Eötvös Loránd Tudományegyetem

Differenciálegyenletek II

Előadás 2012/2013

Szerző:
Vida Ádám
Molnár Dávid

Oktató:
Nógrádi Dániel

Tartalomjegyzék

1. Első előadás **2**

1.1. Másodrendű közönséges differenciálegyenletek . . . 2

1.2. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek . . . 4

1.2.1. X-től független . . . 4

1.2.2. Y-tól függelten . . . 4

1.2.3. Példán keresztül . . . 5

1.3. Másodrendű, lineáris, közönséges differenciálegyenletek . . . 6

2. Második előadás **7**

2.1. Ismert partikuláris megoldás . . . 8

2.1.1. Példán keresztül . . . 10

2.2. Másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet . . . 11

3. Harmadik előadás **13**

3.1. Green-függvény . . . 13

3.1.1. Példán keresztül . . . 17

4. Negyedik előadás **19**

4.1. Green függvény további tulajdonságai . . . 19

4.1.1. Derivált folytonosságok . . . 19

4.2. Euler-féle differenciálegyenletek . . . 22

4.2.1. Homogén eset . . . 22

4.3. Másodrendű, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek megoldása sorfejtéssel . . . 24

5. Ötödik előadás **26**

5.1. Speciális függvények . . . 26

5.1.1. Bessel-függvények . . . 26

6. Hatodik előadás **32**

6.1. Állandó együtthatós, homogén, lineáris, n-ed rendű differenciálegyenletek . . . 32

6.1.1. Tulajdonságok . . . 32

6.2. Megoldás paraméteresen . . . 33

6.3. Elsőrendű, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerek 36

6.3.1. Példán keresztül . . . 38

7. Hetedik előadás **40**

7.1. Degenerált esetektől eltekintve . . . 41

7.1.1. 2 dimenziós példák . . . 43

7.1.2. Például . . . 44

8. Nyolcadik előadás **45**
8.1. Emlékeztető . . . 45
8.2. Kétparaméteres görbesereg . . . 46
8.2.1. Görbeseregből a differenciálegyenlet felé . . . 46
8.2.2. Példán keresztül . . . 46
8.2.3. Egy általánosabb példán keresztül . . . 47
8.2.4. Példa: nemlineáris eset . . . 48
8.3. Parciális differenciálegyenletek . . . 48
8.3.1. Elsőrendű parciális differenciálegyenlet . . . 48
8.3.2. Karakterisztikák módszere . . . 49

9. Kilencedik előadás **50**
9.1. Folytatás: parciális differenciálegyenletek, kvázi lineáris eset . . . 50
9.1.1. Megoldási módszerek . . . 52
9.1.2. Tanulságok a kvázilineáris helyzetből . . . 54
9.1.3. Példán keresztül . . . 54

10. Tizedik előadás **57**
10.1. Szétválasztható parciális differenciálegyenletek . . . 57
10.1.1. Példa 1 . . . 58
10.1.2. Második példa - hővezetés . . . 59
10.1.3. Harmadik példa . . . 61
10.1.4. 2D Laplace-egyenlet . . . 61

1. Első előadás

A tavalyi előadás ismereteit felelevenítve átismételjük az egyszerűbb differenciálegyenletek megoldásmenetét.

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek. Az $y(x)$ ismeretlen függvény, $F(y', y, x) = 0$ az implicit alak. Ha $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ egy tartományon, akkor $y' = f(x, y)$ az explicit alak. Ez a megoldás általában egy szabad paramétert tartalmaz. Azt a megoldást keressük, ami kielégíti a kezdeti feltételt (ha van). Tehát az általános megoldás: van szabad paraméter, partikuláris megoldás: nincs szabad paraméter (kezdeti feltétel).

Magasabb rendű differenciálegyenletek. Ismeretlen $y(x)$, az $F(y^n, y^{n-1}, ..., y'', y', y, x) = 0$ implicit alakú, n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet. Ha $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ egy tartományon, akkor $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, ..., y, x)$ explicit alakú n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet. A félév során főleg $n = 2$ esetekkel foglalkozunk.

1.1. Másodrendű közönséges differenciálegyenletek

$F(y'', y', y, x) = 0$, ahol az $y(x)$ valós értékű függvénye a valós x-nek. Az explicit alak ismét a szokásos módon alakul: $y'' = f(y', y, x)$, mi pedig ezt szeretjük, ezért ezzel fogunk foglalkozni. Vegyük észre, hogy

$$y_1(x) = y(x)$$

$$y_2(x) = y'(x)$$

ebből pedig

$$y'' = y_2' = f(y_2, y_1, x)$$
$$y_1' = y_2$$

Természetszerűen adódik a tény, hogy egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet ekvivalens egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel.

$$y'' = f(y', y, x) \sim y_1' = f(y_2, y_1, x), y_2' = y_1$$

Korábbról tudjuk, hogy az elsőrendű közönséges differenciálegyenleteknél a megoldásban előjön egy szabad paraméter $y(x, c)$. Ezt a kezdeti értékkel tudjuk lefixálni: $y(x_0) = y_0$. Ha elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerről beszélünk két függvényre, akkor az általános megoldás tartalmazni fog két szabad paramétert $y_1(x, c_1, c_2)$ és $y_2(x, c_1, c_2)$. Másodrendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldásában is lesz két szabad paraméter. Nézzük meg hogy néznek ki a kezdeti feltételek!

- Elsőrendű egyenletrendszer:
$$y_1(x_0) = y_{10}$$
$$y_2(x_0) = y_{20}$$

- Másodrendű egyenlet:
$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = v_0$$

Magasabb rendű egyenleteknél a szabad paraméterek fixálására több módszer van. Megtárgyaljuk a kezdeti érték problémát és a peremérték problémát is.

- Kezdeti érték: Adott a differenciálegyenlet $y'' = f(y', y, x)$, valamint a kezdeti értékre $y(x_0) = y_0$ és $y'(x_0) = v_0$. Ez grafikusan úgy értelmezhető, hogy megadunk egy pontot a függvény menetéből és az adott pontban az érintő meredekségét.

- Peremérték probléma: $y'' = f(y', y, x)$, valamint $y(x_0) = y_0$ és $y(x_1) = y_1$. Itt arról van szó, hogy az x_0 pontban megadom a függvényértéket, de nem mondok semmit a meredekségről, cserébe kikötök egy újabb pontot, az x_1 értéknél, a függvénynek pedig át kell haladnia ezen. A végtelen megoldás közül ez választja ki azt, ami nekünk kell.

Kezdeti érték feladat megoldásának létezése és egyértelműsége. Az $y'' = f(y', y, x)$ explicit alakú egyenlet megoldása létezik[1] és egyértelmű, ha az f függvény elég sima, illetve az y és y' szerinti parciális deriváltjai is elég simák.

Tétel. Ha $f(y', y, x)$ az (y', y, x) változóknak folytonos függvénye egy $|x - x_0| < A$, $|y - y_0| < B$, $|y' - y'_0| < C$ tartományon az (x_0, y_0, y'_0) pont körül és ugyanitt még az is igaz, hogy $|f(y', y, x)| < M$ és $|f(y', y, x) - f(y'_2, y_2, x)| < K(|y_1 - y_2| + |y'_1 - y'_2|)$ valamilyen M, K számokkal, továbbá (a,b,c) olyanok, hogy $a < A, b < B, c < C$ és $b > aM, c > sM$, akkor az $|x - x_0| < a$ tartományon a kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

[1] $y(x_0) = y_0$ és $y'(x_0) = y'_0$ kezdeti feltételek mellett.

Megjegyzés: Az előző csak a kezdeti érték problémára vonatkozik mert ez egy lokális probléma, szemben a peremértékkel, ami globális és ezért igaz általában, hogy sokkal nehezebb megoldani. Vegyünk például egy gömböt. Két pont között szeretnék mozogni a legrövidebb úton. A válasz egyszerű, egy geodetikus mentén kell mozognom, amit a kezdeti érték problémával könnyen meg is tudok oldani, a megoldás pedig egyértelmű. Megmondom honnan indulok és milyen meredekséggel teszem és kész. A peremértékkel nagyon nehéz, mert például ha a két pont nem átellenes pontban van, akkor létezik megoldás, de kettő. Ha átellenesből indulok ki, akkor létezik megoldás, de végtelen sok.

1.2. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Az általános egyenlet $y'' = f(y', y, x)$. Több eset van, attól függően, hogy melyik változótól lesz független az egyenlet. Menjünk végig rajtuk!

1.2.1. X-től független

$y'' = f(y', y)$. Legyen $y' = p(y)$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}p^2$$

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$$

Ez egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet a $p(y)$ ismeretlen függvényre. Általános megoldása $p(y,c)$ alakú.

$$\frac{dy}{dx} = y' = p(y, c_1)$$

Ez szétválasztható típusú, elsőrendű egyenlet.

$$\int \frac{dy}{p(y,c_1)} = \int dx$$

Az integrált elvégezve

$$\Phi(y, c_1) = x + c_2$$

eredményre jutunk, ahol Φ az integrál eredménye. A megoldás y-ra nézve implicit, általános megoldás és van benne két szabad paraméter.

1.2.2. Y-tól függelten

$y'' = f(x, y')$, továbbá legyen $y'(x) = v(x)$. Vegyük észre, hogy itt már az x függvényének tekintem v-t (tehát y-t is).

$$y'' = v' = f(x, v)$$

Ez egy elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet. Tegyük fel, hogy megtaláltuk a megoldást, azaz van egy $v(x, c_1)$.

$$v(x, c_1) = y'$$

Ez integrálva ide jutunk:

$$y(x) = \int v(x, c_1)dx + c_2$$

Ez explicit alakú, két szabad paraméterrel.

1.2.3. Példán keresztül

Vegyük az $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ explicit alakú, másodrendű, közönséges differenciálegyenletet. Ez nem függ sem x-től, sem y-tól, ezért mindkét tanult módszerrel megoldható. Nézzük meg mindkettővel, hisz ugyanolyan eredményt kellene kapnunk.

Első módszer (x-től nem függ). Az egyenlet alakja tehát $p(y) = y'(y)$.

$$y'' = p\frac{dp}{dy} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dy}p^2 = \sqrt{1 + p^2}$$

Itt helyettesítünk egyet: $p^2(y) = u$.

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dy} = \sqrt{1 + u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{1 + u}} = dy$$

$$\sqrt{1 + u} = y + c_1$$

$$1 + u = (y + c_1)^2$$

$$u = (y + c_1)^2 - 1$$

$$p^2 = (y + c_1)^2 - 1$$

$$p(y) = \sqrt{(y + c_1)^2 - 1}$$

Ekkor azonban eszünkbe jut, hogy $p = y'$, ezért megyünk tovább,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y + c_1)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y + c_1)^2 - 1}} = dx$$

Ezt kiintegráljuk és bevezetünk egy helyettesítést, hogy jobban észrevehessük a hasonlóságokat, szóval $y + c_1 = z$ és most integrálunk

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int dx$$

$$Arch(z) = x + c_2$$

$$z = ch(x + c_2)$$

$$y + c_1 = ch(x + c_2)$$

A vége pedig:

$$y(x) = ch(x + c_2) - c_1$$

Most nézzük meg, hogyan alkalmazzuk itt a peremérték problémát! Legyen $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$. Ezzel $y(\pm a) = ch(\pm a + c_2) - c_1 = 0$

$$ch(c_2 - a) = c_1$$

$$ch(c_2 + a) = c_1$$

Ebből pedig $c_2 = 0$ és $c_1 = ch(a)$. A partikuláris megoldás, ami eleget tesz a peremfeltételnek:

$$y(x) = ch(x) - ch(a)$$

Nem más ez, mint a láncgörbe!

Második módszer (y-tól nem függ). $y'' = \sqrt{1 + y'^2} = f(x, y')$, $y' = v(x)$, $v' = \sqrt{1 + v^2}$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int dx$$

$$Arsh(v) = x + c_1$$

$$v = sh(x + c_1)$$

$$y' = sh(x + c_1)$$

$$y = ch(x + c_1) + c_2$$

Ez az általános megoldás két szabad paraméterrel. Ugyanaz, mint az előző módon.

1.3. Másodrendű, lineáris, közönséges differenciálegyenletek

Emlékeztetőül letisztázzuk az elsőrendűt: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Az egyenlet lineáris y, y', y''-ben, ha

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y(x) = d(x)$$

ahol $a(x), b(x), c(x), d(x)$ adott függvények. Ha $a(x) \neq 0$, egyszerűbb alakhoz jutunk:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Homogén esetben az $r(x) = 0$, míg inhomogén esetben $r(x) \neq 0$. Tárgyaljuk meg a homogén esetet:

$$y'' + py' + qy = 0$$

általános megoldásában előjön két konstans (c_1, c_2)

- Ha y megoldás, akkor λy is megoldás, minden $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Ha y_1, y_2 megoldás, akkor $y_1 + y_2$ is megoldás.

Az általános megoldás tehát a következő:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = y(x)$$

2. Második előadás

Folytattuk azt, amit az első órán félbehagytunk, így én is ezt teszem! A c_1 és c_2 szintén lineárisan szerepel az általános megoldásban. Mivel $y_1 = y_2$ esetben $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 + c_2) y_1$, nem is maradna meg a két konstans, kell, hogy legyen valami függetlenségi feltétel, hogy általános megoldást kapjunk.

Definíció: Az egyenlet két megoldását alapmegoldásnak nevezzük, ha (y_1,y_2) olyan, hogy $\left| \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \right| \neq 0$. Ezt a dolgot nevezzük Wronski-determinánsnak.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Megjegyzések:

- Ha $y_2 = y_1$
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = 0$$
Tehát jól méri azt, hogy nem függenek össze.
- Ha a mátrix oszlopai lineárisan függetlenek $\Longleftrightarrow$ determináns nem nulla.

Állítás: Ha a másodrendű, homogén, lineáris, közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása y_1, y_2, akkor az általános megoldás $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Felmerül a kérdés, hogy lehet-e tetszőleges kezdeti feltételhez találni tetszőleges c_1, c_2-t, adott y_1, y_2 függvények mellett, mely ráadásul alapmegoldást is képez? Nézzük példán! A kezdeti feltételeink: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. Keressük meg azokat a c_1, c_2 számokat úgy, hogy az ebből kapott megoldás kielégítse a kezdeti feltételt.

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0'$$

Írjuk fel ezt mátrixos alakban!

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Hogy ezt meg tudjuk oldani, invertálnunk kell a mátrixot!

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_0)} \begin{pmatrix} y_2'(x_0) & -y_2(x_0) \\ -y_1'(x_0) & y_1(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Az invertálás miatt kell a determinánssal osztani a jobb oldalon, ami pont a Wronski-determináns az x_0 pontban. Az inverz a jobb oldalon pontosan akkor létezik, ha ez a determináns nem nulla. Tehát, ha y_1, y_2 alapmegoldás, akkor a Wronski nem nulla, tehát a c_1, c_2-re van megoldás.

$$c_1 = \frac{y_2'(x_0)y_0 - y_2(x_0)y_0'}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'}$$

$$c_2 = \frac{y_1(x_0)y_0' - y_1'(x_0)y_0}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'}$$

$$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x) = y_0\frac{y_1(x)y_2(x_0) - y_2(x)y_1'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}+y_0'\frac{y_2(x)y_1(x_0) - y_1(x)y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}$$

Megjegyezés: Ha y_1, y_2 adott volt, akkor mindennel készen vagyunk. Nekünk azonban most ez nem elég, mert nincsenek meg ezek a függvények, meg kell találni őket. Ez egy nehéz és nagyon sokszor megoldhatatlan feladat, nincs rá általános megoldás. Vannak azonban esetek, mikor mégis sikerül megcsinálni. Vegyük sorra az ilyeneket.

