{C}{r}$$

$$r(\xi)W(\xi)=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\cdot r\cdot\frac{C}{r}=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}C=1$$

Írjuk fel a Green-függvényt!

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}=(x-1)^2\left[2\left(\xi^2+1\right)-5\xi\right] & x<\xi \\ \dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}=\left[2\left(x^2+1\right)-5x\right](\xi-1)^2 & x>\xi \end{cases}$$

Az általános megoldás

$$y(x)=\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}h(\xi)\,d\xi=$$

$$=(x-1)^2\int_1^x\left[2\left(\xi^2+1\right)-5\xi\right]\left(\xi^2-1\right)d\xi+\left[2\left(x^2+1\right)-5x\right]\int_x^2(\xi-1)^2\left(\xi^2-1\right)d\xi=\ldots$$

Ezt persze ki lehet és ki kell integrálni. Rád bízom…

Parciális differenciálegyenletek

Egy kétváltozós parciális diffegyenlet általános alakja

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

Három – természetben gyakran elődorduló – fajtáját különböztetjük meg.

Elliptikus: $u''+\ddot{u}=h(x,t)$

Hiperbolikus: $u''-\ddot{u}=h(x,t)$

Parabolikus: $u''+\dot{u}=h(x,t)$

Az elnevezések a deriváltak különféle szereplésére utalnak az egyenletben.

A rezgő húr differenciálegyenlete

A Bolyaiban megtalálható az egyenlet felírásának lépései. Azt átugorva, az l hosszúságú rezgő húr differenciálegyenlete

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ahol c^2 konstans. Ez egy homogén hiperbolikus differenciálegyenlet.

Tudjuk, hogy vannak kezdő- és peremfeltételeink. Megadhatjuk a húr alakját a $t = 0$-ban egy $f(x)$ függvénnyel.

$$u(x,0) = f(x)$$

A húr pontjainak sebessége a $t = 0$-ban:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

A húr két vége le van rögzítve, ezért azok minden időpillanatban az $u = 0$-án állnak.

$$u(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = 0$$

A Bernoulli-féle megoldás azon alapszik, hogy a keresett függvényt olyan szorzat alakban kell keresni, melynek egyik tényezője csak x-től, másik tényezője pedig csak t-től függ.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Helyettesítsük ezt vissza az eredeti egyenletbe! Ekkor a következőket kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X\dot{T}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\ddot{T}$$

Tehát

$$X\ddot{T} = c^2 X'' T$$

Az egyenlet változói szétválaszthatók

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X}$$

Ezt a parciális differenciálegyenletet egy olyan 3 dimenziós koordinátarendszerben képezhetjük le, amelynek két vízszintes koordinátája x és t. Értékkészletük azonban egy konstans síkon helyezkedik el. Ez akkor lehetséges, ha az egyenlet jobb oldala csak x-től, baloldala pedig csak t-től függ. Mivel mindkét oldal konstans és egyenlőek, ezért bevezetjük a következő konstanst:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

Amiből

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\alpha^2$$

$$c^2 \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

Ezzel a parciális diffegyenletet visszavezettük két közönséges, másodrendű diffegyenletre.

$$\ddot{T} + \alpha^2 T = 0$$

$$X'' + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X = 0$$

Az első egyenlet általános megoldása

$$T(t) = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t$$

Míg a másik egyenlet általános megoldása

$$X(x) = C\cos\frac{\alpha}{c}x + D\sin\frac{\alpha}{c}x$$

Így ezek alapján felirhatjuk az $u(x,t)$ függvényt.

$$u(x,t) = T(t)X(x) = (A\sin\alpha t + B\cos\alpha t)\left(C\cos\frac{\alpha}{c}x + D\sin\frac{\alpha}{c}x\right)$$

ahol α, A, B, C, D ismeretlen állandók. Ezek meghatározása a kezdő- és peremfeltételek alapján történik.

$$u(0,t)=0$$

$$\left(A\sin\alpha t + B\cos\alpha t\right)C = 0$$

Ami tetszőleges t esetén csak úgy lehetséges, ha $C=0$.

$$u(l,t)=0$$

$$\left(A\sin\alpha t + B\cos\alpha t\right)\left(D\sin\frac{\alpha}{c}l\right)=0$$

Mivel D nem lehet 0, ha már a C is az, mert akkor a megoldás is azonos lenne 0-val.

$$\sin\frac{\alpha}{c}l=0$$

$$\frac{\alpha}{c}l=k\pi \qquad k=1,2,3,...$$

k nem lehet 0, mert akkor α is az kell, hogy legyen. Végül meghatározhatjuk α -t.

$$\alpha_k=\frac{kc\pi}{l}$$

Most már így néz ki a megoldásfüggvény:

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t\right)D_k\sin\frac{\alpha_k}{c}x$$

Láthatjuk, hogy minden k -hoz tartozik egy-egy partikuláris megoldás. Tudjuk, hogy a homogén diffegyenlet partikuláris megoldásainak összege is megoldás.

