VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (2)

# Differenciálegyenletek

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.
Kónya Ilona

2003. február

Szerkesztette: Győri Sándor

# 1. Bevezetés

Differenciálegyenlet: valamely függvény, annak független változói és az egyes független változók szerinti deriváltjai között állapít meg összefüggést.
Közönséges differenciálegyenlet: a függvény egyváltozós.

Parciális differenciálegyenlet: a függvény többváltozós (mi ezzel nem foglalkozunk).

n-edrendű differenciálegyenlet: a fellépő legmagasabb rendű derivált n-edrendű.

Implicit alak:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \,=\, 0$$

Explicit alak:

$$y^{(n)} \,=\, f(x, y, y', y'', \,\ldots\, , y^{(n-1)})$$

Lineáris differenciálegyenlet:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) \,=\, f(x)$$

# 2. Elsőrendű differenciálegyenlet

### 2.1. Definició.

*Elsőrendű implicit differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan egyenletet, amelyben az $y$, $y'$ és $x$ szimbólumok szerepelnek, (amelyeket persze más betükkel is jelölhetünk), és az $y'$ semmiképp se hiányzik az egyenletből. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

Ha ebből az egyenletből az $y'$ kifejezhető, akkor *elsőrendű explicit differenciálegyenletről* beszélünk:

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

Tehát (2.1) általánosabb, mint (2.2).
Az adott $x_0, y_0$ esetén jutunk az

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.3}$$

*Cauchy problémához.*

**2.2. Definició.**

a) Azt mondjuk, hogy a $\varphi : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, $(a < b)$ differenciálható függvény, *megoldásfüggvénye* a (2.2) differenciálegyenletnek, ha

$$\varphi'(x)) = f(x, \varphi(x)), \qquad \forall\, x \in (a, b) \tag{2.4}$$

A $\varphi$ függvény grafikonját *megoldásgörbének* nevezzük:

$$\{(x, y) : \quad y = \varphi(x),\ x \in (a, b)\} \tag{2.5}$$

Az összes megoldásfüggvény halmazát *általános megodásnak nevezzük.* Ha ezek közül csak egyet tekintünk, például a Cauchy feladat megoldását, akkor *partikuláris megoldásról* beszélünk.

b) Azt mondjuk, hogy a $\varphi$ *megoldásfüggvénye a (2.3) Cauchy problémának*, ha van olyan $(a, b)$ intervallum $(a < b)$, hogy

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall\, x \in (a, b), \quad \text{ahol } x_0 \in (a, b) \text{ és } \varphi(x_0) = y_0 \tag{2.6}$$

$\varphi$-nek a grafikonja az *(2.3) Cauchy probléma megoldásgörbéje.*

Megjegyezzük, hogy egy megoldásfüggvény mindig valamely nem üres, nyílt intervallumon van értelmezve, és ott minden pontban differenciálható. Vannak olyan differenciálegyenlet tankönyvek is, amelyek nem kívánják meg, hogy a megoldások minden ponban deriválhatók legyenek. Azt azonban felteszik, hogy "nulla összhosszúságú" halmaz kivételével legyenek differenciálhatók a $\varphi$ megoldások. Ilyenkor azt mondják, hogy $\varphi$ majdnem mindenütt differenciálható az $(a, b)$-ben.

**2.1. Illusztráció.**

Mutassuk meg, hogy az

$$y' = y - 2$$

differenciálegyenletnek megoldása az

$$y = 2 + e^{(x+c)}, \qquad \text{ahol } x \in (-\infty, \infty) \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

esetén , vagyis a teljes számegyenesen értelmezett függvénycsalád tagjai mind megoldások! Ellenőrizzük azt is, hogy az azonosan kettővel egyenlő függvény is megoldás.

**Megoldás.**

Mivel $y' = e^{(x+c)}$, és $y - 2 = e^{(x+c)}$, azért tetszőleges $x, c \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

Az azonosan 2-vel egyenlő konstans függvény deriváltja nulla, és $2 - 2 = 0$, így $y \equiv 2$ megoldás.

**2.2. Illusztráció.**

a.) Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ differenciálegyenletet!

b.) Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(1) = 0$ kezdetiérték problémát!