2.1. Ismert partikuláris megoldás

Ha ismert a homogén egyenlet egy partikuláris megoldása (y_1), akkor az alaprendszer meghatározható a Wronski-determináns segítségével (y_2).

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$$

Ez kielégít egy egyszerű differenciálegyenletet:

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' =$$

Itt kihasználjuk, hogy y_1, y_2 megoldás, tehát:$y_{1,2}'' + py_{1,2}' + qy_{1,2} = 0$, a fenti egyenlet tehát a következőképpen alakul:

$$= y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) = ... = -pW$$

A Wronski-determináns tehát kielégít egy elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenleletet:

$$W' + pW = 0$$

$$\frac{dW}{dx} + pW = 0$$

Ezt kiintegrálva pedig

$$lnW = -\int p(x)dx + lnC_1$$

$$W(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Bejön tehát egy tetszőleges konstans. Most pedig használjuk a Wronski-t:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

itt csak y_2 ismeretlen, nevezzük el ezt y-nak, tehát $y_2 = y$. Így

$$y_1 y' - y y_1' = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Ez egy elsőrendű, lineáris, inhomogén egyenlet y-ra. Megoldása nem más, mint a homogén általános + inhomogén egy partikuláris megoldása. Kezdjük el a homogén megoldásával:

$$y_1 y' - y y_1' = 0$$

Ezt leosztjuk $y_1 \cdot y$-al.

$$\frac{y'}{y} - \frac{y_1'}{y_1} = 0$$

$$(\ln y)' = (\ln y_1)'$$

$$\ln y = \ln y_1 + \ln c_2$$

Az általános megoldás tehát:

$$y(x) = c_2 y_1(x)$$

Készen vagyunk, most térjünk át az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldására. Használjuk az állandók variálásának módszerét!

$$y = c_2(x) y_1(x)$$

Az állandót x-függőnek tekintem, és megpróbálom megoldani az egyenletet.

$$y' = c_2' y_1 + c_2 y_1'$$

Most ezt tegyük be az inhomogén egyenletbe, ami az

$$y_1 y' - y_1' y = W$$

$$y_1(c_2' y_1 + c_2 y_1') - y_1' c_2 y_1 = W$$

$$c_2' y_1^2 = W(x)$$

$$c_2(x) = \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx$$

Így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_2 y_1(x) + \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx \cdot y_1(x)$$

$$y(x) = c_2 y_1(x) + c_1 \left[\int \frac{e^{-\int^x p(x')dx'}}{y_1^2(x)} dx \right] y_1(x)$$

Tehát: Ha a másodrendű, lineáris, homogén egyenlet egy megoldása ismert (y_1), akkor a tőle független y_2 megkapható.

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int^2 p(x')dx'}}{y_1^2(x)} dx$$

így maga az általános megoldás is megkapható. Megjegyezzük, hogy az eredeti $y_1(x)$ megoldás úgy kapható meg, ha $c_1 = 0$ és $c_2 = 1$. A c_1 szabad konstans a Wronski-determinánsra vonatkozó egyenlet integrálásakor jött elő, a c_2 az y_2-re vonatkozó elsőrendű differenciálegyenlet integrálásakor. A másodrendű egyenletet visszavezettük két elsőrendűre.

2.1.1. Példán keresztül

Legyen a differenciálegyenletünk:

$$y'' + 2xy' + x^2 y = 0$$

Mi az általános megoldás? Ez egy homogén lineáris, másodrendű egyenlet. Tudjuk, hogy $p = 2x$ és $q = x^2$, ez viszont még kevés, így nem tudjuk megoldani. Valaki azonban megsúg nekünk egy partikuláris megoldást: $y_1(x) = e^{\frac{-x^2}{2}+x}$. Először ellenőrizzük le, hogy ez tényleg megoldás-e?

$$y_1' = (-x+1)e^{\frac{-x^2}{2}+x}$$

$$y_1'' = -e^{\frac{-x^2}{2}+x} + (-x+1)^2 e^{\frac{-x^2}{2}+x} = ... = x(x-2)e^{\frac{-x^2}{2}+x}$$

Ezt most helyettesítsük be az egyenletbe. Én nem írom ki az egészet, gondolom mindenki be tudja helyettesíteni, a legutolsó alak:

$$e^{\frac{-x^2}{2}+x}(x^2 - 2x + 2x + x^2) = 0$$

Tehát minden oké! Nézzük a Wronski-t.

$$W'(x) + pW = 0$$

$$W' + 2xW = 0$$

$$\frac{dW}{W} = -2xdx$$

$$lnW = -x^2 + lnC$$

Így pedig

$$W(x) = c_1 e^{-x^2}$$

Ez nekünk remek, mert nem nulla! Vezessük be az $y = y_2$ jelölést és menjünk tovább. Wronski:

$$y_1 y' - y_1' y = c_1 e^{-x^2}$$

A jobb oldal maga a Wronski! Oldjuk meg először a homogén részét, de mivel egy ugyanilyet csináltunk már, csak leírom, hogy:

$$y(x) = c_2 y_1(x) = c_2(x) e^{\frac{-x^2}{2}+x}$$

Most áttérünk az inhomogénre! Ismét deriválni kell, hiszen az állandók variálásának módszerét alkalmazzuk.

$$y_i(x) = c_2(x) y_1(x) = c_2(x) e^{\frac{-x^2}{2}+x}$$

$$y_i'(x) = c_2'(x) e^{\frac{-x^2}{2}+x} + ...$$

Nem írom ki a többi tagot, hiszen csak a c_2-ben derivált fog megmaradni. Visszaírunk mindent szépen az eredeti helyére.

$$e^{\frac{-x^2}{2}+x} c_2' e^{\frac{-x^2}{2}+x} = c_1 e^{-x^2}$$

Ebből megkapjuk c_2' függvényt, amit visszaintegrálva

$$c_2(x) = -\frac{c_1}{2} e^{-2x} e^{\frac{-x^2}{2}+x} = -\frac{c_1}{2} e^{\frac{-x^2}{2}-x}$$

A teljes megoldás tehát

$$y(x) = c_2 e^{\frac{-x^2}{2}+x} + c_1 e^{\frac{-x^2}{2}-x}$$

2.2. Másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet

Az egyenlet, mellyel foglalkozni kell:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$$

Persze, ezt is úgy kell megoldani, mint az ilyeneket szokás. Vesszük majd a homogén általános megoldását, ahol a két (y_1, y_2) alapmegoldást alkot és itt bejön a két szabad konstans, plusz az inhomogén egy partikuláris megoldását, ahol nem lesz tetszőleges konstans. Itt is az állandók variálásának módszerét kell alkalmazni!

$$y_i(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$y_i'(x) = c_1'(x) y_1(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

$$y_i''(x) = c_1''(x)y_1(x) + 2c_1'y_1' + c_1(x)y_1''(x) + c_2''(x)y_2(x) + 2c_2'y_2' + c_2(x)y_2''(x)$$

Vegyük észre, hogy ugyanúgy, mint az előbb, itt is x függőnek tartjuk a konstanst és próbáljuk megoldani az egyenletet. Ezeket az y-t, y'-t, y''-t helyettesítsük be az egyenletbe.

$$c_1''(x)y_1(x) + 2c_1'y_1' + c_1(x)y_1''(x) + c_2''(x)y_2(x) + 2c_2'y_2' + c_2(x)y_2''(x) +$$

$$p\left[c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)\right] +$$

$$q\left[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\right] = r$$

Ezt alakítgatjuk egy kicsit, míg eljutunk a következő alakig

$$c_1''y_1 + 2c_1'y_1' + c_2''y_2 + 2c_2'y_2' + p(c_1'y_1 + c_2'y_2) = r$$

Mivel p tetszőleges lehet, követeljük meg, hogy

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0$$

továbbá azt, hogy

$$c_1''y_1 + c_1'y_1' + c_2''y_2 + c_2'y_2' = 0$$

Alakítsuk tovább az egyenletet ezekkel a kikötésekkel

$$(c_1''y_1 + c_1'y_1' + c_2''y_2 + c_2'y_2') + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = r$$

Az előző kikötésekkel pedig

$$c_1y_1' + c_2'y_2' = r$$

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

Ez átírható mátrixos alakba:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mivel a két y már tisztázottan alaprendszert alkot, nem kell vizsgálgatni, a determináns nem nulla, tehát az egész invertálható. Én ezt már nem írom le külön, hiszen ugyanaz az eset, mint egy fejezettel feljebb, a végeredményt viszont leírom. A két függvényre:

$$c_1' = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(x)}$$

$$c_2' = \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)}$$

A végeredményhez ezeket ki kell integrálni x szerint. Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát:

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 - y_1(x)\int^x \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' + y_2(x)\int^x \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx'$$

Ne felejtsük el, hogy y_1, y_2 az alapmegoldás a homogén egyenletből.

3. Harmadik előadás

3.1. Green-függvény

Mire is használom? Ha van egy másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenletem peremfeltétellel

$$y(a) = 0 = y(b)$$

, akkor jó trükk a Green-függvény módszer. Nézzük az egyenletet a peremfeltétellel együtt:

$$y'' + py' + qy = r$$

és

$$y(a) = 0 = y(b)$$

Az y_1,y_2 ismert a homogén egyenletből. Az inhomogén általános megoldása:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + f_1(x) y_1(x) + f_2(x) y_2(x)$$

Az egyenlet végén lévő $f_1(x)y_1(x)+f_2(x)y_2(x)$ tag az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása, ahol f_1 és f_2 tagokat az állandók variálásának módszerével kaptuk meg úgy, hogy

$$f_1' y_1 + f_2' y_2 = 0$$

$$f_1' y_1' + f_2' y_2' = r$$

Ezt áttesszük mátrix alakba, majd valami hasonlóra jutunk:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Ezt alakítgatjuk, hogy kihámozhassuk belőle az f_1' és f_2' értékeket. Lényegében csak invertálni kell és meg is vagyunk. A keresett együtthatók:

$$f_1' = \frac{-y_2(x) r(x)}{W(x)}$$

és

$$f_2'(x) = \frac{y_1(x) r(x)}{W(x)}$$

Ezt még persze ki kellene integrálni, hogy tényleges eredményt kapjunk

$$f_1(x) = -\int^x \frac{y_2(x') r(x')}{W(x')} dx'$$

$$f_2(x) = \int^x \frac{y_1(x') r(x')}{W(x')} dx'$$

Ezeket a függvényeket kell belehelyettesíteni az inhomogén egyenlet általános megoldásába, ami így a következő alakot ölti

$$y(x) = c_1 y_1(x) - c_2 y_2(x) - y_1(x) \int^x \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')} dx' + y_2(x) \int^x \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')} dx'$$

Ne feledjük, hogy az $(y_1,\ y_2)$ egyelőre tetszőleges alapmegoldás. Mivel minket a peremérték probléma érdekel,

$$y(a) = 0$$

$$y(b) = 0$$

Ezért kössük ki, hogy (y_1,y_2) legyen olyan alapmegoldás, ami valamilyen egyszerű kezdeti érték problémát elégít ki. Például:

$$y_1(a) = 0$$

$$y_1'(a) = v_1$$

$$y_2(b) = 0$$

$$y_2'(b) = v_2$$

Az y_1 és y_2 most már fixálva van. Megjegyezzük, hogy az y_1 és y_2 a homogén egyenletet elégíti ki, az y pedig, amire a peremérték problémát kiróttuk, az inhomogént.

Keressük meg c_1 és c_2 értékeket úgy, hogy a peremérték fennálljon. Amit keresünk, a következő: $y(a) = y(b) = 0$. Nézzük

$$y(a) = c_1 y_1(a) - c_2 y_2(a) - y_1(a) \int^a \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')} dx' + y_2(a) \int^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')} dx' =$$

$$= c_2 y_2(a) + y_2(a) \int^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')} dx' = 0$$

Az utolsó egyenlőséget kiróttuk a feltétel szerint. Kikötjük továbbá azt is, hogy

$$y(b) = c_1 y_1(b) - y_1(b) \int^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')} dx' = 0$$

Ez a két feltétel lehetővé teszi, hogy megtalálhassuk c_1 és c_2 konstansokat, mégpedig

$$c_1 = \int^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')} dx'$$

$$c_2 = -\int^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')} dx'$$

Az inhomogén egyenlet peremérték-problémát kielégítő megoldása

$$y(x) = y_1(x) \int^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')} dx' - y_2(x) \int^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')} dx' -$$

$$-y_1(x)\int^x \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' + y_2(x)\int^x \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx'$$

Alakítsuk tovább az egyenletet

$$y(x) = y_1(x)\left[\int^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' - \int^x \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx'\right] +$$

$$+y_2(x)\left[\int^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx' - \int^x \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx'\right] =$$

Emlékezzünk meg arról, hogy $\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$

$$= y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' - y_2(x)\int_x^a \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx' =$$

$$= y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(x')r(x')}{W(x')}dx' =$$

$$= \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(x')r(x')}{W(x')}dx' + \int_x^a \frac{y_1(x)y_2(x')r(x')}{W(x')}dx' = y(x)$$

Az történt, hogy az y_1 és y_2 bejött az integrál jel alá. Hogy néz ki a végeredmény? Úgy kapom meg, hogy elmegyek a-tól x-ig, majd onnan a b-ig. Ha az $a < x' < x$, akkor $\frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')}$, ha az $x < x' < b$, akkor pedig $\frac{y_1(x)y_2(x')}{W(x')}$.

Tehát az egészet felfoghatom úgy, mint

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')r(x')dx'$$

ahol G a Green függvény, amire teljesül, hogy

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')}, \text{ ha } a < x' < x \\ \frac{y_1(x)y_2(x')}{W(x')}, \text{ ha } x < x' < b \end{cases}$$

Megjegyzések:

- A $G(x,x')$ Green függvény csak a homogén egyenlettől függ, tehát r-től független. Ez jó, mert különböző r-ekre a G ugyanaz. Tehát, ha van mondjuk 5 egyenletem, melyeknek a homogén tagjai ugyanazok, csak egyszer kell kiszámolnom G-t és aztán ezt megszorzom a különböző r-ekkel.

- Volt egy (y_1, y_2) homogén egyenletből származó megoldásom, kezdeti feltétellel; kaptam y inhomogén megoldását, peremfeltétellel.