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t\right)D_k\sin\frac{\alpha_k}{c}x$$

Végezzük el a szorzást, és legyen $A_kD_k=E_k$ és $B_kD_k=F_k$!

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\left(\cos\alpha_k t\right)\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)+F_k\left(\sin\alpha_k t\right)\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)$$

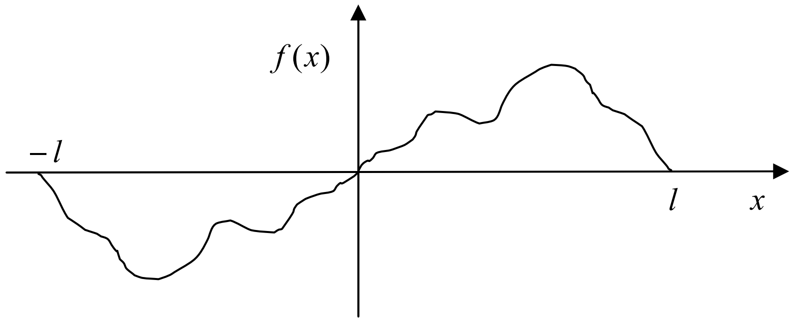
Még nem használtuk fel az $U(x,0) = f(x)$ kezdőfeltételt. Ennek értelmében:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{\alpha_k}{c} x = f(x)$$

α_k -t behelyettesítve

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x)$$

Hogy meghatározzuk az E_k együtthatókat, Fourier-sorba fejtjük $f(x)$-et. Hogy abban ne legyen koszinuszos tag, ezért $f(x)$-et, mint páratlan függvényt fejtjük sorba. Ez akkor lehetséges, ha a $2l$ szerint periodikus függvényt $-l$-től $+l$-ig vizsgáljuk, mivel nem garantált, hogy a húr rezgése szimmetrikus. De két ugyanolyan húr, ugyanolyan kezdőfeltétellel egymás mellett már szimmetrikus. Páratlanul szimmetrikus pedig akkor lesz, ha az egyik húrt a *feje tetejére állítjuk* olyan értelemben, hogy kitérése pont ellentétes legyen. Ez persze teljesen önkényes és ártatlan; a megoldás nem fog ettől torzulni.



Például ugyanezt csináljuk Fourier-transzformáció esetén is, amikor azt mondjuk, hogy a vizsgált objektum végtelen távol ismétlődjön meg mégegyszer, mivel csak periodikus függvényeket lehet Fourier-sorba fejteni. Ha pedig végtelen távol van, az minket nem zavar. (Fourier-transzformációnál nem kell, hogy periodikus legyen – pontosan az előbb említett elv miatt). Jelen esetben nincs végtelen távol, de nem baj, mert mi a húrnak csak a $[0,l]$ szakaszára vagyunk kíváncsiak. Az pedig, hogy mellette pl a $[-l,0]$ tartományon mi történik teljesen mindegy. Ezért tehetjük meg, hogy páratlan függvényként fejtjük sorba $f(x)$-et:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

Ekkor $E_k = b_k$

Hasonló módon határozhatjuk meg F_k együtthatókat is. Tudjuk, hogy

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

Deriváljuk az $U(x,t)$ megoldást t szerint és helyettesítsük a kezdőfeltételt.

$$\left.\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k \sin\frac{k\pi}{l}x = g(x)$$

Terjesszük ki $g(x)$-et is a fent leírt módon, majd fejtsük Fourier-sorba:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

Összevetve a két egyenletet láthatjuk, hogy

$$F_k = \frac{G_k}{\alpha_k}$$

Meghatároztuk az összes együtthatót, megoldottuk a differenciálegyenletet, melyet Fourier-sor alakban hagyhatunk:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k(\cos\alpha_k t)\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right) + F_k(\sin\alpha_k t)\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)$$

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l}$$

$$E_k = b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$F_k = \frac{G_k}{\alpha_k} = \frac{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx}{\alpha_k}$$

Példát sajnos nem tudok írni. A vizsgán ugyanezeken a lépéseken kell végigmenni. Adott lesz c és l, de az nem garantált, hogy a peremfeltételek 0-val lesznek egyenlőek. Ezeknek az alkalmazására nincs általános módszer. Általában a szinuszokkal és koszinuszokkal kell babrálni. Továbbá tudjuk, hogy az e^x 0-ban 1. Ezek fognak elvezetni a megoldáshoz.