**Megoldás.**

a.) Az $y = \operatorname{arctg} x + c$, $c \in \mathbb{R}$ az általános megoldás, amelynek elemei értelmezettek a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

b.) Ezek közül az $y = \operatorname{arctg} x - \pi/4$ adja az $(1, 0)$ kezdetiértékhez tartozó megoldásgörbét.

Vegyük észre, hogy minden ponton halad át megoldásgörbe, és mind a $(-\infty, \infty)$ intervallumon vannak értelmezve.

### 2.3. Illusztráció.

Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{x}$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.**

A
$$\varphi(x) = \ln x + c_1, \;\; x > 0 \qquad \text{és a} \qquad \varphi(x) = \ln(-x) + c_2, \;\; x < 0$$
függvények a megoldások, ahol $c_1, c_2$ tetszőleges valós konstansok.

Ha az $x_0 = e$, $y_0 = -2$ kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy $x > 0$, így a $-2 = \ln e + c_1$ -ből $c_1 = -3$ adódik. Ezért

$$\varphi(x) = \ln x - 3$$

adja a megoldásfüggvényt.

Ha pedig az $x_0 = -e$, $y_0 = 7$ kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy $x < 0$, így a $7 = \ln(-(-e)) + c_2$ -ből $c_2 = 6$ adódik, ezért

$$\varphi(x) = \ln(-x) + 6$$

a megoldásfüggvény.

A rövidebb írásmód kedvéért az általános megoldást $\varphi(x) = \ln|x| + c$ alakban szoktuk leírni, ami alatt az $\ln|x| + c$ függvény valamely $(a, b)$ intervallumra való leszűkítését értjük, például a $(-\infty, 0)$ vagy a $(0, \infty)$ intervallumra való leszűkítését. A 0-t tartalmazó $(a, b)$ intervallumra nem lehet úgy leszűkíteni, hogy differenciálható függvényhez jussunk. A fenti két kezdetiérték probléma megoldása:

$$\varphi(x) = \ln|x| - 3, \qquad \text{illetve} \qquad \varphi(x) = \ln|x| + 6$$

alakokban is írható. Ilyenkor az értelmezési tartományok nincsenek kiírva, de értelemszerűen az első esetben $x > 0$, a másodikban $x < 0$.

### 2.4. Illusztráció.

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x),\ x \in (\alpha, \beta)$ differenciálható, és kielégíti az

$$x^3 y^3 = 3x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

implicit egyenletet, akkor megoldása az alábbi differenciálegyenletnek:

$$xy^2 y' + y^3 - 2/x = 0 \tag{2.8}$$

**Megoldás.**

Az $y$ helyett $\varphi(x)$-et gondolunk és differenciáljuk az (2.7) implicit egyenlet mindkét oldalát $x$ szerint, a $c$ paramétert konstansnak tekintve:

$$3x^2 y^3 + x^3 3y^2 y' = 6x\,,$$

amiből $3x^2$-tel való osztással megkapjuk a kívánt differenciálegyenletet. (Megjegyezzük, hogy $x = 0$ esetén $\varphi$ nem elégíti ki az (2.7) implicit egyenletet sem.)
Ilyenkor (2.7) -et nevezzük a (2.8) *differenciálegyenlet implicit alakú megoldásának.* Sokszor meg kell elégednünk a megoldások implicit alakjával.

### 2.5. Illusztráció.

a.) Bizonyítsa be, hogy ha az $y = y(x)$ differenciálható függvény kielégíti az

$$x^2 + x\,y^2 - 2\,x^2\,y + 2\,y^2 \;=\; 0 \tag{2.9}$$

implicit függvénykapcsolatot, akkor $y = y(x)$ megoldása a

$$\big(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\big)\;\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \big(4\,x\,y - 2\,x - y^2\big) \tag{2.10}$$

differenciálegyenletnek.

b.) Bizonyítsa be, hogy ha az $x = x(y)$ differenciálható függvény kielégíti a (2.9) implicit függvénykapcsolatot, akkor kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\big(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\big) \;=\; \big(4\,x\,y - 2\,x - y^2\big)\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{2.11}$$

c.) Mi a tanulság?