- Az elején leszögeztünk pár dolgot. Nevezetesen $y_1(a) = 0$, $y_1(b) = 0$, $y_1'(a) = v_1$, $y_2'(b) = v_2$. Ezeket fixáltuk az elején. Függ valami attól, hogy mit választunk v_1 és v_2-nek? Ha megnézzük a Green függvény definícióját, látható, hogy a számlálóban és nevezőben is y_1 és y_2 szorzata van. Ha a v_1 és v_2 értékeket megszoroznám pl. λ_1 és λ_2 konstansokkal, akkor az egész megoldás megszorzódna vele, hiszen lineáris egyenletünk van. Mivel kiróttuk azt, hogy $y_1(a) = 0$, $y_1(b) = 0$, így a számlálóban és nevezőben ugyanazzal a λ-val kell szorozni, tehát ők kiejtik egymást, **tehát a G(x,x') nem változik.** Ha $(v_1, v_2) \neq 0 \Rightarrow$ G nem függ tőle. Így megkövetelhető, hogy

$$y_1(a) = 0$$

$$y_1'(a) = 1$$

$$y_2(b) = 0$$

$$y_2'(b) = 1$$

- Elképzelhető olyan degenerált eset, hogy $y_1(a) = 0$, $y_1'(a) = 1$ megkövetelése mellett véges C konstansokra lehetséges, hogy nem működik. Ilyenkor $y_1(a) = 0$,$y_1'(a) = v_1$, $y_2(b) = 0$, $y_2'(b) = v_1$-t kell kikötni és megmondjuk azt is, hogy $v_1 \neq 1$. Nem baj, ha fura számokkal dolgozunk, hiszen a végén úgyis kiesik.

- $y_1(a) = 0$,$y_1'(a) = 1$-et megoldva tetszőleges a-ra az y_2 rögtön adódik, csak az a-t kell kicserélni b-re.

- $$y(x) = \int_a^b G(x, x')r(x')dx'$$

  A Green függvények hasznosak más lineáris problémákban is, például parciális differenciálegyenlet-rendszereknél.

- Azért is jó még, mert $y(x)$ lineáris $r(x)$-ben.

3.1.1. Példán keresztül

A vizsgálandó egyenlet legyen a

$$x^2(x-1)y'' + x(x+1)y' - y = x$$

Hogy könnyebb legyen kezelni, leosztjuk $x^2(x-1)$-el.

$$y'' + \frac{x+1}{x(x-1)}y' - \frac{1}{x^2(x-1)}y = \frac{1}{x(x-1)}$$

Így a p, q és r részek már szépen felismerhetők. Ennyi információval nem tudjuk megoldani ezt az egyenletet, ám ekkor jön a kis segédünk és megsúgja, hogy a homogén egyenlet egy megoldása:

$$y_1(x) = \frac{x}{x-1}$$

Keressük meg azt a megoldást, ami eleget tesz a peremfeltételnek:

$$y(1/2) = y(1/4) = 0$$

Tudjuk, hogy

$$W' + pW = 0$$

Ezt a differenciálegyenletet könnyen megoldhatjuk, hiszen szétválasztható típusú. A p helyére beírjuk annak értékét, szétválasztjuk, kiintegráljuk.

$$\int \frac{dW}{W} = -\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx$$

$$W(x) = c_1 \frac{x}{(x-1)^2}$$

A homogén egyenlet megoldása tehát: $y_h = c_2 y_1(x)$

Az inhomogéné pedig $y_i = c_2(x)y_1(x)$, tehát ismét az állandók variálásának módszerével oldjuk meg!

$$c_2'(x)\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{c_1 x}{(x-1)^2}$$

Ebből $c_2'(x) = \frac{c_1}{x}$ és $c_2(x) = c_1 ln(x)$

$$y = c_2 \frac{x}{x-1} + c_1 ln(x) \frac{x}{x-1}$$

Ne feledjük, hogy itt a c_2 mellett álló dolog az y_1, a plusz jel melletti első rész, az pont a c_2. Ebből a megoldásból kell kikeverni azt, ami kielégíti a kezdeti feltételeket, mert ez azt sajnos még nem tudja. Azt róttuk ki, hogy $y(a) = 0, y'(a) = 1$.

$$y(x) = \frac{x}{x-1}\left[c_2 + c_1 ln(x)\right]$$

Vegyük figyelembe, hogy a kezdeti feltételünkből keressük azokat a c-ket, melyek azt kielégítik, tehát a c értékek is a függőek lesznek. Ezzel a tudással

$$y(a) = \frac{a}{a-1}\left[c_2 + c_1 ln(a)\right]$$

Ez viszont nulla, tehát

$$c_2 = -c_1 ln(a)$$

A másik feltételhez deriválni kell y-t. Nem fogom ezt végig írni, mert az előadáson sem tettük meg.

$$y'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} c_1 ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{c_1}{x-1}$$

Ebből kiszedhető, amit kerestünk: $c_1 = a - 1$ és $c_2 = (1-a)ln(a)$. Így felírható a következő

$$y_1(x) = \frac{x}{x-1}\left[(1-a)ln(a) + (a-1)ln(x)\right] = \frac{x}{x-1}(a-1)ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y_2(x) = \frac{x}{x-1}(b-1)ln\left(\frac{x}{b}\right)$$

Megjegyezzük, hogy $a = 1/4$ és $b = 1/2$. Megkaptuk a homogén egyenlet olyan alapmegoldását, ami a pont jó kezdeti feltételt tudja. Ebből már lehet Green-t számolni. Viszont, ehhez elsősorban kelleni fog a Wronski-determináns is!

$$W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = ... = x\frac{(a-1)(b-1)}{(x-1)^2} ln\frac{b}{a}$$

Persze most is lesz a Green-függvénynek a két változata:

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\frac{x}{x-1}(b-1)ln(x/b)\frac{x'}{x'-1}(a-1)ln(x'/a)}{\frac{x'}{(x'-1)^2}(a-1)(b-1)ln(b/a)}, \text{ ha } a < x' < x \\ \\ \dfrac{\frac{x}{x-1}(a-1)ln(x/a)\frac{x'}{x'-1}(b-1)ln(x'/b)}{\frac{x'}{(x'-1)^2}(a-1)(b-1)ln(b/a)}, \text{ ha } x < x' < b \end{cases}$$

Érdemes a függvényeket meghagyni paraméteresen, tehát meghagyni a-nak és b-nek, mert úgy látszik, hogy mit-mire kell lecserélni. Ugye az van, hogy mindig elég az egyiket megcsinálni a Green-nél, hiszen a másik ugyanaz, csak mindig cserélgetjük az a-t b-re. Kicsit kiegyszerűsítjük a dolgot, hogy egyszerűbb legyen használni.

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{ln(x/b)ln(x'/a)(x'-1)\frac{x}{x-1}}{ln(b/a)}, \text{ ha } a < x' < x \\ \\ \dfrac{ln(x/a)ln(x'/b)(x'-1)\frac{x}{x-1}}{ln(b/a)}, \text{ ha } x < x' < b \end{cases}$$

Megvan a Green-függvény! Így nekiugorhatunk az y-nak.

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')r(x')dx' = y(x) = \int_a^x G(x,x')r(x')dx' + y(x) = \int_x^b G(x,x')r(x')dx'$$

$$r(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

Helyettesítsünk be mindent szépen:

$$y(x) = \frac{1}{ln\frac{b}{a}}\left[\int_a^x ln(\frac{x}{b})ln(\frac{x'}{a})(x'-1)\frac{x}{x-1}\frac{1}{x'(x'-1)}dx'\right]+$$

$$+\frac{1}{ln\frac{b}{a}}\left[\int_x^b ln(\frac{x}{a})ln(\frac{x'}{b})(x'-1)\frac{x}{x-1}\frac{1}{x'(x'-1)}dx'\right]$$

Itt fejeztük be múltkor, innen folytatom...

4. Negyedik előadás

4.1. Green függvény további tulajdonságai

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')}, \text{ ha } a < x' < x \\ \\ \frac{y_1(x)y_2(x')}{W(x')}, \text{ ha } x < x' < b \end{cases}$$

Szeretnénk megvizsgálni a függvény menetét. Első körben értelmes a kérdés, hogy folytonos-e $x = x'$-ben? Ehhez meg kell vizsgálnunk ennek az x pontnak a környezetét. Veszünk egy megfelelően kicsi ε értéket, és ezzel vizsgálódunk. Természetesen megyünk majd jobbról és balról is bele az x-be.

$$G(x, x-\varepsilon) = \frac{y_2(x)y_1(x-\varepsilon)}{W(x-\varepsilon)} = (\varepsilon \to 0) = \frac{y_1(x)y_2(x)}{W(x)}$$

$$G(x, x+\varepsilon) = \frac{y_2(x)y_1(x+\varepsilon)}{W(x-\varepsilon)} = (\varepsilon \to 0) = \frac{y_1(x)y_2(x)}{W(x)}$$

Kijelenthető hát, hogy x ugyanaz az érték, függetlenül attól, hogy jobbról, vagy balról konvergáltunk bele. A $G(x, x')$ tehát jól definiált, hiszen mindegy, hogy jobbról, vagy balról megyek bele. A $G(x, x')$ folytonos $x' = x$-ben. Ezt abból tudjuk, hogy nincs ugrása, viszont x-nél van benne törés, mert a derivált ugorhat!

4.1.1. Derivált folytonosságok

Szeretnénk megnézni a deriváltak folytonosságát, hiszen ezt fontos tudni. Nézzük, hogy $\frac{dG(x,x')}{dx}$ folytonos-e $x = x'$-ben? Ne feledjük el, hogy csak egy argumentumot deriválunk és ez az x. Az x' békén van hagyva.

$$\frac{dG(x,x')}{dx}\Big|_{x'\epsilon(a,x)} = \frac{d}{dx}\frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(a,x)} = \frac{y_2'(x)y_1(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(a,x)}$$

$$\frac{dG(x,x')}{dx}\Big|_{x'\epsilon(x,b)} = \frac{d}{dx}\frac{y_1(x)y_2(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(x,b)} = \frac{y_1'(x)y_2(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(x,b)}$$

Rendben, ezek után nézzük meg, hogy a két derivált egyenlő-e?

$$\frac{dG(x,x')}{dx}\Big|_{x'\epsilon(a,x)} - \frac{dG(x,x')}{dx}\Big|_{x'\epsilon(x,b)} = \frac{y_2'(x)y_1(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(a,x)} - \frac{y_1'(x)y_2(x')}{W(x')}\Big|_{x'\epsilon(x,b)} =$$

Most elevenítsük fel, hogy az x' nem más, mint az $x-\varepsilon$ és $x+\varepsilon$ értékek és azt se feledjük el, hogy az epszilon nullához tart!

$$= \frac{y_2'(x)y_1(x)}{W(x)} - \frac{y_1'(x)y_2(x)}{W(x)} = 1$$

Hiszen ami a két számlálóban van, az nem más, mint a Wronski-determináns definíciója: $y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)$. Kimondható tehát, hogy a $\frac{dG(x,x')}{dx}$-nek ugrása van $x = x'$ helyen, hiszen az érték, amit kaptunk, nem nulla. Mi a helyzet a második deriválttal? Ha egy olyan függvényt deriválunk másodszor, ami az első deriváltjában ugrik, akkor a második valószínűleg végtelen lesz. Helyettesítsük be a Green-függvényt egy másodrendű differenciálegyenletbe. Hogy miért tesszük ezt, azt még nem tudjuk, de nemsoká kiderül. Az egyenlet legyen $y'' + py' + qy$ alakú. Helyettesítsünk.

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,x') + p(x)\frac{dG}{dx}(x,x') + q(x)G(x,x') =?$$

Hogy könnyebb legyen az életünk, vezessünk be egy új jelölést:

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p(x)\frac{d}{dx}y + qy = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] y(x)$$

Ez a szögletes zárójelben szereplő kifejezés egy másodrendű differenciál operátor, ami x-ben operál. Írjuk ki ismét, miről is van szó és nevezzük el valahogy. Legyen

$$K = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right]$$

Az inhomogén egyenlet ezzel felírható a $\kappa y(x) = r(x)$ formában, tehát sokkal egyszerűbb lesz kezelni a dolgokat!

Ha a Green-függvényre alkalmazzuk ezt, akkor mi van? Különböztessük meg eseteinket.

- Elsőként azt, ahol $x'\epsilon(a,x)$

$$\kappa G(x,x') = \kappa\frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')} = \frac{(\kappa y_2)(x)y_1(x)}{W(x')} = \frac{(y_2'' + py_2' + qy_2)(x)y_1(x)}{W(x')} = 0$$

Ugye értjük, hogy miért y_2-re mászott rá a κ? Hiszen megbeszéltük, hogy csak x-ben operál és pont y_2 az x függő. Az, hogy nulla lett az eredmény, azért van, mert y_2 a homogén egyenletet kielégíti.

- Most a másik esetet vizsgáljuk, ahol $x' \epsilon (x, b)$

$$\kappa G(x, x') = \kappa \frac{y_1(x) y_2(x')}{W(x')} = \frac{(\kappa y_1)(x) y_2(x)}{W(x')} = 0$$

  Hiszen y_1 is kielégíti a homogén egyenletet.

Vegyük észre, hogy $\kappa G(x, x') = 0$,ha $x' \neq x$. Kérdés azonban még, hogy mi van akkor, mikor $x = x'$? Ennek eldöntésére ki kellene számolnunk egy ilyen integrált (hogy segítsek magamon, bevezetek két rövidítést. Legyen $A = x + \varepsilon$ és $B = x - \varepsilon$. Érvényességük ez az alfejezet.):

$$\int_B^A \kappa G(x, x') dx' = \left[\frac{d}{dx} G(x, x') \right]_B^A + p(x) \Big[G(x, x') \Big]_B^A + \int_B^A q(x) G(x, x') dx' =$$

Ugye, a megoldásban elkülönül három rész, hiszen szándékosan így írtam. Az első egy lesz, mert ott a derivált ugrása miatt egyet kapunk, ezt előbb kiszámoltuk. A második nulla, hiszen mikor beírjuk a behelyettesítési értékeket, megkapjuk, hogy a függvény különbsége nulla, hiszen ott folytonos. A harmadik tag (az integrálos) pedig azért nulla, mert az egy nulla szélességű integrál, tehát

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

Észrevételek

- $\int_B^A \kappa G(x, x') dx' = 1$, ha epszilonnal a nullába tartunk.
- $\kappa G(x, x') = 0$, ha az $x \neq x'$.
- $\kappa G(x, x') = \delta(x - x')$. (Dirac-delta)

A Green-függvény módszerének összefoglalása

Adott a differenciálegyenletünk és a hozzá tartozó peremértékek.

$$y'' + py' + qy = r$$

Keressük az y függvényt, merre $y(a) = y(b) = 0$. Valaki jön és segít nekünk egy homogén egyenlet megoldással, mert máshogy nem menne, tehát kapunk egy $y_1(x)$ tippet.