Ugyanígy adott lesz $f(x)$ és $g(x)$. Ha a megoldás szinuszos, akkor páratlanul kell Fourier-sorba fejteni (vagyis $[-l,l]$ intervallumon), ha pedig koszinuszos, akkor párosan ($[0,2l]$intervallumon). Tehát a Fourier-sorban az integrálási határokat így választjuk meg.

A hővezetés differenciálegyenlete

Vegyünk egy l hosszúságú rudat, melynek csak x irányban van kiterjedése $[0,l]$ szakaszon. A rúd két végpontját tartsuk állandó $0°C$ hőmérsékleten. A kezdeti hőmérséklet-eloszlást leíró függvény: $f(x)$.

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(l,t)=0$$

A hővezetést leíró diffegyenlet pedig

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ahol c anyagi minőségtől függő állandó. Látható, hogy ez egy parabolikus diffegyenlet. Megjegyzésképpen: azért van csak egy kezdeti feltételünk, mert az egyenletben u-nak t szerint csak elsőrendű deriváltja van.

Megint bontsuk fel a megoldást egy x-től és egy t-től függő szorzatra!

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

Ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X\dot{T}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T$$

Ezt visszahelyettesítve a diffegyenletbe

$$X\dot{T}=c^2X''T$$

Az egyenlet változói szétválaszthatók.

$$\frac{\dot{T}}{T}=c^2\frac{X''}{X}$$

Az állítás igaz itt is, hogy a két oldal külön-külön konstans értékű, hisz más-más változótól függenek, mégis egyenlőek. Szintén bevezetjük a következő jelölést:

$$\frac{\dot{T}}{T}=c^2\frac{X''}{X}=-\alpha^2$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\alpha^2$$

$$c^2 \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

Szétválasztottuk a parciális differenciálegyenletet egy közönséges elsőrendű és egy közönséges másodrendű diffegyenletre.

$$\dot{T} + \alpha^2 T = 0$$

$$X'' + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X = 0$$

Az első egyenlet megoldása

$$T = Ae^{-\alpha^2 t}$$

Míg a másodiké

$$X = B\cos\frac{\alpha}{c}x + C\sin\frac{\alpha}{c}x$$

Tehát

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \left(B\cos\frac{\alpha}{c}x + C\sin\frac{\alpha}{c}x\right)Ae^{-\alpha^2 t} = \left(D\cos\frac{\alpha}{c}x + E\sin\frac{\alpha}{c}x\right)e^{-\alpha^2 t}$$

D, E illetve α ismeretlen állandók, melyeket a kezdeti feltételből határozhatunk meg.
Mivel $u(0,t) = 0$, ezért:

$$De^{-\alpha^2 t} = 0$$

Ebből pedig $D = 0$.
Mivel $u(0,t) = 0$ és $D = 0$, ezért

$$E\left(\sin\frac{\alpha}{c}l\right)e^{-\alpha^2 t} = 0$$

E azért nem lehet 0, mert akkor a megoldás is azonosan 0 lenne, ahogy ezt a húrnál is említettem.

$$\sin\frac{\alpha}{c}l = 0$$

tehát

$$\frac{\alpha}{c}l = k\pi$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi c}{l}$$

k megint csak nem lehet 0, mert akkor α is 0 volna.

A feltételeket kielégítő partikuláris megoldások tehát

$$u_k(x,t) = E_k\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)e^{-\alpha_k^2 t} \qquad k = 1,2,3,...$$

Mivel a differenciálegyenlet homogén, ezért a partikuláris megoldások összege is megoldás.

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)e^{-\alpha_k^2 t}$$

Ne feledkezzünk meg az $u(x,0) = f(x)$ kezdeti feltételről, melyből megadhatóak E_k együtthatók.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

$f(x)$-et pedig a fent leírt módon Fourier-sorba fejthetjük, mint páratlan függvényt, és akkor csak tiszta szinuszos sort kapunk.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

Ebből következik, hogy

$$E_k = b_k$$

Meghatároztuk az összes együtthatót, így a megoldás

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)e^{-\alpha_k^2 t}$$

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l} \qquad\qquad E_k = b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$