**Megoldás.**

a.) Tehát most az

$$x^2 + x\,y^2(x) - 2\,x^2\,y(x) + 2\,y^2(x) \;=\; 0$$

implicit egyenletet kell $x$ szerint deriválni. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$2\,x + y^2(x) + x\,2y(x)\,y'(x) - 4x\,y(x) - 2x^2\,y'(x) + 4y(x)\,y'(x) \;=\; 0$$

Innen pedig $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ cserével és rendezéssel adódik az állítás.

b.) Ebben az esetben az $y$ a független változó, ezért az

$$x^2(y) + x(y)\;y^2 - 2\,x^2(y)\;y + 2\,y^2 \;=\; 0$$

egyenletet most az $y$ független változó szerint kell deriválni:

$$2x(y)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,y^2 + x(y)\,2y - 4x(y)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,y - 2x^2(y) + 4y \;=\; 0$$

Ebből rendezéssel kapjuk (2.11)-et.

c.) $\qquad y' = f(x,y)\,, \quad$ azaz $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$
esetén az inverzfüggvényre vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x,y)}\,, \qquad\qquad f(x,y) \neq 0$$

ahol most $y$ jelöli a független változót.

M A fentiekből következően a (2.10) és (2.11) differenciálegyenletek közös alakja:

$$\big(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\big)\;\mathrm{d}y \;=\; \big(4\,x\,y - 2\,x - y^2\big)\;\mathrm{d}x$$

A megoldásnál tudnunk kell, hogy melyik a független változó. Mi megállapodunk abban, hogy esetünkben mindig az $x$ lesz a független változó, ha nincs ezzel ellentétes állítás.

## 2.6. Illusztráció.

Oldjuk meg az differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{1}{xy} \tag{2.12}$$

**Megoldás.**

A megoldásgörbék valamelyik síknegyedben vannak, ugyanis $x \neq 0$, $y \neq 0$ miatt nem metszhetik a tengelyeket. A megoldásoknak ki kell elégíteniük az

$$yy' = 1/x, \quad \text{azaz} \quad 2yy' = 2/x, \quad \text{azaz} \quad (y^2)' = 2/x$$

differenciálegyenletet. Tehát

$$y^2 = 2\,\ln|x| + c\,, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

a megoldások implicit alakja.

Legyen $c = 2\ln\tilde{c}$ , ekkor

$$y^2 = 2\,\ln|x| + 2\,\ln\tilde{c}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

amelyet kényelmesebben

$$y^2 = 2\,\ln(|x|\,\tilde{c})\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

azaz

$$e^{(y^2/2)} = |x|\,\tilde{c}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,, \tag{2.14}$$

amelyből $x$-et fejezhetjük ki, mint az $y$ függvényét, vagyis a megoldásfüggvények inverzeiről beszélhetünk kényelmesen:

$$x = \pm\,\frac{1}{\tilde{c}}\,e^{(y^2/2)}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

vagyis

$$x = k\,e^{(y^2/2)}\,, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ y \neq 0 \tag{2.15}$$

A (2.15) formula minden $y \in \mathbb{R}$-re értelmezett, de a mi esetünkben $y \neq 0$ lehet csak a (2.12) miatt. Ha a differenciálegyenletet kell megoldanunk és a megoldásfüggvényekkel kapcsolatban semmi más feladatunk sincs, akkor a (2.13) implicit függvénykapcsolat megtalálásával a feladatot megoldottnak tekinthetjük.

## Feladatok

**2.1. Feladat.**

Mutassuk meg, hogy az adott függvények megoldásai a feltüntetett differenciálegyenleteknek:

a)

$$y = -2\,e^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x; \qquad y' + 2y = e^x$$

b)

$$y = x\,\sqrt{1 - x^2}, \qquad 0 < x < 1\,;$$

$$y\,y' = x - 2x^3$$

**2.2. Feladat.**

Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek a feltüntetett paraméteresen adott görbék megoldásgörbéi:

a)

$$x + y\,y' = 0\,;$$

$$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \qquad t \in (0, \pi)$$

b)

$$(1 + xy)\,y' + y^2 = 0\,;$$

$$x = te^t\,, \qquad y = e^{-t}\,, \qquad t < -1$$

c)

$$(y')^2 + e^{y'} = x\,;$$

$$x = t^2 + e^t\,, \qquad y = \frac{2}{3}\,t^3 + (t-1)\,e^t\,, \qquad t > 0$$

**2.3. Feladat.**

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ differenciálható és kielégíti a megadott implicit egyenletet, akkor megoldása a a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

a)

$$x^2 + y^2 - x^6 + y^4 = c\,; \qquad y\,y'\,(1 + 2y^2) = 3\,x^5 - x$$

b)

$$y^2 + 6x = 9\,, \qquad y > 0\,;$$

$$y\,(y')^2 + 2x\,y' = y$$

c)