- Kiszámoljuk a Wronski-determinánst.
- $y_1 y' - y y_1' = W$ egyenletből megkapjuk $y = y_2$-t.
- Ezek alapján megvan az (y_1, y_2) alaprendszert.
- $y_1 = \{y(x), y\ (a) = 0; y'(a) = 1\}$
  $y_2 = \{y(x), y\ (b) = 0; y'(b) = 1\}$

- Ebből már össze lehet rakni a Green-függvényt:

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(x')}{W(x')}, \text{ ha } a < x' < x \\ \frac{y_1(x)y_2(x')}{W(x')}, \text{ ha } x < x' < b \end{cases}$$

- Nem marad más, mint az inhomogén egyenlet megoldása: $y(x) = \int_a^b G(x,x')r(x')dx'$

4.2. Euler-féle differenciálegyenletek

Az általános formula a következő

$$ax^2y'' + bxy' + cy = r(x)$$

ahol a, b, c valós állandók. Másodrendű, lineáris egyenletekről van szó, melyek lehetnek homogének és inhomogének is, attól függően, van-e $r(x)$ a jobb oldalon. Az (y_1, y_2) alaprendszer megkapható, sőt, eddig[2] tudnom kellett az egyiket, hogy a másikat megkaphassam, most nem kell. Emlékeztetőül írjuk ki az elsőrendű esetét ezeknek az egyenleteknek

$$ax\frac{d}{dx}y + by = 0$$

A homogén eset megoldása pedig $y_h = x^\alpha$ volt.

4.2.1. Homogén eset

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Keressük az $y = x^\alpha$ megoldást, ezért behelyettesítünk az egyenletbe.

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)^{\alpha-2}$$

$$x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha$$

$$xy' = \alpha x^\alpha$$

$$y = x\alpha$$

Ezt behelyettesítve az egyenletbe: $a\alpha(\alpha-1)x\alpha + b\alpha x^\alpha + cx^\alpha = 0$, amit leosztunk x^α-nal. Ebből a következő jön ki: $a\alpha^2 + \alpha(b-a) + c = 0$, amit átrendezünk és eljutunk a végeredményhez

$$a\alpha^2 + \alpha(b-a) + c = 0$$

Ebből tipikusan két gyököt kapunk:

$$\alpha_{1,2} = \frac{a - b \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

Három alapvető esetet különböztetünk meg. Vegyük őket sorban!

[2] A Green-függvényeknél

1. Két valós gyök

   $y_1(x) = x^{\alpha_1}$ valamint $y_2(x) = x^{\alpha_2}$, $W \neq 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{\alpha_1} & x^{\alpha_2} \\ \alpha_1 x^{\alpha_1 - 1} & \alpha_2 x^{\alpha_2 - 1} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)\, x^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \neq 0$$

   Persze, ez akkor igaz, ha $\alpha_1 \neq \alpha_2$

   Alaprendszerünk:

$$(y_1 = x^{\alpha_1}, y_2 = x^{\alpha_2})$$

   A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2}$$

2. Egy valós gyök (degenerált eset)

   Ilyenkor $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Az egyik megoldást tudjuk: $y_1(x) = x^\alpha$, ebből meg tudjuk határozni a másikat. Ezzel foglalkoztunk eddig, a Wronski-determináns segítségével megkapható az y_2. Mi azonban bemutatunk egy másik, új módszert:

   $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$

$$y = C_1 x^\alpha + C_2 x^{\alpha + \varepsilon}$$

   A kettő különbözik, tehát függetlenek. A különbség is megoldás, mert lineáris az egyenlet, le is oszthatom epszilonnal, akkor is megoldás lesz.

$$\frac{x^{\alpha+\varepsilon} - x^\alpha}{\varepsilon} = y(x)$$

   Tehát, a fenti egyenlet is megoldás minden ε-ra. Nézzük meg, mit ad ez?

$$\frac{x^{\alpha+\varepsilon} - x^\alpha}{\varepsilon} = x^\alpha \left| \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right| =$$

   Ez a tag $\ln(x)$-hez tart, így

$$= x^{\alpha \frac{e^{\varepsilon ln(x)} - 1}{\varepsilon}} =$$

   Ezt most szépen sorba fejtjük és a vége az lesz, hogy

$$x^\alpha ln(x) + O(\varepsilon)$$

   viszont mivel az $\varepsilon \to 0$ határesetet vizsgáljuk, a számolásunk vége

$$= x^\alpha ln(x)$$

   A két megoldásunk tehát

$$y_1(x) = x^\alpha$$
$$y_2(x) = x^\alpha ln(x)$$

   az (y_1, y_2) alaprendszer, ha a gyökök egybeesnek.

3. Komplex konjugált párok

A két gyökünk a következő

$$\alpha_1 = \beta + i\gamma$$
$$\alpha_2 = \beta - i\gamma$$

Legyen megoldás a

$$y_1 = x^{\alpha_1} = x^{\beta+i\gamma}$$
$$y_2 = x^{\alpha_2} = x^{\beta-i\gamma}$$

Az a gond, hogy valós függvényre komplex megoldást kaptunk, hiszen az x és y valósak voltak. Viszont ha megnézzük, hogy az egyik megoldásunk az $x^{\beta+i\gamma}$, a másik pedig a $x^{\beta-i\gamma}$, kijelenthetjük, hogy az összegük is megoldás, ez pedig már valós.

$$x^{\beta+i\gamma} + x^{\beta-i\gamma} = x^{\beta}\left[e^{i\gamma ln(x)} + e^{-i\gamma ln(x)}\right] = x^{\beta}2cos(\gamma ln(x)) = y_1(x)$$

Ez az egyik megoldás, ami valós, hiszen ennél lényegében a "valós részt vettük".

A különbség is az, de ez tisztán képzetes, ezért az egészet le kell osztani i-vel, hogy valós legyen.

$$\frac{x^{\beta+i\gamma} - x^{\beta-i\gamma}}{i} = y_2(x)$$
$$y_2 = x^{\beta}\left(\frac{x^{i\gamma} - x^{-i\gamma}}{i}\right) = ... = 2x^{\beta}\sin(\gamma ln(x))$$

Konstansok nem is kellenek. A két megoldás tehát:

$$y_1 = x^{\beta}cos(\gamma ln(x))$$
$$y_2 = x^{\beta}\sin(\gamma ln(x))$$

Ez pedig az Euler-féle homogén másodrendű differenciálegyenletek alaprendszerét képezik akkor, ha a gyökök komplex konjugált párok.

4.3. Másodrendű, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek megoldása sorfejtéssel

Az alapegyenlet, amiből kiindulunk:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

Az $y(x)$-et Taylor sor alakjában keresem

$$y(x) = x^p \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

Vegyük észre, hogy x^p-től indulunk, nem konstanstól, tehát x^p (Taylor sor) alakban keressük a megoldást. Tudni szeretnénk tehát a C_m és p értékeket. Szorozzuk vissza az y'' elé, amit eddig mindig leosztottunk, de valahogy úgy, hogy minden polinom legyen, ne legyen benne tört.

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$$

, ahol $a(x), b(x), c(x), d(x)$ polinomok.

Nézzünk egy példát:

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

$$y(x) = x^q \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+q}$$

alakú megoldást keresünk. Meg kell határozni az együtthatókat!

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (x+q)x^{m+q-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+q)(m+q-1)C_m x^{m+q-2}$$

$$4x^2y'' = 4\sum_{m=0}^{\infty} (m+q)(m+q-1)C_m x^{m+q}$$

$$4xy' = 4\sum_{m=0}^{\infty} (m+q)C_m x^{m+q}$$

$$(x^2-1)y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+q+2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+q}$$

$$4\sum_{m=0}^{\infty}(m+q)(m+q-1)C_m x^{m+q} + 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+q)C_m x^{m+q} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+q+2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+q} = 0$$

Összegyűjtjük az x-ben közös közös hatványokat:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m+q}\left[4(m+q)(m+q-1)C_m + 4(m+q)C_m - C_m + C_{m-2}\right] = 0$$

$$C_{-2} = 0$$

$$C_{-1} = 0$$

$$\left[4(m+q)(m+q-1) + 4(m+q) - 1\right] C_m + C_{m-2}$$

Kiemeljük $4(m+g)$-t

$$\left[4(m+q)^2 - 1\right] C_m + C_{m-2}$$

$$(2(m+q)-1)(2(m+q)+1)C_m + C_{m-2} = 0$$

$$C_m = \frac{C_{m-2}}{(2(m+q)-1)(2(m+q)+1)}$$

Persze, kössük ki, hogy $m \geq 2$, mert így m nem negatív. Abban az esetben, ha $m < 0$, akkor $m = 0$ esetén $4q^2 - 1 = 0$, $m = 1$ esetén pedig $4(1+q)^2 - 1)C_1 = 0$. Ebből a két egyenletből már meghatározható a q érték, a többiből pedig a C-t tudjuk meghatározni.

Jegyezzük meg, hogy alacsony hatványokból ($m = 0, 1, 2$)határozzuk meg a q értéket, majd q fix és a magasabb, végtelen sok hatványból határozzuk meg C -ket rekurzívan.

5. Ötödik előadás

5.1. Speciális függvények

5.1.1. Bessel-függvények

Nézzük a következőt:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{1}$$

itt p egy általános konstans, amire egyenlőre nem kell semmilyen kikötés. Ez egy másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet. Az x^2 nélkül Euler-féle lenne. Nem tudunk partikuláris megoldást, szóval sorfejtést kell használnunk.

$$y(x) = x^p u(x)$$

(Megjegyezzük, hogy valaki megsúgta nekünk, hogy az első tag x^p alakú legyen.) Deriváljunk ügyesen

$$y'(x) = px^{p-1}u + x^p u'$$

$$y''(x) = p(p-1)x^{p-2}u + 2px^{p-1}u' + x^p u''$$

Ezeket be kell helyettesíteni az (1) egyenletbe:

$$p(p-1)x^p u + 2px^{p+1}u' + x^{p+2}u'' + x^{p+1}u' + (x^2 - p^2)x^p u = 0$$

Összeszedjük a tagokat

$$x^{p+2}u'' + x^{p+1}u'(1+2p) + ux^p(p(p-1) + p + x^2 - p^2) = 0$$

Ezt most leosztjuk szépen x^p-el

$$x^2u'' + xu'(1+2p) + ux^2 = 0$$

Most pedig leosztunk x-nel is.

$$xu'' + u'(1+2p) + ux = 0$$

Most szedjük össze mit fogunk használni:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

$$u'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m C_m x^{m-1}$$

$$u''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

$$xu''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-1}$$

$$xu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+1}$$

Összegeztük mivel dolgozunk, írjunk be mindent a helyére:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-1} + (1+2p) \sum_{m=0}^{\infty} m C_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+1} = 0$$

Nem marad más, meg kell nézni, hogy mindegyik ugyanarról a hatványról indul-e? Ha nem, akkor az alsókat külön kell kezelni. Mikor az x^0 együtthatóját nullává tesszük, a következőnek kell teljesülni:

$$(1+2p) C_1 = 0$$

Hozzuk az összes tagot x^n alakra:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m+1) m C_{m+1} x^m + (1+2p) \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) C_{m+1} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m+1} x^m = 0$$

Ezek a lépések nem triviálisak és nagyon könnyen elronthatók. A sikeres ZH érdekében érdemes otthon megcsinálni néhány ilyen feladatot.. Folytassuk, gyűjtsük be a tagokat.

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^m \left[m(m+1) C_{m+1} + (1+2p)(m+1) C_{m+1} + C_{m-1} \right] = 0$$

Minden koefficiensnek nullának kell lenni, hogy ez az egyenlőség teljesüljön.

$$m(m+1) C_{m+1} + (1+2p)(m+1) C_{m+1} + C_{m-1} = 0, m \geq 1$$

$$(m+1) C_{m+1} (m+2p+1) + C_{m-1} = 0$$

$$C_{m+1} = \frac{-C_{m-1}}{(m+1)(m+1+2p)}$$

Annak érdekében, nehogy nullával osszunk, ki kell kötni, hogy $m+1+2p \neq 0$, tehát $m \geq 1$ esetén $p \neq -1-m$. Ne feledjük el, hogy az $m = 0$ esetre is volt már egy relációnk, miszerint

$$(2p+1)c_1 = 0$$

$$p \neq 1/2$$

ebből pedig a $c_1 = 0$. Mivel $c_1 = 0 \rightarrow c_3 = 0 \rightarrow c_5 = 0$, megkapjuk, hogy

$$c_{2m+1} = 0$$

Mit mond nekünk a c_0?

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2p)} = -\frac{c_0}{4(1+p)}$$

$$c_4 = \frac{c}{4(1+p)} \cdot \frac{1}{4(4+p)} = \frac{c_0}{4(1+p)4(2(2+p))}$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{4(1+p)4 \cdot 2 \cdot (2+p)} \cdot \frac{1}{6(6+2p)} = ...$$

Ebből valahogy kikombináljuk az általános rekurziós formulát c_{2m}-re.

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2(2+2p)4(4+2p)...2m(2m+2p)} = \frac{(-1)^m c_0}{2^m m! 2^m (1+p)(2+p)...(m+p)} =$$

$$= \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m! (1+p)(2+p)...(m+p)} = C_{2m}$$

$$C_{2m+1} = 0$$

Mivel kikötést tettünk a p-re, nem fordulhat elő, hogy nullával osztanánk.

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} x^{2m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m C_0 x^{2m}}{2^m m! (1+p)...(m+p)} =$$

$$= C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+p)...(m+p)} \frac{x}{2}^{2m}$$

u-ra kaptunk egy megoldást, és egy szabad paramétert, tehát rájöttünk, hogy az alaprendszer két függvényéből az egyik Taylor-sorba fejthető 0 körül, a másik pedig nem (hiszen akkor arra is kaptunk volna szabad paramétert[3]) Hogy megkönnyítsük a dolgunkat, bevezetjük a gamma függvényt.

$$\Gamma(z+1)$$

Értéke pedig $z!$, ha z egész szám, analitikus kiterjesztés, ha $z \notin \mathbb{N}$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Innen pedig $\Gamma(z+1) = z!$, ha z egész.

Állítás:

$$\Gamma(p+1)(1+p)...(m+p) = \Gamma(p+m+1)$$

$$(1+p)...(m+p) = \frac{\Gamma(p+m+1)}{\Gamma(p+1)}$$

Ezzel a gammával lehet egyszerűsíteni.

Tudjuk, hogy $c_0 = \frac{1}{2^p p(p+1)}$

$$y(x) = x^p u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+m+1)} \frac{x}{2}^{2m+p} = J_p(x)$$

Ez nem más, mint egy $J_p(x) = p$ indexű Bessel-függvény. Azért kellett neki új név, mert nem lehet zárt alakban kifejezni. Ez egy elsőfajú, p indexű Bessel-függvény. Ugyan a negatív, egész $p = -n$ értékek ki voltak zárva már, most viszont nézzük meg mi van, ha $p = -n$.

Állítás:

$$\frac{1}{\Gamma(p+m+1)} = \frac{1}{\Gamma(-n+m+1)} \longrightarrow 0$$

ha n egész értékhez tart, hiszen a $\Gamma(z)$ pólusai pont a negatív egész számok.

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Ebből a sorból egy csomó tagot el lehet hagyni, hisz negatívon nullát adnak!

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

Ez volt a Bessel, negatív n-re. Toljuk el az összegző indexet!

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n(!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} =$$

[3]Hiszen másodrendű egyenletre két paramétert vár az ember fia.

cseréljük ki a faktoriálist a gammával

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} =$$

$$= (-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x)$$

Ez azt jelenti, hogy a negatív indexű Bessel egyenlő $(-1)^n \cdot$ pozitív indexű Bessellel.

