Differenciálegyenletek II. 1. zh

Hiányos másodrendűek

- x hiányzik az egyenletből: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = r$ $\left(y'' = f(y, y') \right)$

  új változó $\boxed{v(y) = y'}$

  $$\boxed{y''} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dv(y)}{dx} = \frac{dv(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dv}{dy} \cdot v}$$

  $\Rightarrow$ így két elsőrendű egyenletet kell megoldani

- y hiányzik az egyenletből: $y'' + p(x) y' = r(x)$ $\left(y'' = f(x, y') \right)$

  új változó $\boxed{v(x) = y'}$

  $$\boxed{y''} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dv(x)}{dx} = \boxed{v'}$$

  $\Rightarrow$ így két elsőrendű egyenletre redukálódik a probléma

Másodrendű lineáris homogén / inhomogén

- $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ $\rightarrow$ két szabad paraméter

  $\rightarrow$ két megoldás y_1, y_2

Wronski-módszer

$\rightarrow$ adott y_1 part. mo

(1) $W(x) = y_1 y_2' - y_2 \cdot y_1'$

(2) $W' + pW = 0$ $\leftarrow$ elsőrendű homogén diffegy $\rightarrow W(x) = c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}$

(3) $W(x) = c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx} = \underbrace{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'}_{\text{elsőrendű lineáris inhomogén diffegy}}$

(3a) $y_1 \cdot y_h' - y_1' \cdot y_h = 0 \rightarrow y_h = c_2 \cdot y_1$ $\leftarrow$ ez mindig megoldás $\leftarrow$ számolás nélkül

(3b) $\overset{\to y_2}{y_i} = c_2(x) \cdot y_1$

$\underset{\to y_2'}{y_i'} = c_2'(x) \cdot y_1 + \underbrace{\text{ez a tag kiesik a visszahelyettesítésnél}}$

$$\Rightarrow c_2'(x) = c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot \frac{1}{y_1^2(x)} \left(\underbrace{y_1 \cdot c_2'(x) \cdot y_1}_{W(x)} + \cancel{y_1 \cdot c_2(x) \cdot y_1'} - \cancel{c_2(x) \cdot y_1 \cdot y_1'} \right) = \frac{W(x)}{y_1^2(x)}$$

$$\rightarrow y_i = y_1 \cdot \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx \Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

(4) $\boxed{y(x) = \overset{\text{ez adott}}{c_1 y_1} + c_2 y_2}$ $\leftarrow$ homogén egyenlet általános megoldása

$\begin{pmatrix} c_2 \to c_1 \\ c_1 \to c_2 \end{pmatrix}$

(4+) illesztés kezdőfeltételekhez:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$\hookrightarrow y(x_0) = y_0 \rightarrow c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$

$\hookrightarrow y'(x_0) = v_0 \rightarrow c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = v_0$ } 2 lineáris egyenlet

$\longrightarrow$ mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{amiből invertálással kaphatjuk:}$$

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(x_0) - v_0 y_2(x_0)}{W(x_0)}$$

$$c_2 = \frac{v_0 y_1'(x_0) - y_0 y_1'(x_0)}{W(x_0)}$$

(ha peremérték-probléma, akkor: $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$ } szintén lin egyenletrendszer)

(5) ha nem homogén az egyenlet: $y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$

ott tartunk, hogy megvan az alaprendszer: (y_1, y_2)

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y_i az állandók variálásának módszerével kapható

$y_i = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ ... levezetés ... (köztes lépések a füzetben)

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x) r(x)}{W(x)} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1(x) r(x)}{W(x)} dx$$

$\Rightarrow$ felírható: $\tilde{y}_{\text{ált,mo}} = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{\text{homogén ált mo}} + \overbrace{c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)}^{\text{inhomogén part. mo}}$

(6) peremérték vagy kezdeti érték probléma $\rightarrow$ illesztés

$$\begin{cases} \tilde{y}_{\text{ált,mo}}(x_0) = \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_{\text{ált,mo}}'(x_0) = \tilde{v}_0 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} \tilde{y}_{\text{ált,mo}}(a) = \tilde{y}_1 \\ y_{\text{ált,mo}}(b) = \tilde{y}_2 \end{cases}$$

spec. $y(a) = y(b) = 0$
$y'(a) = y'(b) = 1$

ezek kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek

(7) megoldás Green-fv-nyel

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_2(x) y_1(x')}{W(x')} & a < x' < x \\ \dfrac{y_1(x) y_2(x')}{W(x')} & x < x' < b \end{cases} \quad \longrightarrow y(x) = \int_a^b G(x,x') r(x') dx'$$

két részben kell számolni

(+) $y(x) = \int_a^b G(x,x')\, r(x')\, dx = \int_a^x G(x,x')\, r(x')\, dx + \int_x^b G(x,x')\, r(x')\, dx = \rightarrow$

→ ezt kiírásukra kapjuk a peremfeltételekben illesztett y part. mo-t.