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0\,, \qquad x > 0\,;$$

$$(x - y)\,y' = x + y$$

**2.4. Feladat.**

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ kielégíti a megadott integrálegyenletet, akkor megoldása a a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

a)

$$y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt \,+\, 3\,e^x\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\;;$$

$$y' - y = e^{x + x^2}$$

b)

$$y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt\,; \qquad x > 0\,;$$

$$xy' = y + x \sin x$$

c)

$$y = x \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt\,, \qquad x > 0\,;$$

$$x\,y' - y = x\,e^x$$

**Útmutatás.** Ha az integrandus függvény folytonos, akkor az integrálszámítás II. alaptétele szerint az $y = \varphi(x)$ differenciálható. A b) feladatot úgy kell érteni, hogy az integrandus függvény $0$ pontbeli szakadását megszüntettük, felhasználva, hogy $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

# 3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek (szeparálható, szeparábilis)

A szétválasztható változójú differenciálegyenletek speiális alakú elsőrendű differenciálegyenletek.

$$y' = \varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y), \qquad f \in C^0_{(a,b)}, \;\; g \in C^0_{(c,d)} \tag{3.1}$$

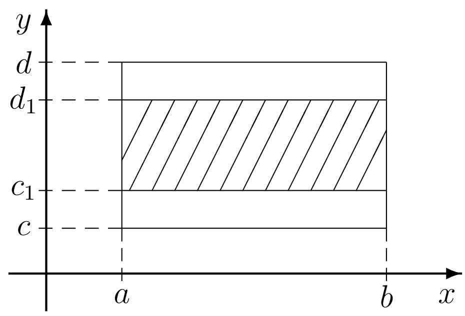
Keressük azt az $y = y(x)$ függvényt, amelyre:

$$y'(x) \equiv f(x) \cdot g(y(x)) \qquad \forall\, x \in (a, b)\text{-re.}$$

1.) Ha $g(y_0) = 0$ $(y_0 \in (c, d))$, akkor $y \equiv y_0$ megoldás.
(Egyensúlyi helyzet, mivel $y' \equiv 0$.)

2.) Ha $(c_1, d_1) \subset (c, d)$-ben $g(y) \neq 0$, akkor (3.1) ekvivalens (3.2)-vel:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \tag{3.2}$$




Ha $y = y(x)$, $(\, y(x_0) = y_0 \,)$ megoldása (3.2)-nek, akkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,, \qquad \forall\, x \in K_{x_0,\delta} \tag{3.3}$$

Legyen $H(y)$ az $\dfrac{1}{g(y)} = h(y)$ egy primitív függvénye $(c_1, d_1)$-en, tehát

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}$$

($\dfrac{1}{g}$ folytonossága miatt $\exists\, H$). Legyen $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív függvénye $(a, b)$-n, tehát

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

($f$ folytonossága miatt $\exists\, F$).
Látjuk, hogy (3.3) az alábbi alakú

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(H(y(x))\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x)\Big),$$

amiből

$$H(y(x)) = F(x) + C\,. \tag{3.4}$$

Mivel $y(x_0) = y_0$, ezért

$$H(y(x_0)) = F(x_0) + C \quad \longrightarrow \quad C = H(y(x_0)) - F(x_0)\,,$$

tehát $C$ egyértelműen megadható.
Megfordítva, ha (3.4) valamilyen $C$-vel teljesül, akkor mindkét oldalt $x$ szerint deriválva

$$h\,(y(x))\; y'(x) = f(x)\,, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,,$$

tehát $y(x)$ megoldása (3.1)-nek.
Összefoglalva: $F$ és $H$ meghatározásával az ismeretlen $y = y(x)$ függvényre a

$$H(y) = F(x) + C \tag{3.5}$$

implicit függvénykapcsolatot kapjuk. Ezt írhatjuk

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

alakban is.
Megjegyezzük, hogy $H$ szigorúan monoton ( $H'(y)\ \big(= h(y)\big) \neq 0$ ), ezért elvileg $y$ kifejezhető (3.5)-ből.