Tulajdonságok:

- Konvergens összeg.
- Analitikus p-ben, x-ben $J_p(x)$.
- Ha $p \notin \mathbb{Z}$, $J_p(x), J_{-p}(x)$ függetlenek.
- Ha $p \notin \mathbb{Z}$, $(J_p(x), J_{-p}(x))$ alaprendszer.
- Egész p esetén továbbra is csak egy megoldás maradt!
- $$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

  Generátor függvény.
- $$e^{ix\cos\varphi} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) i^n \cos(n\varphi)$$
- $J_p(x)$ csak akkor írható fel elemi függvények segítségével, ha $p = n + 1/2$. Erre írunk pár példát:

  $$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

  $$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$$

  $$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)$$

  $$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} - \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x}$$
- $p \in \mathbb{Z}$ esetén csak egy megoldásunk van. Kérdés, hogy mi a második?

  $$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, p \notin \mathbb{Z}$$

ilyenkor, $p \to n$ esetén, a L'Hospital szabály szerint

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(x)}{\partial p} - (-1)^n \frac{\partial J_p(x)}{\partial p}\right]$$

Állítás: $p = n, p \in \mathbb{Z}$ alaprendszert alkot $(J_n(x), N_n(x))$, továbbá $N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$

- A módosított Bessel függvény:

$$I_p(x) = e^{-i\frac{p\pi}{2}} J_p(e^{\frac{i\pi}{2}}x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!p(p+m+1)} \frac{x}{2}^{p+2m}$$

Az I_p egy differenciálegyenletet elégít ki:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2)y = 0$$

Tehát, $y(x) = I_p(x)$.

- Ha $p \notin \mathbb{Z}$, akkor $I_p(x), I_{-p}(x)$ alaprendszer.
- Ha $p \in \mathbb{Z}$, be kell vezetni a harmadfajú, módosított Bessel-függvényt.

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2\sin(p\pi)}\left[I_{-p}(x) - I_p(x)\right]$$

Ha $p = n, p \in \mathbb{Z}$, szintén L' Hospital szabály alkalmazásával

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{-\partial I_{-p}(x)}{\partial p} - \frac{\partial I_p(x)}{\partial p}\right]$$

Az $(I_n(x), K_n(x))$ alaprendszer.

- Rekurziós relációk:

$$J_{p+1} = \frac{p}{x}J_p(x) - J_p'(x)$$
$$J_{p-1} = \frac{p}{x}J_p(x) + J_p'(x)$$

Ha ezeket szépen összeadjuk, akkor

$$J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{x}J_p(x)$$

Rendben, még teszünk pár állítást és lassan itt a vége, szóval: **Állítások**

- $J_p(x)$-nek ∞ sok zérushelye van!
- Zérushelyek nem torlódnak.

- Legyen $J_p(x) = 0$, továbbá $x = \lambda_1, \lambda_2, ...\infty$. Teljesüljön, hogy $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 ...$ Ezek után nézzük a következőt: $J_p(\lambda_1 x), J_p(\lambda_2 x), ..., J_p(\lambda_i x)$ egy függvényrendszer. Ez a rendszer a $(0,1)$ intervallumon ortogonális függvényrendszer a $\int(x) = x$ súlyfüggvényre nézve.

$$\int_0^1 dx\rho(x) J_p(\lambda_i x) J_p(\lambda_j x) = 0, i \neq j$$

egyébként pedig konstans, hiszen

$$\int_0^1 dx\rho(x) \left[J_p(\lambda_i x)\right]^2 = \frac{1}{2} J_p'(\lambda_i)^2 > 0$$

6. Hatodik előadás

6.1. Állandó együtthatós, homogén, lineáris, n-ed rendű differenciálegyenletek

Először is kössük ki, hogy minden előforduló $y(x)$ mennyiség valós. Az eddig vizsgált egyenletek változó együtthatósak voltak, melyekre az általános alak

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

volt. Nézzük meg milyenek az állandó együtthatósak!

$$y, y', y'', ..., y^{(n)}$$

$$p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + ... + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0 \tag{2}$$

Itt az összes előforduló p érték valamilyen konstans, valamint $p_n \neq 0$. Többnyire itt is igyekszünk megszabadítani az $y^{(n)}$-t az együtthatójától. Ilyenkor

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + ... + \alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$$

az általános alak. Az általános tulajdonságok, amelyek eddig igazak voltak, többnyire itt is érvényesek.

6.1.1. Tulajdonságok

- Ha y_1, y_2 megoldás, akkor a linearitás miatt az összegük is megoldás. Tehát, ha ez a két egyenlet megoldás

$$p_n y_1^{(n)} + p_{n-1} y_1^{(n-1)} + ... + p_2 y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1 = 0$$

$$p_n y_2^{(n)} + p_{n-1} y_2^{(n-1)} + ... + p_2 y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2 = 0$$

akkor összeadva őket látszik, hogy az összegük is megoldás.

- Ha van egy y_1 megoldás, valamint $c \in \mathbb{R}$, akkor $cy_1(x)$ is megoldás. Ebből következik, hogy ha $y_1, ..., y_n$ megoldások, akkor tetszőleges $c_1, ..., c_n$ tetszőleges konstansokra

  $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

  is megoldás, tehát felírható, hogy

  $$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

  Ebből viszont az következik, hogy $y_1, ..., y_n$ "független" megoldás esetén az általános megoldás

  $$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \tag{3}$$

  hiszen tudjuk, hogy az általános megoldásban n darab szabad konstansnak kell megjelennie.

- Az $y_1, ..., y_n$ megoldásokat függetlennek mondjuk, ha

  $$W(y_1, ..., y_n) \neq 0$$

  ahol W a Wronski mátrix (ami egy nxn-es mátrix).

  $$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

  Ha ez teljesül (hogy a mátrix determinánsa nem nulla), akkor az $y_1, ..., y_n$ megoldások *alaprendszert* alkotnak. Az általános megoldás tehát így is

  $$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

6.2. Megoldás paraméteresen

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + ... + \alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$$

A megoldást $y(x) = e^{\lambda x}$ alakban keresem.

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y^n(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Ha ezeket beleírjuk az egyenletbe, akkor

$$\lambda^n e^{\lambda x} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} + \alpha_0 e^{\lambda x} = 0$$

Ezt le lehet osztani $e^{\lambda x}$-szel.

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} ... + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

Mint látható, ez egy x-től független egyenlet. Írjuk fel a **karakterisztikus polinomot.**

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i \tag{4}$$

Ez pedig egy n-ed rendű polinom lambdában, együtthatói valósak. A $p(\lambda)$ polinom gyökei: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (általában ennyi van). Ha:

- A lambdák mind különbözőek, akkor sorba rendezhetőek, valamint TFH, mind valós. **Állítás:** $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ -n darab különböző függvény alaprendszert alkot. Az általános megoldás ilyen esetben

  $$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x} \tag{5}$$

- Tegyük fel, hogy mindegyik különböző, de van köztük komplex. Ha $\lambda_1 = A + iB$, akkor van egy $\lambda_2 = A - iB$ is. Ez egy tétel! Ebben az esetben

  $$\lambda_1 = e^{(A+iB)x}$$

  $$\lambda_1 = e^{(A-iB)x}$$

  sajnos nem valósak. Ilyen esetben úgy kell kikeverni a megoldást, hogy az valós legyen.

  $$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{(A+iB)x} + e^{(A-iB)x}}{2} = e^{Ax}\left(\frac{e^{Bx} + e^{-iBx}}{2}\right) = e^{Ax}\cos(Bx)$$

  A másik változat értelemszerűen ugyanígy alakul

  $$\frac{y_1 - y_2}{2i} = ... = e^{Ax}\sin(Bx)$$

  Tehát, ha vannak komplex gyökök, akkor tudom, hogy lesz még egy, hiszen azok párosával jönnek.

  $$\lambda_k^{1,2} = A_k \pm iB_k$$
  $$y_{1k} = e^{A_k x}\cos(B_k x)$$
  $$y_{2k} = e^{A_k x}\sin(B_k x)$$

- Emlékezzünk, hogy a másodrendű Euler-féle egyenlet [4] és a másodrendű állandó együtthatójú, lineáris, homogén [5] egyenletek igen szoros kapcsolatban álltak. Ha mondjuk az x-et kicserélem $e^x = z$-re, a kettő áttranszformálódik egymásba.
- Nézzük meg mi volt a másodrendűnél:
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós
  - $\lambda_{1,2} = A \pm iB$
  - $\lambda_1 = \lambda_2$ valós [6]

  Nézzük mi lesz $n > 2$ esetben (ami most van). Ilyenkor már sokkal több lehetőség is szóba jöhet. Például, ha k ($k < n$) gyök egybeesik. Ilyenkor is felírható az alaprendszer, csak elég komplikált.
- Az n-ed rendű, állandó együtthatójú, homogén, lineáris egyenlet és az elsőrendű, lineáris, n függvényre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer között is van összefüggés. Nézzük meg azt, hogy volt n-ed rendű differenciálegyenlet és elsőrendű n-függvényre vonatkozó differenciálegyenlet rendszernél:

  $$y'' = f(x, y, y')$$

  Nézzük az $n = 2$ esetet:

  $$y = y_1$$
  $$y' = y_2$$

  Így felírható a két függvényre vonatkozó, elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer:

  $$y_1' = y_2$$
  $$y_2' = f(x, y_1, y_2)$$

  Hasonlóan járhatunk el $n = 3$ esetben is: $y_1 = y$, $y_2 = y'$, valamint $y_3 = y''$. Így eljutunk a következő egyenletrendszerhez:

  $$y_1' = y_2$$
  $$y_2' = y_3$$
  $$y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3)$$

  Tehát egy n-ed rendű egyenletből n darab elsőrendű lineáris egyenletrendszert kapunk.

[4] $y_1 = x^{\alpha_1}$ és $y_2 = x^{\alpha_2}$

[5] $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

[6] Ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor $(e^{\lambda x}, xe^{\lambda x})$ alaprendszer.

Nézzük meg mi a helyzet az állandó együtthatóssal!

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j$$

Itt $i = 1, 2, ..., n$. Az A mátrix nxn-es és konstans! Mivel az ilyet könnyebb kezelni, mint az n-ed rendű, állandó együtthatójú egyenletet, áttérünk az egyenletrendszer vizsgálatára.

6.3. Elsőrendű, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerek

$(y_1, ..., y_n)$ ismeretlen függvény.

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j$$

- **n=1**

$$y' = Ay$$
$$y = C \cdot e^{Ax}$$

- **n=2**

$$y_1' = A_{11}y_1 + A_{12}y_2$$

Ezek össze vannak kötve, mert y_1'-ban benne van y_2.

Először nézzük meg mi van, ha ez az összekötés nem igaz! Tegyük fel, hogy

$$A_{12} = A_{21} = 0$$

$$y_1' = A_{11}y_1$$
$$y_2' = A_{22}y_2$$

Erre azt mondjuk, hogy az egyenletrendszer szétcsatolódik. Ilyenkor

$$y_1(x) = c_1 e^{xA_{11}}$$

$$y_2(x) = c_2 e^{xA_{22}}$$

Az egyszerű eset tehát akkor jön, ha A mátrix diagonális, tehát

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

De mivel a tisztességes mátrixok nem ilyenek, nézzük meg a többi esetet.

Tegyük fel, hogy $A_{21} = 0$, $A_{12} \neq 0$

$$y_1' = A_{11}y_1 + A_{12}y_2$$

$$y_2' = A_{22}y_2$$

Ezt részleges szétcsatolódásnak nevezzük. Ilyenkor az y_2'-t meg lehet oldani magában.

$$y_2 = c_2 e^{A_{22}x}$$

$$y_1' = A_{11}y_1 + A_{12}c_2 e^{A_{22}x}$$

A végére pedig a következő adódik

$$y_1' - A_{11}y_1 = A_{12}c_2 e^{A_{22}x}$$

Ez pedig egy állandó együtthatójú, elsőrendű, lineáris egyenlet, ami inhomogén.

Nézzük a legáltalánosabb esetet. Tegyük fel, hogy $A_{12} \neq 0$, $A_{21} \neq 0$

$$y_1' = A_{11}y_1 + A_{12}y_2$$

$$y_2' = A_{21}y_1 + A_{22}y_2$$

Fejezzük ki y_1'-ből az y_2-t.

$$y_2 = \frac{y_1' - A_{11}y_1}{A_{12}}$$

Ezt most szépen bele az y_2'-be

$$\frac{y_1'' - A_{11}y_1'}{A_{12}} = A_{21}y_1 + A_{22}\frac{y_1' - A_{11}y_1}{A_{12}}$$

Szorozzuk meg az egészet A_{12}-vel

$$y_1'' - A_{11}y_1' = A_{12}A_{21}y_1 + A_{22}(y_1' - A_{11}y_1)$$

$$y_1'' - (A_{11} + A_{22})y_1' + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})y_1 = 0$$

Ez egy állandó együtthatójú, másodrendű egyenlet!

$$y_1'' - spur(A)y_1' + det(A)y_1 = 0$$

Ne felejtsük el, hogy $y_1 = e^{\lambda x}$. Írjuk fel A karakterisztikus polinomját:

$$\lambda^2 - spur(A)\lambda + det(A) = 0$$

Ezzel ekvivalens alak a

$$det(A - \lambda) = 0$$

Ebből látható, hogy λ egy sajátértéke az A mátrixnak! Ha az A karakterisztikus polinomját megoldjuk, kapunk egy λ_1, λ_2 megoldást.

Tegyük fel, hogy $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ekkor

$$y_1(x) = C_{11}e^{\lambda_1 x} + C_{12}e^{\lambda_2 x}$$

Mivel előbb, ha nem y_2-t fejeztem volna ki, hanem y_1-et, ugyanide jutottam volna, ezért felírható, hogy

$$y_2(x) = C_{21}e^{\lambda_1 x} + C_{22}e^{\lambda_2 x}$$

Így most viszont egy kicsit sok a konstans! (A C értékek konstansok, a sok index a megkülönböztetésre szolgál!)

$$y_i(x) = C_{i1}e^{\lambda_1 x} + C_{i2}e^{\lambda_2 x}$$

$$y_i'(x) = C_{i1}\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_{i2}\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij}y_j = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}e^{\lambda_1 x} + C_{12}e^{\lambda_2 x} \\ C_{21}e^{\lambda_1 x} + C_{22}e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

$$C_{i1}\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_{i2}\lambda_2 e^{\lambda_2 x} = \sum_j A_{ij}\left(c_{j1}e^{\lambda_1 x} + C_{j2}e^{\lambda_2 x}\right)$$

Ez az egyenlőség csak akkor igaz, ha

$$C_{i1}\lambda_1 = \sum_j A_{ij}C_{j1}$$

$$C_{i2}\lambda_2 = \sum_j A_{ij}C_{j2}$$

Tehát a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor a C_{i1}, értelemszerűen a λ_2-höz pedig a C_{i2}. A menet tehát a következő volt:

$$A_{ij} \to \lambda_1\lambda_2 \to c_1, c_2$$

Közben a C_{i1}-ből c_1 vektort csináltunk, hogy jobb legyen írni. Összefoglalásul:

$$Ac_1 = \lambda_1 c_1$$

$$Ac_2 = \lambda_2 c_2$$

Ahol λ a sajátérték, c a sajátvektor, az A pedig egy mátrix. Az eredetileg felbukkant négy konstansból kettő lett, aminek örülünk, hiszen pont ennyit vártunk!