Euler-féle differenciálegyenlet

$y'' + p y' + q y = 0$ ← ha p és q speciális, akkor megkaphatjuk az alaprendszert

ha itt $r(x)$ áll, attól még a homogén rész megoldását megkaphatjuk ilyen módszerrel

$\updownarrow$

$a x^2 y'' + b x y' + c y = 0$ ← ahol a, b, c konstansok

$\hookrightarrow y'' + \underbrace{\frac{b}{a}\frac{1}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{c}{a}\frac{1}{x^2}}_{q(x)} y = 0$

helyettesítés: $y = x^\alpha$

$\hookrightarrow y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$\hookrightarrow y'' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$

(akár felírható egyből is a képlet (de inkább ne))

$$\alpha_{1,2} = \frac{a - b \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

a diszkriminánstól függően többféle megoldás létezik

(1) → $\alpha_1 \neq \alpha_2$ és valós ← diszkrimináns pozitív

$y_1 = x^{\alpha_1}$

$y_2 = x^{\alpha_2}$

(2) → $\alpha_1 \neq \alpha_2$ és komplex ← diszkrimináns negatív

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta + i\gamma \\ \alpha_2 = \beta - i\gamma\end{array}\right\}$ felhasználva, hogy $y_1 + y_2$ és $\frac{y_1 - y_2}{i}$ is megoldás:

$y_1 = x^\beta \cos(\gamma \ln x)$

$y_2 = x^\beta \sin(\gamma \cdot \ln x)$

(3) → $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ← diszkrimináns 0

$y_1 = x^\alpha$

$y_2 = x^\alpha \cdot \ln x$ ← állandó var. / trükkel

⟹ innentől megvan az alaprendszer (y_1, y_2)

Green-fv-be illesztés

→ ismert az alaprendszer, amit jelöljünk most így: $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$

ha $y_1(a) = y_1(b) = 0$ → akkor a és b-ben szimmetrikus

$y_1'(a) = y_2'(b) = 1$ ← akármi lehet, de ez a legegyszerűbb

$$y_1(x) = c_1 \cdot \tilde{y}_1(x) + c_2 \tilde{y}_2(x)$$

↳ $y_1(a) = c_1 \tilde{y}_1(a) + c_2 \tilde{y}_2(a) \overset{!}{=} 0$ → megkapható c_1 c_2-vel kifejezve, vagy fordítva

$\frac{d}{dx}$

↳ $y_1'(x) = c_1 \cdot \tilde{y}_1'(x) + c_2 \tilde{y}_2'(x)$

↳ $y_1'(a) = c_1 \tilde{y}_1'(a) + c_2 \tilde{y}_2'(a) \overset{!}{=} 1$

→ $c_1 = \dots$
→ $c_2 = \dots$ } az előzővel

fontos, hogy így az „a”-val kifejezett „c”-ket kaptuk ↔ a→b-re és megkapjuk a másikat

→ ha c_1 és c_2 értékét meghatároztuk, akkor mima kell írni!

$$y_{part,inh} = c_1 \cdot \tilde{y}_1(x) + c_2 \tilde{y}_2(x)$$

↳ $y_1(x) = c_1(a) \tilde{y}_1(x) + c_2(a) \tilde{y}_2(x)$

↳ $y_2(x) = c_1(b) \tilde{y}_1(x) + c_2(b) \tilde{y}_2(x)$

↳ ezek kerülnek a Green-fv-be

eddigi jegyzet kiegészítése:

- → sorfejtés módszer – elemi fv-ek Taylor-sorai
- → állandó együtthatós lineáris diffegy
- → stabilitásvizsgálat (nem lineáris, ill. köz. diffegy rendszerek)
- → 2 paraméteres görbeseregek
- → parciális diffegy – karakterisztikák módszere

Sorfejtés

→ megoldás alakját keressük: $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+q}$

→ ha $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+2}$ jelenik meg, akkor $m^* = m+2$ ↗ határok: $m^* = 2 \to \infty$ ↘ $m = m^* - 2$

$m^* \to m$ ↪ $\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^{m}$ -et kapunk

→ az első néhány tagból, pl. $m=0$, $m=1$, ($m=2$)-ből q-ra értékeket kapunk, amiből q-t úgy kell kifejezni, hogy mindegyik tag értéke 0 legyen a sor alakban.