## Néhány példa:

3.1 Pl. $\boxed{y' = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y}\,, \qquad y(0) = 0}$

$$y' = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad\Longrightarrow\quad \int \operatorname{ch} 3y \,\mathrm{d}y = \int \operatorname{sh} 2x \,\mathrm{d}x$$

Elvégezve a kijelölt integrálásokat kapjuk az általános megoldást:

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C}} \qquad\qquad \left( y = \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{3}{2}\operatorname{ch} 2x + C\right)\right)$$

Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás:

$$\frac{1}{3}\operatorname{sh} 0 = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 0 + C, \quad \text{vagyis} \quad 0 = \frac{1}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad C = -\frac{1}{2}$$

Tehát

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2}}}$$

3.2 Pl. $\boxed{y' = -\dfrac{x}{y}\,, \qquad y > 0\,,\ \text{vagy } y < 0}$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad \int y \,\mathrm{d}y = \int -x \,\mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást kapjuk az általános megoldást:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{x^2 + y^2 = C \qquad (\,y > 0,\ \text{vagy } y < 0\,)}}$$

3.3 Pl. $\boxed{x\,y' = y^2 - y}$

$y \equiv 0\,, \quad y \equiv 1$ megoldás.
Ha $y \neq 0$ és $y \neq 1$, azaz $y \in (-\infty, 0)$, vagy $y \in (0, 1)$, vagy $y \in (1, \infty)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\Longrightarrow\qquad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|} = \mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot \mathrm{e}^{C}$$

$K = \mathrm{e}^C$ választással:

$$\left|1 - \frac{1}{y}\right| = K \cdot |x| \quad\Longrightarrow\quad 1 - \frac{1}{y} = \pm K \cdot x\,,\ \text{ahol} \quad K > 0.$$

De mivel $y \equiv 1$ is megoldás, $K = 0$ is lehetséges. Így a differenciálegyenlet megoldása:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}}} \qquad \text{(persze } y = \frac{1}{1 + Cx} \text{ alak is jó),} \qquad \text{illetve} \quad \underline{\underline{y \equiv 0}}$$

3.4 Pl. $\boxed{y' \sin x = y \ln y \,, \qquad x \neq k\pi \quad \text{és} \quad y > 0}$

$y \equiv 1$ megoldás. Ha $y \neq 1$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} \, \mathrm{d}y = \int \frac{\frac{1}{2} \, \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást kapjuk a megoldást:

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \quad \Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = \mathrm{e}^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}}}$$

3.5 Pl. $\boxed{xy' + 2y = 0, \qquad y(3) = -1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x \quad \text{és } y \equiv 0 \text{ is megoldás. (Most nem jó a kezdeti feltétel miatt.)}$$

$$\ln |y| = -2 \ln |x| + \ln K, \ K > 0 \ \Longrightarrow \ (y = \frac{\pm K}{x^2} \quad \text{és} \quad y \equiv 0)$$

$$\text{Tehát a megoldás:} \qquad y = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Az $y(3) = -1$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$-1 = \frac{C}{3^2} \quad \Longrightarrow \quad C = -9 : \quad \underline{\underline{y = -\frac{9}{x^2}}}$$

## Feladatok

### 3.1. Feladat.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket illetve a hozzájuk tartozó Cauchy problémákat:

a) $\alpha$) $y' = xe^x$,

$\beta$) $y' = xe^x, \qquad y(-\ln 5) = 1$

b) $\alpha$) $y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}$,

$\beta$) $y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(0) = -1$

$$\gamma)\qquad y' = \frac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(\ln 2) = 3$$

c) $$\alpha)\qquad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$$

$$\beta)\qquad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x} \qquad y(-1) = -2$$

**3.2. Feladat.**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1.) $y' = \dfrac{y-1}{y}\ \cos^2 x\ \sin^3 x\,, \quad y > 0$