6.3.1. Példán keresztül

Legyen a vizsgálandó rendszer:

$$2y_1' = y_1 + 3y_2$$

$$2y_2' = 3y_1 + y_2$$

A jobb oldal lineáris y_1-ben, tehát felírható $y_i = \sum_j A_{ij} y_j$ alakban.

$$y_1' = \frac{1}{2} y_1 + \frac{3}{2} y_2$$

$$y_2' = \frac{3}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$spur(A) = 1$$

$$det(A) = -2$$

$$det(\lambda - A) = 0$$

$$\lambda^2 - spur(A) + det(A) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Próbáljuk meg faktorizálni, hiszen a sajátértékeket keressük éppen:

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Ebből megkapható, hogy $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -1$ Most szépen keressük meg a sajátvektorokat!

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ebből szépen látszik, hogy az egyik sajátvektor például a $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hiszen ezzel megszorozva lesz a determináns nulla! A másik sajátvektor pedig a $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Így már fel lehet írni a megoldást, ami a következő:

$$y_i = c_1 a_i^{(1)} e^{\lambda_1 x} + c_2 a_i^{(2)} e^{\lambda_2 x}$$

Esetünkben tehát

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

- **n>2 eset:**

$$y_i' = \sum_j A_{ij} y_j$$

Ilyenkor a recept a következő:

  – Meg kell keresni az A sajátértékeit és saját vektorait.

- $det(\lambda - A) = 0$
- TFH $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$, és valósak!

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_i^{(j)} e^{\lambda_j x}$$

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^{(j)} e^{\lambda_j x}$$

  Az egyenletben szereplő vastag betűk vektorokat jelölnek. Ezekből az egyenletekből a $c_1, ..., c_n$ konstansok szépen kiszedhetők.

7. Hetedik előadás

Ide kell még bevezető szöveg, valamint a felsorolás is érdemel némi magyarázatot.

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + p_1 y' + p_0 y = 0$$

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j$$

Ez az egész felírható vektorosan is

$$\underline{y}'(x) = \mathbf{A}\underline{y}$$

Itt megjegyzem, hogy vastag betűkkel a mátrixokat jelölöm. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ diagonizálható.

$$\mathbf{A} = \mathbf{RDR}^{-1}$$

létezik, úgy hogy $\mathbf{D}$ diagonális. Tehát $\mathbf{D}$-ben találhatók a sajátértékek, $\mathbf{R}$-ben pedig a sajátvektorok.

$$\underline{y}'(x) = \mathbf{RDR}^{-1}\underline{y}$$

$$\mathbf{R}^{-1}\underline{y}'(x) = \mathbf{DR}^{-1}\underline{y}$$

Vezessük be az $\mathbf{R}^{-1}\underline{y} = \underline{v}$ jelölést és alkalmazzuk ezt az egyenletre.

$$\underline{v}' = \mathbf{D}\underline{v}$$

Komponensenként pedig:

$$v_i'(x) = \lambda_i v_i(x)$$

Csatolt, n függvényből álló egyenletrendszer szétcsatolódik, n független egyenletre esik szét.

$$v_i(x) = e^{\lambda_i x} c_i$$

A fenti egyenletben c_i szabad konstans.

$$\underline{v} = \mathbf{R}^{-1}\underline{y}$$

$$\underline{y} = \mathbf{R}\underline{v}$$

Az általános megoldás pedig:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} v_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} e^{\lambda_j x} c_j = y_i(x)$$

- Ha minden λ_i valós, akkor készek vagyunk, minden c_j valós.
- Ha van komplex λ_i, $(\lambda = \alpha \pm i\beta)$, akkor n darab valós konstans marad.
- $$\underline{y}(x) = \mathbf{A}\underline{y}(x)$$
  1 dimenzióban: $y = ay \to y(x) = ce^{ax}$, akkor $\underline{y}(x) = e^{x\mathbf{A}}\underline{y}_0$, ahol $e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$
- $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y}$, $\underline{y}(0) = y_0$, akkor $\underline{y}(x) = e^{x\mathbf{A}} y_0$
- $\underline{y}'(x) = \underline{F}(\underline{y})$, ahol $\underline{F}$ egy vektorfüggvény, ami $\underline{y}$-tól nemlineárisan is függhet.
  $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f'' + ... + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$
  Taylor-sor
- $\underline{y}(x) = y_0$ Tegyük fel, hogy a nem-lineáris egyenletnek van ilyen konstans megoldása.
  $$\underline{y}' = 0 = \underline{F}(\underline{y_0})$$
- Konstans megoldás akkor van, ha $\underline{F}$-nek van zérushelye.
- Zérushely: $\underline{F}(\underline{y}) = 0$-t kell megoldani, ami n darab egyenletet jelent, n darab ismeretlenre.
- Többnyire generikusan izolált pontokat kapunk.

7.1. Degenerált esetektől eltekintve

$$\underline{y}(x) = \underline{y}_0$$

- Mit csinál a megoldás $\underline{y_0}$ körül? Sorba kell fejteni $\underline{F}(\underline{y})$-t

$$F_i(\underline{y}) = F_i(\underline{y}_0) + (\underline{y} - \underline{y}_0)\frac{\partial}{\partial y_j}F_i(y_0) + ...^7$$

$$y_i' = F_i(y_0) + (y_j - y_{0j})\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0)$$

Mivel az $F_i(y_0)$ helyen nulla, felírhatjuk a következőt:

$$y_i' = 0 + (y_j - y_{0j})\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0)$$

Látható, hogy el van tolva. Vezessünk be egy új változót, legyen

$$v_j(x) = y_j(x) - y_{0j}$$

Így pedig

$$v_i' = v_j\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0)v_j = v_i'$$

Ez egy elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris egyenletrendszer. Megoldása:

$$v_j(x) = \sum_j R_{ij}e^{\lambda_j x}c_j$$

$$R_{ij} \to \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0)$$

A fentiek a mátrix saját vektorai!

$$\lambda_j \to \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y_0)$$

Ezek meg a mátrix sajátértékei!

- Nemlineáris egyenlet linearizált alakja y_0 körül
- $y_i(x) = y_{0i} + v_i(x)$, ahol $v_i(x)$ az eltérés.
- Linearizált egyenlet megoldásának viselkedése
    1. λ_i valós és $\lambda_i < 0$, akkor $x \to \infty$ esetben $v \to 0$. Ezt exponenciálisan vonzó fixpontnak nevezzük, jó a lineáris közelítés.
    2. λ_i valós, és létezik $\lambda_j = 0$, de a többi $\lambda_i < 0$, akkor a nulla sajátérték saját vektorához tartozó irányban (lineáris rendben) nem változik a megoldás, a többi irányban nullához tart! A $\lambda_i = 0$ irányt marginális iránynak nevezzük.

[7] A többi tagot elhanyagoltuk!

3. Valós λ_i, legyenek $\lambda_j > 0$, $\lambda_k < 0$, valamint $\lambda_n = 0$. Ilyenkor $x \to \infty$ esetben λ_j irányában "felrobban" a megoldás. λ_k irányokban $v \to 0$, valamint λ_m irányban első rendben nem változik a megoldás (mint az előbb).

   $x \to \infty$ értékekre a $\lambda_i < 0$ irányokban jó a lineáris közelítés (elég nagy x-re).

   $x \to \infty$ értékekre a $\lambda_j > 0$ irányokban nem jó a lineáris közelítés (taszító irány).

4. Ha vannak komplex λ_i-k, akkor a korábbi osztályozás helytálló $Re(\lambda_i)$-re.
   - $\lim(\lambda_i) \neq 0$ esetben $e^{\lambda_i x} \to \sin(\lambda_i x)$, valamint $\cos(\lambda_i x)$ oszcilláló megoldások!
   - $Re(\lambda) < 0$ és $Im(\lambda) \neq 0$ a vonzó megoldás.
   - $Re(\lambda) > 0$ és $Im(\lambda) \neq 0$ a taszító megoldás.

- A vonzó - taszító helyek megfelelnek az $(x \to \infty)$ - $(x \to -\infty)$ helyzetnek.

- Nem lineáris egyenletek megoldásainak globális szerkezetét ilyen módon fel tudjuk térképezni úgy, hogy x pontok körül linearizálunk.

- A fixpontok száma és a vonzó/taszító irányok száma nem tetszőleges, hanem globális kényszerek vannak rájuk.

- Előfordulhat a következő:
$$F_i(\underline{y}) = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_i}$$
  ahol Φ egy potenciál. Ilyenkor
$$A_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j}(\underline{y}_0)$$
  A fixpont a következő:
$$F_i(\underline{y}_0) = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(\underline{y}_0)$$
  A fixpontok tehát a Φ potenciál szélsőértékei!

- A vonzó/taszító pontok analízise megfelel annak a vizsgálatnak, hogy az $\underline{y}_0$ fixpontok stabilak, minimumok, marginálisak, nyeregpontok, vagy instabilak-e?

7.1.1. 2 dimenziós példák

Dolgozzunk az $n = 2$ síkban! Az $Im(\lambda) = 0$

- A két sajátérték pozitív = taszító irány.

- A két sajátérték negatív = vonzó irány.

- Az egyik pozitív, a másik negatív = van vonzó és taszító is.

Ha az $Im(\lambda) \neq 0$, akkor

- Két pozitívra a pontból kifelé taszítás csigaalakban.
- Két negatívra a pontba befelé vonzás csigaalakban.
- Az egyik pozitív, a másik negatív: ilyen nem lehet.

7.1.2. Például

$x \to t$, $(y_1, y_2) \to (u, v)$

$$\frac{du}{dt} = u(v-1)$$
$$\frac{dv}{dt} = 4 - u^2 - v^2$$

- Hol vannak a jobb oldal nullhelyei?

$$F_u = (u)(v-1) = 0$$

$$F_v = 4 - u^2 - v^2 = 0$$

  - A második egyenletből $u = 0$, $v = \pm 2$. Ezt visszahelyettesítve az elsőbe $v = 1$, $u = \pm\sqrt{3}$

- Ez jó, hiszen ebből 4 fixpontot kapok!

$$p_1 = (0, 2)$$

$$p_2 = (0, -2)$$
$$p_3 = (\sqrt{3}, 1)$$
$$p_4 = (-\sqrt{3}, 1)$$

  Ezek konstans megoldások.

- Minden x pont körül linearizáljuk a megoldást!

$$\frac{du}{dt} = F_u$$

$$\frac{dv}{dt} = F_v$$
$$\frac{\partial F_u}{\partial u} = v - 1$$
$$\frac{\partial F_v}{\partial v} = -2v$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial v} = u$$
$$\frac{\partial F_v}{\partial u} = -2u$$
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} v-1 & u \\ -2u & -2v \end{pmatrix}$$

A fenti mátrixot a fixpontokban kell nézni!

$$A(p_1) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahol $+1$ a taszító és -4 a vonzó pont.

$$A(p_2) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Itt már -3 a vonzó és 4 a taszító.

$$A(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(p_4) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Az $A(p_1)$ és $A(p_2)$ mátrixokban szépen látszanak a sajátértékek, viszont a maradék kettőben nézzük meg!

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = -1 \pm i\sqrt{5}$$

Megjegyzések:

- A fixpontok körül vannak vonzási, vagy taszítási tartományok.
- Vonzási, vagy taszítási tartományokat szeparátrixok választják el.
- Globális információt nyerünk az összes x pont körüli lokális vizsgálatból.

8. Nyolcadik előadás

8.1. Emlékeztető

Elsőrendű differenciálegyenlet $\longleftrightarrow$ 1 paraméteres görbesereg! Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása $y(x, c)$. Mivel mi másodrendű egyenletekkel foglalkoztunk, ezek általános megoldása $y(x, c_1, c_2)$.

8.2. Kétparaméteres görbesereg

$\Phi(x, c_1, c_2)$, itt is érvényes a megállapítás, hogy ha van egy másodrendű megoldásom a differenciálegyenletre, az felfogható úgy, mint görbesereg. Nézzük meg hogyan megy ez visszafelé! Az egyik oldalon lesz egy másodrendű differenciálegyenlet $F(x, y, y', y'') = 0$, valamint ennek egy általános megoldása $\Phi(x, y, c_1, c_1)$. Ez kapcsolatban van a 2 paraméteres görbeseregekkel: $\Phi(x, y, c_1, c_2)$. Miután ezt letisztáztuk, továbbléphetünk. Az egyenletből a görbesereg felé mutató irány nyilvánvaló, ezért most a másik irányt nézzük meg!

8.2.1. Görbeseregből a differenciálegyenlet felé

Ha adott a 2 paraméteres görbesereg: $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$.

$$\frac{d}{dx}\Phi = 0$$

$$\frac{d}{dx}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Tehát van egy $\Phi = 0$ egyenletünk, valamint egy $\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ egyenletünk. Ki kell számítanunk még a $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$ értéket! Rendelkezésünkre áll három egyenletet, melyekből mind a három azonosan egyenlő nullával! Kiszemelünk kettőt a háromból, amit arra használunk, hogy megoldjuk c_1, c_2-re, majd beírva a harmadikba megkapjuk a másodrendű egyenletet. Az első kettőből kifejezett c_1 és c_2 függeni fog x, y, y'-től, majd miután ezt behelyettesítjük a harmadikba, ott már nem fog szerepelni a c_1, c_2. Eredményül tehát az $F(x, y, y', y'') = 0$ alakú, másodrendű differenciálegyenlethez jutunk!

Világos tehát, hogy az n paraméteres görbeseregből megkapható az n-ed rendű differenciálegyenlet! Ismét csak az egyik irányt kell belátni, hiszen a másik nyilvánvaló! A belátandó irány:

$\Phi(x, y, c_1, ..., c_n) \to \Phi = 0$, továbbá $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ és minden deriváltra $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$. Ez nem más, mint a nullától az n. deriváltig n darab egyenlet. Ezeket megoldjuk a $c_1, ..., c_n$-re, majd ugyanúgy járunk el, mint az előző (másodrendű) esetben!

8.2.2. Példán keresztül

$$y = c_1 x + c_2 e^x$$

$\Phi = 0$, $y - c_1 x - c_2 e^x = 0$. Most megcsináljuk az egyenleteket!

$$y' = c_1 + c_2 e^x$$

$$y'' = c_2 e^x$$

$$y = c_1 x + c_2 e^x$$

Megvan tehát a három (rendre 1,2,3) egyenlet, ezekkel fogunk dolgozni.

A másodikból:$c_2 = y''e^{-x}$.

Az elsőből: $y' = c_1 + y''$, amiből $c_1 = y' - y''$.