→ ha csak egy megoldást sikerül megkapni, akkor Wronski-módszer a kulcs a másikhoz.

→ elemi fv-ek Taylor-sorai:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x|<1$!
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x|<1$!
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1$!

x helyére bármit be lehet írni

⊕ deriválni/integrálni tagonként lehet

- $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x|<1 \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \forall x$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad \forall x$
- $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad |x| \leq 1$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad |x| \leq 1$
- $\arctan = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| \leq 1$
- $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \forall x$
- $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \forall x$

Állandó együtthatós (lineáris) diffegy

→ $p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

* ha $W \neq 0$, akkor n db független megoldás
* helyettesítés: $y(x) = e^{\lambda x}$ → $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ → $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ → ...
* sok eset előfordulhat a gyököknél, de ha komplexet kapunk, használjuk ki, hogy homogén az egyenlet (a megoldások tetszőleges lineárkombinációja is mo)

↳ $\left.\begin{array}{l} \lambda_{k+1} = \alpha + i\beta \\ \lambda_{k+2} = \alpha - i\beta \end{array}\right\}$ ezek értelmében a két független valós mo → $e^{\alpha x}\cos\beta x$ → $e^{\alpha x}\sin\beta x$

→ kapcsolat a lineáris, elsőrendű diffegy rendszerrel

* $y_n' = -\frac{p_{n-1}}{p_n} y_n - \frac{p_{n-2}}{p_n} y_{n-1} - \dots - \frac{p_1}{p_n} y_2 - \frac{p_0}{p_n} y_1$
* felírható: $\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$ ← konstans mátrix
* $\underline{\underline{A}}$-nak kellenek a sajátértékei és sajátvektorai
* általános megoldás alakja: $\underline{y}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}\underline{s}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{s}^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t}\underline{s}^{(3)}$

  c_1, c_2, c_3 szabad konstansok

  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az együttható mátrix sajátértékei, $\underline{s}^{(1)}, \underline{s}^{(2)}, \underline{s}^{(3)}$ pedig sajátvektorok

Stabilitásvizsgálat

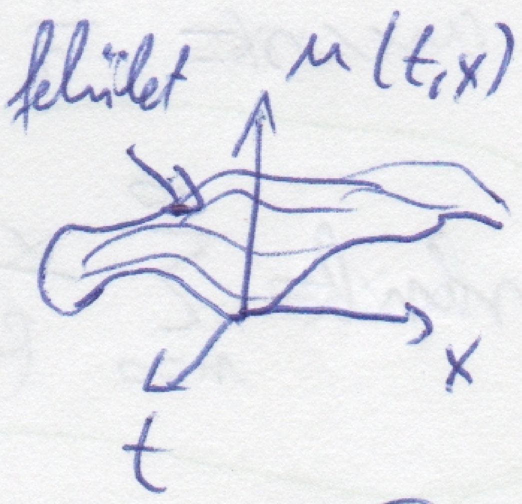
→ küretlen

Parciális differenciálegyenletek

→ karakterisztikák módszere → $\alpha(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(t,x,u)$

$\frac{dt}{ds} = \alpha(t,x,u)$

felület



$\frac{dx}{ds} = \beta(t,x,u)$

$\frac{du}{ds} = \gamma(t,x,u)$

$t(s) = f_1(s-c_3, c_1, c_2)$ (1.) $s - c_3 = g_3(t, c_1, c_2)$

$x(s) = f_2(s-c_3, c_1, c_2)$

$u(s) = f_3(s-c_3, c_1, c_2)$

(2.) $x = f_2(g_2(t, c_1, c_2), c_1, c_2)$

(3.) $u = f_3(g_3(t, c_1, c_2), c_1, c_2)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t,x,u) = c_1 \\ \varphi_2(t,x,u) = c_2 \end{array}\right\}$ $\Psi(\varphi_1(t,x,u), \varphi_2(t,x,u)) = 0$