2.) $y' = \dfrac{y^2-4}{x^2+4}$

3.) $y' = \dfrac{y^2-4}{y\,(x^2+2x+4)}\,, \quad y > 0$

4.) $y' = \dfrac{y^2+4}{y^2-3}\, x\,\sqrt[3]{1+2x^2}\,, \quad y > \sqrt{3}$

5.) $y' = \dfrac{\operatorname{sh}^6 2y}{\operatorname{ch} 2y}\ \sqrt[5]{3+8x}$

6.) $y' = (2y+1)^6\ \ln 3x\,, \quad x > 0\,,\ y > -\dfrac{1}{2}$

7.) $y' = \dfrac{x}{y}\ \mathrm{e}^{2x^2+3y}\,, \quad y > 0$

8.) $y' = \dfrac{(2x+1)\ \mathrm{e}^{3x-2}}{y\ \mathrm{e}^{5y^2}}\,, \quad y > 0$

# 4. Homogén és inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Ahhoz, hogy a címet megértsük, átismételjük ismereteinket a lineáris tér és az általános értelemben vett lineáris függvény (amit szoktak homogén lineáris függvénynek is nevezni) fogalmakat. Már most megjegyezzük, hogy az inhomogén jelző tagadást foglal magában és a lineáris tulajdonság hiányára utal.

**4.1. Definició.**

Az $\mathcal{L}$ teret *lineáris térnek* nevezzük az $\mathbb{R}$ valós számtest felett, ha értelmezett benne egy összeadás művelet és a valós skalárral való szorzás, továbbá ezekre teljesülnek a szokásos műveleti azonosságok.

Pontosabban megfogalmazva, $\mathcal{L}$ az összeadásra ( $+$-ra) nézve kommutatív csoportot alkot és $\forall\, l, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ és $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő (4.1) és (4.2) azonosságok.
A skalárral való szorzás tulajdonságai:

$$\text{ha}\ \ l \in \mathcal{L}\,, \quad \alpha l \in \mathcal{L}, \quad \alpha l = l\alpha, \quad 1l = l, \quad (\alpha\beta)\, l = \alpha\,(\beta l),$$

$$(\alpha+\beta)\,l=\alpha l+\beta l, \quad \alpha\,(l_1+l_2)=\alpha l_1+\alpha l_2\,,\ \forall\, l_1,l_2\in\mathcal{L} \tag{4.1}$$

A kommutatív csoport tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
&\text{ha}\ \ l_1,l_2\in\mathcal{L}\,,\ \ \text{akkor}\ \ l_1+l_2\in\mathcal{L}\,,\\
&l_1+(l_2+l_3)=(l_1+l_2)+l_3\,,\quad \forall\, l_1,l_2,l_3\in\mathcal{L}\\
&\exists\, 0\in\mathcal{L}\,:\quad l_1+0=0+l_1=l_1\,,\quad \forall\, l_1\in\mathcal{L}\,,\\
&\forall\, l\in\mathcal{L}\ \text{esetén}\ \exists\,-l\in\mathcal{L}\,:\ l+(-l)=(-l)+l=0,\\
&\text{és}\quad l_1+l_2=l_2+l_1\,,\quad l_1,l_2\in\mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

**4.2. Definició.**

Ha egy $f$ függvény értékét az $l_1+l_2$ helyen tagonként számolhatjuk ki, továbbá a konstans kiemelhető a függvényből, akkor a függvényt lineárisnak nevezzük.

Tehát az $f:\mathcal{L}_1\mapsto\mathcal{L}_2$ függvényt *lineáris függvénynek* (operátornak, leképezésnek, stb.) nevezzük, ha

a) $\mathcal{L}_1$ lineáris tér,

b)

$$f(l_1+l_2)=f(l_1)+f(l_2), \qquad \forall\, l_1,l_2\in\mathcal{L}_1, \tag{4.3}$$

c)

$$f(\alpha l)=\alpha f(l), \qquad \forall\, l\in\mathcal{L}_1\ \text{és}\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Könnyen látható, hogy ilyenkor az $\mathcal{L}_2$ képtér is lineáris tér. Másrészt, ha $n_0$ az $\mathcal{L}_1$ tér nulleleme, akkor $f(n_0)$ az $\mathcal{L}_2$ tér nulleleme.