A harmadikból pedig: $y = (y'-y'')x+y''$, ahogy vártuk, ebből felírható a lineáris differenciálegyenletünk:

$$y''(1-x) + xy' - y = 0$$

8.2.3. Egy általánosabb példán keresztül

Az alapproblémánk: szeretnénk felírni egy differenciálegyenletet, ha megadtak nekünk egy alaprendszert. *Ez plusz pontos ZH-feladat is volt 2012-ben.* Legyen tehát adott $(f_1(x), f_2(x))$. Tudjuk, hogy $W \neq 0$.

Az első egyenletünk:

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

A második:

$$y' = c_1 f_1' + c_2 f_2'$$

A harmadik pedig:

$$y'' = c_1 f_1'' + c_2 f_2''$$

Innen megint szeretnénk kifejezni a c_1, c_2 elemeket!

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ebből

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_2' & -f_2 \\ -f_1' & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Innen megkapjuk a c_1, c_2 értékeket!

$$c_1 = \frac{f_2'y - f_2y'}{W}$$

$$c_2 = \frac{f_2y' - f_2'y}{W}$$

Ezeket szépen beleteszem az $y'' = ...$-be, majd számolgatok.

$$Wy'' = y(f_2'f_1'' - f_1'f_2'') + y'(f_1f_2'' - f_2f_1'')$$

$$W(f_1, f_2)y'' = yW(f_2', f_1') + y'W(f_1, f_2)'$$

Ez pedig egy másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet, aminek alaprendszere az f_1, f_2.

8.2.4. Példa: nemlineáris eset

Adott az egységnyi sugarú, tetszőleges középpontú körök serege, ebből szeretnénk előállítani a differenciálegyenletet, aminek pont ez a megoldása! Az ilyen körök egyenlete: $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = 1$ - ez lesz az egyik használt egyenletünk! Csináljuk, amit eddig szoktunk, deriváljuk.

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)y' = 0$$

Ezt átalakítjuk kicsit

$$x-c_1+(y-c_2)y' = 0$$

A második derivált

$$1+y'^2+(y-c_2)y'' = 0$$

Ezekből szépen ki kell fejezgetni a c_1, c_1 értékeket.

$$c_1 = \frac{x-y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$c_2 = \frac{1+y'^2+yy''}{y''}$$

Ezekkel visszatérünk a legelső egyenletünkbe, amiből kiindultunk! Az eredmény pedig a következő képpen alakul (már egyszerűsítve)

$$y'^2 = y'^2(1+y'^2)^2+(1+y'^2)^2 = (1+y'^2)^3$$

Ez a tetszőleges középpontú, egységnyi sugarú körök differenciálegyenlete.

8.3. Parciális differenciálegyenletek

Eddig közönséges differenciálegyenletekkel foglalkoztunk, melyek egy változósak voltak ($y_i(x)$). A parciálisoknál több változóról beszélünk $u(x_1, x_2)$.

8.3.1. Elsőrendű parciális differenciálegyenlet

Két változótól függő függvény $u(t, x)$

$$F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Tárgyaljuk a kvázilineáris, elsőrendű parciális egyenlet esetét. Ez egy megszorítás, hogy F lineáris $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$-ben. A kvázilineáris egyenlet alakja

$$\alpha(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}-\gamma(t,x,u) = 0$$

Itt a gammás rész az inhomogén tag, az $\alpha(t,x,u), \beta(t,x,u), \gamma(t,x,u)$-k pedig tetszőleges függvények.

Az ilyen típusú egyenleteket a karakterisztikák módszerével oldjuk meg.

8.3.2. Karakterisztikák módszere

Nézzünk közönséges differenciálegyenlet-rendszert, melynek változója s.

$t(s), x(s), u(s)$

$$\frac{dt}{ds} = \alpha(t, x, u)$$
$$\frac{dx}{ds} = \beta(t, x, u)$$
$$\frac{du}{ds} = \gamma(t, x, u)$$

Mi itt a kapcsolat? A közönséges differenciálegyenlet-rendszerek megoldásai görbék $(t(s), x(s), u(s))$, a parciális differenciálegyenlet megoldása $(u(t, x))$ pedig egy felület. Írjuk fel a felület érintősíkját:

$$(t, x, u(t, x)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Ami a jobb oldalon van, az a két független irányba vett derivált, ebből megkapjuk az érintősíkot. A felület érintősík normálisa:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ -1 \end{pmatrix}$$

A görbék érintője pedig

$$\left(\frac{\partial t}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}\right) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

A parciális differenciálegyenlet megoldásfelületének normálisa merőleges a görbe érintőjére.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, -1\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma = 0$$

A fenti a fő állításunk ebben a témakörben. Ennek a segítségével kapjuk meg az eredményeinket. Tanulság: a karakterisztikus görbe érintője benne van a parciális differenciálegyenlet megoldásfelületének érintő síkjában! Ha a görbe a felületről indul, akkor benne is marad!

Vegyük észre, hogy

$$\frac{dt}{ds} = \alpha(t, x, u); \frac{dx}{ds} = \beta(t, x, u); \frac{du}{ds} = \gamma(t, x, u)$$

A jobb oldalon tehát nem szerepel s. Általános megoldás:

1.
$$t(s) = f_1(s - c_1, c_2, c_3)$$

2.
$$x(s) = f_2(s - c_1, c_2, c_3)$$

3.
$$u(s) = f_3(s - c_1, c_2, c_3)$$

Eltolási szimmetria van s-ben. A c értékek tetszőleges konstansok. Az 1,2,3 egyenletekből meghatározzuk a c értékeket mint (t, x, u) függvényeit.

$$t = f_1$$

$$x = f_2$$

$$u = f_3$$

A fenti egyenletrendszerből $s - c_1 = g(t, c_2, c_3)$. Ha ezzel behelyettesítünk a 2, 3-ba, akkor elimináltuk az $s - c_1$-et.

$$x = f_2(g(t, c_2, c_3), c_2, c_3)$$

$$u = f_3(g(t, c_2, c_3), c_2, c_3)$$

Ezt szépen megoldjuk (c_2, c_3)-ra, amiből

$$c_2 = \varphi_1(t, x, u)$$

$$c_3 = \varphi_2(t, x, u)$$

Ezek a Ψ értékek pedig a karakterisztikus görbe mentén állandóak! Ezek után tetszőleges függvényét veszem:

$$\Psi(\varphi_1(t, x, u), \varphi_2(t, x, u)) = 0$$

Ez pedig $u(t, x)$-et implicit módon definiálja és tetszőleges Ψ kétváltozós függvénnyel a parciális differenciálegyenlet megoldása.

9. Kilencedik előadás

9.1. Folytatás: parciális differenciálegyenletek, kvázi lineáris eset

Szeretnénk látni, hogy az u közvetlenül megoldja a parciális differenciálegyenletet.

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = 0$$

$$\frac{d\varphi_2}{ds} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{du}{ds} = 0$$

A görbe mentén vettük a deriváltat. Az egyenletet átírjuk, felhasználva hogy szerepelnek benne az α, β, γ értékek.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\alpha + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\gamma = 0$$

Ez természetesen a φ_2 mennyiségre is igaz.

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\alpha + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\beta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\gamma = 0$$

Az u-t a t-nek és az x-nek a változójának tekintjük. Tudjuk, hogy $\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Nézzük meg ezt pontosan.

$$\frac{\partial\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial t} = 0$$

Itt azért parciálisan számolunk, mert csak t szerint kell deriválni!

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1(t, x, u(t, x))}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2(t, x, u(t, x))}{dt} = 0$$

Itt már azért teljes deriváltat nézünk, mert minden t függést figyelembe kell vennünk!

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0$$

Hogy ne kelljen folyton kiírni ezt az egyenletet, nevezzük el ezt **-nak

Ugyanez viszont felírható a $\frac{\partial\Psi(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial x} = 0$-ra is.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0$$

Ezt pedig nevezzük el *-nak.

Tudjuk, hogy $(*) = 0$ és $(**) = 0$, tehát $\beta(*) + \alpha(**) = 0$ is teljesül. Írjuk végig.

$$\partial_1\Psi\left[\beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] +$$
$$+\partial_2\Psi\left[\beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0$$

Átírjuk egy szemléletesebb alakba!

$$\partial_1\Psi\left[-\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \partial_2\Psi\left[-\gamma\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} + \beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0$$

Azt használtuk ki, hogy a φ_1, φ_2 értékek a görbe mentén nullák, ki lehetett váltani néhány értéket az egyenletből.

$$\partial_1 \Psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \right) + \partial_2 \Psi \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \right) = 0$$

$$\left(\partial_1 \Psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \partial_2 \Psi \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \right) = 0$$

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \right) = 0$$

Tehát, a vége nem más, mint

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma$$

9.1.1. Megoldási módszerek

- Elsőként felírjuk a karakterisztikus görbét

  $$\dot{t} = \alpha, \dot{x} = \beta, \dot{u} = y$$

  Ne feledjük, hogy a pont azt jelenti, hogy $\frac{d}{ds}$.

- Kell majd még $\varphi_1(t, x, u)$ és $\varphi_2(t, x, u)$. Ezek konstansok (s függetlenek).

- Minket nem az s függés érdekel, hanem csak a φ_1, φ_2 értékek.

  Erre két módszer létezik.

  1. $$t(s) = f_1(s - c_1, c_2, c_3)$$
     $$x(s) = f_2(s - c_1, c_2, c_3)$$
     $$u(s) = f_3(s - c_1, c_2, c_3)$$

     Elsőrendű, 3 függvényre vonatkozó görbe differenciálegyenlet rendszerét, meg kell oldani. Ha megvan a megoldás, akkor az ilyen alakban írható. Pontosan ezt várjuk, hiszen az általános megoldásban kell 3 szabad paraméter.

     – A 3 konstans közül az egyik $s - c_1$ alakban bukkan fel. A görbére vonatkozó differenciálegyenlet rendszer speciális alakú.

       $$\frac{dt}{ds} = \alpha(t, x, u)$$

       $$\frac{dx}{ds} = \beta(t, x, u)$$

$$\frac{du}{ds} = \gamma(t, x, u)$$

Látható, hogy a rendszer olyan, hogy a jobb oldalon nem szerepel s. Tegyük fel, hogy van egy $t_0(s)$, $x_0(s)$, $u_0(s)$ partikuláris megoldásunk, akkor nyilvánvaló, hogy ebből $t_0(s + c)$, $x_0(s + c)$, $u_0(s + c)$ is partikuláris megoldás, tetszőleges c-re.

– Tehát, ebben az eljárásban a 3 egyenletből kiválasztunk egyet, amit megoldunk c_1-re. Például

$$t = f_1(s - c_1, c_2, c_3)$$

$$s - c_1 = g_1(t, c_2, c_3)$$

Az így kapott $s - c_1$-et behelyettesítem a maradék két egyenletbe.

$$x = f_2(g_1(t, c_2, c_3), c_2, c_3)$$

$$u = f_3(g_1(t, c_2, c_3), c_2, c_3)$$

Ez már két egyenlet két ismeretlenre! Ezekből meghatározható a

$$c_2 = \varphi_1(t, x, u)$$

$$c_3 = \varphi_2(t, x, u)$$

Így pedig az általános megoldás

$$\Psi(\varphi_1(t, x, u), \varphi_2(t, x, u)) = 0$$

Ez pedig impliciten meghatározza u-t.

2. Már a differenciálegyenletből eliminálhatjuk az s-t.

$$\frac{dt}{ds} = \alpha, \frac{dx}{ds} = \beta, \frac{du}{ds} = \gamma$$

Két egyenletpárt kiválasztva, hányadost képezve s eliminálható! Figyeljünk arra, hogy nincs általános recept. Úgy érdemes elvégezni az osztást, hogy könnyű legyen számolni a maradékkal. A mi példánkban legyen ez:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\gamma(t, x, u)}{\alpha(t, x, u)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta(t, x, u)}{\alpha(t, x, u)}$$

Ez $u(t)$-re és $x(t)$-re vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer, amiben kettő szabad konstans jön elő az általános megoldásban.

$$U = F_n(t, c_1, c_2)$$

$$X = F_x(t, c_1, c_2)$$

A két eljárás ekvivalens. Ezt c_1-re és c_2-re megoldva megkapjuk, hogy

$$c_1 = \varphi_1(t, x, u)$$

$$c_2 = \varphi_2(t, x, u)$$

Ismétlem: mindegy mit osztok mivel, mindig azt, amivel aztán a legkönnyebb dolgozni!

9.1.2. Tanulságok a kvázilineáris helyzetből

- Egyszerű, mert teljes egészében visszavezethető közönséges differenciálegyenlet rendszerre (ami a karakterisztikus görbe). Ha ezt tudjuk kezelni, akkor meg is van a megoldásunk.
- Általában a parciális differenciálegyenlet általános megoldása tetszőleges függvényt tartalmaz. Közönséges differenciálegyenletek esetén véges sok, tetszőleges konstans szerepel a megoldásban.

  Ebben a témakörben teljes függvényekről kell megmondani, hogy milyenek legyenek, ezért végtelen feltételt kell kiróni az általános megoldás partikulárissá tételéhez.
- $u(t, x) \rightarrow$ általában egy görbe mentén kell kell megmondani a megoldást, hogy egyértelmű legyen a függvény.
- Ha a parciális differenciálegyenlet valamilyen zárt tartományon van definiálva, akkor peremfeltétellel tudom egyértelműsíteni.
- Általános tételek a megoldás létezésére és/vagy egyértelműségére nincsenek. Mindig kell tudni az egyenletről valamit, hogy mondhassunk bármit is.
- Különböző eseteket kell nézni, amelyeket mindig máshogy kell kezelni.

9.1.3. Példán keresztül

Legyen a vizsgált egyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Ez így okés, mert az $u(x, y)$. Nézzük sorban:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = c(y)$$

Erről tudom, hogy x-től biztos független, viszont y-tól függhet. Tehát

$$\frac{\partial u}{\partial y} = c(y)$$

Ezt y-ban integráljuk!

$$u(x,y) = \int c(y)dy + \tilde{c}(x)$$

Itt az integrandusban szereplő kifejezés maga a c_1, a tildés pedig az integrálásból jön, ez x-től nyugodtan függhet. Átnevezzük őket.

$$u(x,y) = c_1(y) + c_2(x)$$

Látható, hogy az van x és y függés is, erre figyelni!

Nézzünk példát kezdeti feltételre, a fenti számolás alapján!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Legyen: $u(x,0) = \sin(x)$ és $u(0,y) = y^2$

Az általános megoldás az előbbiek alapján

$$u(x,y) = c_1(y) + c_2(x)$$

$$u(0,y) = c_1(0) + c_2(y) = y^2 \rightarrow c_2(y) = y^2 - c_1(0)$$

$$u(x,0) = c_1(x) + c_2(0) = \sin(x) \rightarrow c_1(x) = \sin(x) - c_2(0)$$

A partikuláris megoldás tehát:

$$u(x,y) = \sin(x) + c_1(0) + y^2 - c_1(0) = \sin(x) + y^2$$

Nézzünk egy másik példát

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Legyen $\frac{\partial u}{\partial y} = v(x,y)$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v(x,y)$$

Látható, hogy nincs explicit y függés, az egyenlet szétválasztható. Tegyük meg és integráljuk!

$$\frac{dv}{v} = -2xvdx$$

$$ln(v) = -x^2 + ln(c(y))$$

$$V(x) = c(y)e^{-x^2}$$

Ez tetszőleges $c(y)$ függvénnyel oké. Persze, még tudjuk, hogy $v = \frac{\partial u}{\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = c(y)e^{-x^2}$$

Ezt integrálhatjuk y szerint:

$$u(x, y) = \left[\int c(y)dy\right] e^{-x^2} + c_2(x)$$

A zárójeles részt nevezzük el $c_1(y)$-nak, így pedig az általános megoldás

$$u(x, y) = c_1(y)e^{-x^2} + c_2(x)$$

Az általános megoldásban két tetszőleges függvény szerepel.

