

1. Bernoulli-féle differenciálegyenlet

$$y' + g(x)y = h(x)y^n \quad h \neq 0$$

Megoldása: szorozzunk y^{-n} -nel, így kapjuk a

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{g(x)}{y^{n-1}} = h(x)$$

egyenletet. Legyen $u(x) \equiv y^{1-n}$ (ekkor $u'(x) = (1-n) \cdot y^{-n}(x) \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}$). Ezt beírva az eredeti egyenletbe:

$$\frac{u'}{1-n} + g(x)u = h(x)$$

És ez nekünk jó.

2. Homogén fokszámú differenciálegyenlet

Ha $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ olyan, hogy $P(tx, ty) = t^n \cdot P(x, y)$ és $Q(tx, ty) = t^n \cdot Q(x, y)$ és az egyenlet

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

alakú, akkor ezt leosztva x^n -nel adódik

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)}$$

3. Homogén dimenziójú differenciálegyenlet

Ha ebbe $u(x) = \frac{y}{x^n}$ -t helyettesítünk, szétválasztható lesz.

Dimenziók: x , dx :1; y , dy : n . Pl.: $x^\alpha : \alpha$; $y^\beta : n \cdot \beta$; $a_k x^\alpha y^\beta dy : \alpha + n \cdot \beta + n$

4. Jacobi-féle differenciálegyenlet

$$y' = \frac{(Ax + By)y + \alpha x + \beta y}{Ax + By)x + ax + by}$$

Megoldása: osszuk le x -szel a számlálót és a nevezőt is.

$$y' = \frac{(A + B\frac{y}{x})y + \alpha + \beta\frac{y}{x}}{A + B\frac{y}{x}}x + a + b\frac{y}{x}}$$

Használjuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést (ekkor $y = xu$ és $y' = u + xu'$). Beírva:

$$u + xu' = \frac{(A + Bu)xu + \alpha + \beta u}{A + Bu}x + a + bu$$

Vigyük át u -t és hozzunk közös nevezőre:

$$xu' = \frac{(A + Bu)xu + \alpha + \beta u - (A + Bu)xu - au - bu^2}{(A + Bu)x + a + bu} = \frac{\alpha + (\beta - a)u - bu^2}{(A + Bu)x + a + bu}$$

Kerresük most $x(u)$ -t. Vegyük mindkét oldal reciprokát és szorozzuk be x -szel.

$$\frac{dx}{du} = \frac{(A + Bu)x^2 + (a + bu)x}{\alpha + (\beta - a)u - bu^2}$$

Ez pedig Bernoulli-féle. $z = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel célszerű megoldani.

Órákon vett példák:

1. $y' = x + y$
2. $y' = \sin(x - y)$
3. $y' = -(1 + \frac{y}{x})$
4. $x \cdot \cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} + (2 \sin y - 3x) = 0$
5. $x^3 + y^3 - xy^2y' = 0$
6. $(2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' + 2x + y = 0$
7. $y' = \frac{4x - y + 1}{2x + y - 1}$
8. $(1 + x^2y + x^4y^2)y' + 2x^2y^3 = 0$
9. $xydy = (y^2 + x^3)dx$
10. $y' - \frac{y}{x} = x^2$
11. $y' - 2y = x^2 + 2e^x \sin x$
12. $y' + 2\frac{y}{x} = (\frac{y}{x})^3$
13. $xy' = 4(y - \sqrt{y})$
14. $y' = \frac{(x - y)y - x - y}{(x - y)x + x + y}$
15. $y' = \frac{a(x + y)y - x - 3y}{a(x + y)x + 2y}$
16. $(x^2 - 2y^3)dx + 3xy^2dy = 0$
17. $y' \cos x + y \sin x + y^3 = 0$
18. $xy' = y - x \cos^2 \frac{x}{y}$