Egy harmadik példa - hozzáfűzött kezdeti érték feladat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$u(x, \pi/2) = x^2$$
$$u(0, y) = \cos(y)$$

Tudjuk, hogy:

$$u(x, y) = c_1(y)e^{-x^2} + c_2(x)$$
$$u(0, y) = c_1(y) + c_2(0) = \cos(y)$$

Ebből pedig a c_1 meghatározható!

$$c_1(y) = \cos(y) - c_2(0)$$
$$u(x, y) = [\cos(y) - c_2(0)]\, e^{-x^2} + c_2(x)$$
$$u(x, \pi/2) = -c_2(0)e^{-x^2} + c_2(x) = x^2$$
$$c_2(x) = x^2 + c_2(0)e^{-x^2}$$
$$c_2(0) = c_2(0) = a$$

Tehát

$$c_2(x) = x^2 + ae^{-x^2}$$

A végeredmény tehát

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\cos(y) - a)e^{-x^2} + x^2 + ae^{-x^2} = \mathbf{e^{-x^2}} \cos(\mathbf{y}) + \mathbf{x^2}$$

10. Tizedik előadás

10.1. Szétválasztható parciális differenciálegyenletek

Van, ahol működik a dolog, de ott sem biztos, hogy az általános megoldást kapjuk eredményül. Ez nem egy általános módszer, viszont Ansatz-nak jó!

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

szorzat alakban tételezzük fel a megoldást. Akkor van esély arra, hogy működik, ha az egyenlet a következő alakra írható:

$$f_1(T, \dot{T}, ..., t) = f_2(X, X', X'', ..., x)$$

Tegyük fel, hogy ilyen alakra hozható. Ilyenkor szétválasztható. Ezzel ekvivalens alak a

$$\lambda = f_1(T, \dot{T}, ..., t)$$
$$\lambda = f_2(X, X', X'', ..., x)$$

Ez két közönséges differenciálegyenlet, ahol λ konstans. Ezek teljesen szétcsatolódnak, egyik sem tud a másikról, csak egy közös konstansban hasonlítanak.

- Ha vannak kezdeti, vagy peremfeltételek, akkor azok ezt a λ-t meghatározhatják, vagy bizonyos feltételeket tehetnek rá (például, hogy pozitív, negatív, stb...)
- Ha az eredeti parciális differenciálegyenlet lineáris és kapunk több megoldást, akkor azoknak az összege is megoldás.
- Ha szétválasztható módszerrel kapunk egy ilyen megoldást

  $$u_1(x,t) = X_1(x)T_1(t)$$

  $$u_2(x,t) = X_2(x)T_2(t)$$

  akkor

  $$u(x,t) = X_1(x)T_1(t) + X_2(x)T_2(x)$$

  is megoldás!
- Lineáris esetben a szétválasztható Ansatz-ból általánosabb megoldásokat is tudunk kapni.
- Előfordulhat, hogy lineáris esetben az általános megoldást is megkaphatjuk.

10.1.1. Példa 1

Nézzünk egy kvázi lineáris egyenletet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

Látható, hogy az összegtől nem függ, tehát maximum a különbségtől függhet, a megoldást így várjuk:

$$u(t,x) = f(x-ct)$$

tetszőleges f-re! Oldjuk meg szétválasztható módszerrel:

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

$$\dot{T}X + cTX' = 0$$

$$\frac{\dot{T}}{T} + c\frac{X'}{X} = 0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X'}{X}$$

Nevezzük el $\frac{1}{c}\frac{\dot{T}}{T} = c_1$-nek és $\frac{X'}{X} = -c_1$-nek. Ezzel pedig a feladat szétesik két egyenletre.

$$\frac{1}{c}\dot{T} = c_1 T \longrightarrow T(t) = c_2 e^{c_1 ct}$$

Valamint, a másik része

$$X' = -c_1 X \longrightarrow X(x) = c_3 e^{c_1 x}$$

Ebből pedig felírjuk a következőt

$$u(t,x) = c_2 c_3 e^{c_1(ct-x)}$$

Nevezzük el $c_2 c_3$ értéket c_2-nek, egy egyszerűbb alakhoz jutunk

$$u(t,x) = c_2 e^{c_1(ct-x)}$$

ahol a c értékek tetszőleges konstansok! Ha ezekből kitalálunk egy csomó c_1^i és c_2^i, $i = 1,2,3...$ számot, akkor

$$u(t,x) = \sum_i c_2^i e^{c_1^i(ct-x)}$$

Látható, hogy a szétválasztás módszerével sok megoldást meg lehet találni.

10.1.2. Második példa - hővezetés

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

Ennél az egyenletnél határfeltételek vannak érvényben. Ezek a következők: $u(t \to \infty, x)$ véges, $u(t,0) = u(t,L) = 0$ és $u(0,x) = \varphi(x)$, ahol $\varphi(x)$ egy adott függvény.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{T}X$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma T X''$$

$$\dot{T}X = \gamma T X''$$

Leosztunk a szorzattal

$$\frac{\dot{T}}{T}\gamma = \frac{X''}{X}$$

Ezek pedig konstansok kell legyenek, ezért szétesik két egyenletre ismét.

$$\frac{\dot{T}}{T}\gamma = c_1$$

$$\frac{X''}{X} = c_1$$

Oldjuk meg először a T-re vonatkozó egyenletet.

$$\dot{T} = \gamma c_1 T \longrightarrow T(t) = c_2 e^{\gamma c_1 t}$$

A c_1 konstansnak negatívnak kell lenni, hiszen a határfeltétel kimondja, hogy $t \to \infty$ ne "robbanjon fel" a függvény, ez pedig csak így teljesülhet. Legyen mostantól $c_1 = -a^2$.

Tisztázzuk le mink van eddig! Tudjuk, hogy $T(t) = c_2 e^{-\gamma a^2 t}$, valamint $X'' = -a^2 X$. Ebből pedig

$$X(x) = c_3 \cos(ax) + c_4 \sin(ax)$$

Ebből pedig már felírhatjuk a végét is

$$u(t,x) = \left[c_2 c_3 \cos(ax) + c_2 c_4 \sin(ax)\right] e^{-\gamma a^2 t}$$

$$u(t,x) = \left[C \cos(ax) + D \sin(ax)\right] e^{-\gamma a^2 t}$$

ahol C, D, a tetszőleges konstansok! Mivel ez lineáris, C, D, a értékek tetszőlegesek lehetnek. A peremfeltételeket viszont még nem vettük figyelembe!

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

$$u(t,0) = Ce^{-\gamma a^2 t} = 0 \to c = 0$$

$$u(t,L) = D \sin(aL) e^{-\gamma a^2 t} = 0$$

A D értékét nem választom nullának, mert akkor az egész megoldás nulla lenne, ezért a $\sin(aL) = 0$ kell teljesüljön. Ebből pedig

$$aL = N\pi$$

$$a_N = \frac{N\pi}{L}$$

ahol N egy egész szám. A szétválaszthatóknál gyakran előfordul, hogy a határfeltétel nem teljesen határozza meg a konstansokat, de ad egy jó megszorítást. Nézzük meg mi maradt! Tudjuk, hogy N tetszőleges, valamint D_N tetszőleges. Így a legáltalánosabb megoldás:

$$u(t,x) = \sum_{N=1}^{\infty} D_N \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right) e^{-\gamma \frac{N^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Ez a legáltalánosabb megoldás, amit kaphatunk, de nem biztos, hogy ez az általános megoldás! Ez még mindig végtelen sok valós konstanst tartalmaz.

Nézzük a határfeltételeket!

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

$$u(0,x) = \sum_{N=1}^{\infty} \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right) = \varphi(x)$$

Szeretnénk megkapni $\varphi(x)$-ből az D_N koefficienseket. Ehhez szépen le kell Fourier transzformálni.

$$\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi Mx}{L}dx = \sum_{N=1}^{\infty} D_N \int_0^L dx \sin\left(\frac{M\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} D_N \frac{L}{2}\delta_{N,M} = \frac{L}{2}D_M$$

Ez pedig egyenlő $\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi Mx}{L}dx$-el, tehát

$$D_M = \frac{2}{L}\int_0^L dx\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi M}{L}x\right)$$

A végső megoldás tehát a következőképpen alakul

$$u(t,x) = \sum_{N=1}^{\infty} D_N \sin\frac{\pi Nx}{L}e^{-\gamma\left(\frac{\pi M}{L}\right)^2 t}$$

10.1.3. Harmadik példa

Ugyanazt az egyenletet vizsgáljuk, csak most másik határral! Vegyünk egy körgyűrűt. Az $u(t,x)$ periodikus x-ben, L periódussal. Visszamegyünk arra az alakra, ahol még nem róttuk ki, hogy az elején és végén nulla legyen a megoldás.

A Fourier transzformációnál tehát megszorzunk mindent a $\sin\left(\frac{M\pi}{L}x\right)$-el és kiintegráljuk nullától L-ig x-re.

$$u(t,x) = \left[D\cos(ax) + C\sin(ax)\right]e^{-\gamma a^2 t}$$

A periodicitás miatt teljesülnie kell ennek:

$$\sin(ax) = \sin(a(x+L))$$

$$aL = 2\pi N$$

$$a_N = \frac{2\pi N}{L}$$

$$u(t,x) = \sum_N \left[D_N\cos\left(\frac{2\pi Nx}{L}\right) + C_N\sin\left(\frac{2\pi Nx}{L}\right)\right]e^{-\gamma\left(\frac{2\pi}{L}N\right)^2 t}$$

Az itt felbukkanó számok $(-a^2)$-re diszkrét értékek jöttek ki. Mikor $a_N = \frac{2\pi N}{L}$, az ebből gyártott $-\left(\frac{2\pi N}{L}\right)^2$ a $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ operátor sajátértékei a periodikus függvényeken.

Többnyire a szeparációs konstans valami bonyolult operátor sajátértéke.

10.1.4. 2D Laplace-egyenlet

$$u(x,y)$$

$$\triangle u = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

Valós megoldásokat keresünk és két esetet fogunk vizsgálni! Az első legyen az, mikor egy körlapon vagyunk! Itt érdemes polárkoordinátákban dolgozni! $u=X(x)\Psi(y)$-ból legyen $u=R(r)\Phi(\varphi)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rightarrow u(r,\varphi)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]u(r,\varphi)$$

A megoldást pedig $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ alakban keressük!

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0$$

Nézzük meg, hogy tudjuk-e szeparálni?

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=0$$

$$r^2\left(\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right)=-\frac{\Phi''}{\Phi}$$

Ismét csak úgy lehet egyenlő, ha az egyenlet mindkét oldala konstans, ráadásul ugyanaz a konstans. Nevezzük mezt most el lambdának. Ismét két egyenlet adódik. Az első

$$\Phi''=-\lambda\Phi$$

Az második pedig

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=\lambda$$

$$r^2R''+rR'=\lambda R$$

Célszerű a könnyűvel kezdeni, hátha ad majd valami megszorítást a lambdára! Nézzük hát az elsőt.

$$\Phi''=\lambda\Phi$$

Tudjuk, hogy a $\Phi(\varphi)$ periodikus, 2π periódussal. Ez a koordináta rendszer sajátossága. Emiatt a λ nem lehet pozitív.

$$\lambda<0$$

$$\lambda=-a^2$$

$$\Phi(\varphi)=C\sin(\varphi a)+D\cos(\varphi a)$$

Ez csak akkor lesz periodikus 2π szerint, ha $a=N$, ezért pedig

$$\lambda=-N^2$$

a vége pedig

$$\Phi(\varphi) = C\sin(\varphi N) + D\cos(\varphi N)$$

Remek, most térjünk át a másodikra!

$$r^2R'' + rR' - N^2R = 0$$

Ez jó, hiszen Euler-féle egyenlet!

$$R = r^\alpha$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - N^2 = 0$$

$$\alpha^2 - N^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \pm N$$

Kössük ki, hogy most $N > 0$

- $N > 0$-nál két különböző gyöke van az egyenletnek!
- $N = 0 \to \alpha = 0$, a két gyök egybeesik. Degenerált megoldásoknál

  $$R(r) = A_0 + B_0 ln(r)$$

- Mikor $N > 0$, akkor a következő alakot várjuk:

  $$R(r) = A_N r^N + B_N r^{-N}$$

Folytassuk tehát:

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{N=0}^{\infty} R_N(r)\Phi_N(\varphi) =$$

Ezt most szépen kiírjuk, különös figyelemmel az $N = 0$ tagra, hiszen az speciális bánásmódot igényel!

$$= R_0(r)\Phi_0(\varphi) + \sum_{N=1}^{\infty}\left[A_N r^N + B_N r^{-N}\right]\left[C_N\sin(\varphi N) + D_N\cos(\varphi N)\right] =$$

$$= A_0 + B_0 ln(r) + \sum_{N=1}^{\infty}\left[A_N r^N + B_N r^{-N}\right]\left[C_N\sin(\varphi N) + D_N\cos(\varphi N)\right] = u(r,\varphi)$$

Így már szebb, csak még nem vettük figyelembe a határfeltételeket! Az első az volt, hogy az u véges a körlapon. Ez azt jelenti, hogy $u(0)$ is véges kell legyen, mert a körlapunk középpontja maga az origó volt, ergo benne van az is.

Emiatt $B_0 = 0$ és $B_N = 0$ $N \geq 1$-re.

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{N=1}^{\infty}\left[C_N\sin(N\varphi) + D_N\cos(N\varphi)\right] r^N$$

Az A_N-t hozzáfűztük valamihez, hogy ne kelljen fölöslegesen konstansokat cipelni.

A második peremfeltétel az volt, hogy a körlap peremén legyen valami függvény, mondjuk $f(\varphi)$.

$$u(r=1,\varphi) = A_0 + \sum_{N=1}^{\infty} [C_N \sin(N\varphi) + D_N \cos(N\varphi)] = f(\varphi)$$

Adott $f(\varphi)$-ből A_0, C_N és D_N Fourier transzformációval megkapható!

- A_0-nál:
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi)$$
- $$C_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(N\varphi) d\varphi$$
- $$D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(N\varphi) d\varphi$$

Ha megkaptuk a konstansokat, akkor örülünk, hiszen meg van oldva az egyenlet! **A 2 dimenziós Laplace egyenlet megoldása a körlapon adott határfeltételek esetén egyértelmű. A két dimenziós Laplace egyenlet tetszőleges, véges, összefüggő tartományon nézve egyértelmű megoldást ad, ha a peremen peremfeltétel adott.**