**4.1. Illusztráció.**

a) A síkvektorok tere, valamint a térvektorok tere egy-egy lineáris teret alkot. (Ezért szokás a lineáris teret vektortér néven is emlegetni.) Nyilvánvaló, hogy a valósszámok $\mathbb{R}$ tere is lineáris tér.

b) Az $[a,b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények $\mathbb{C}^0_{[a,b]}$ tere, vagy az akárhányszor differenciálható függvények $\mathbb{D}^\infty_{(a,b)}$ tere szintén példák lineáris térre. Mindkét esetben az azonosan nulla függvény a nullelem, egyik esetben az $[a,b]$, másik esetben az $(a,b)$ intervallumon értelmezve.

**4.2. Illusztráció.**

a) Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ valós függvények közül az $f(x)=mx$ lineáris függvény.
(A $g(x)=mx+b$, $b\neq 0$ nem lineáris a 4.2 Definició értelmében. Ezért a nyomaték kedvéért szokták a 4.2 Definició szerinti lineáris függvényt *homogén lineáris függvénynek* is nevezni.)

b) Az $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ valós kétváltozós függvények közül az

$$f(x,y)=ax+by\,,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

lineáris függvény. Ugyanis az $\underline{\mathbf{x}} = (x, y)$ és az $\underline{\mathbf{a}} = (a, b)$ jelölést használva kapjuk, hogy skaláris szorzatról van szó: $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}}$, amire teljesül a (4.3) és a (4.4) tulajdonság.

**4.3. Definició.**

Ha a 2.1 Definicióban $F$ az $y$ és $y'$ szimbólumoknak lineáris függvénye, akkor jutunk homogén lineáris implicit differenciálegyenlethez:

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \tag{4.5}$$

Feltételezve, hogy $a(x) \neq 0$ , oszthatunk vele és így

$$(H) \qquad\qquad y' + g(x)\, y = 0 \tag{4.6}$$

alakú differenciálegyenlethez jutunk. (4.6)-ban feltesszük, hogy $g$ folytonos valamely $[\alpha, \beta]$ intervallumon, ekkor (4.6)-ot *homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezzük és $(H)$ -val jelöljük.

### Homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

**4.1. Tétel.**

a) Ha $\varphi$ és $\psi$ is megoldásai (4.6) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi + \psi$ is megoldása (4.6)-nak. Ha egy $\varphi$ függvény megoldása a (4.6) differenciálegyenletnek, akkor ennek a $\varphi$ függvénynek a konstansszorosai is megoldások. Ezt röviden úgy mondhatjuk, hogy a (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.

b)

$$y' + g(x)\, y = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.7}$$

kezdetiérték problémának $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)$ , $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén van az $(\alpha, \beta)$ intervallumon értelmezett megoldása. (Ezt, a megoldás létezését garantáló állítást egzisztencia tételnek nevezzük.)

c) Ha $\varphi$ és $\psi$ is a $(\alpha, \beta)$ intervallumon értelmezett megoldásai a (4.7) kezdetiérték problémának, (vagyis grafikonjaik ugyanazon az $(x_0, y_0)$ ponton haladnak át), akkor

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\,.$$

(Ezt, a megoldás egyértelműségét garantáló állítást unicitás tételnek nevezzük.)

d) A (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, tehát a megoldások megadhatók egy seholse nulla $\varphi$ elem konstansszorosaként.

**Bizonyítás.**

a) Ha $\varphi$ és $\psi$ is megoldásai (4.6) differenciálegyenletnek, akkor

$$\varphi'(x) + g(x)\, \varphi(x) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\ , \tag{4.8}$$

$$\psi'(x) + g(x)\, \psi(x) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,. \tag{4.9}$$

Összeadva (4.8)-at és (4.9)-et:

$$\varphi'(x)+\psi'(x)+g(x)\ (\varphi(x)+\psi(x))=0, \quad \forall\, x\in\ (\alpha,\beta)\,.$$

amiből:

$$(\varphi(x)+\psi(x))'+g(x)\ (\varphi(x)+\psi(x))=0, \quad \forall\, x\in\ (\alpha,\beta)\,.$$

Tehát $\varphi+\psi$ is megoldása (4.6)-nak.
Ha egy $\varphi$ függvény megoldása a (4.6) differenciálegyenletnek, akkor (4.8)-ból $c$-vel való szorzással kapjuk:

$$c\,(\varphi'(x)+g(x)\,\varphi(x))=0, \quad \forall\, x\in\ (\alpha,\beta)\ ,$$

amit átalakítva:

$$(c\,\varphi(x))'+g(x)\,(c\,\varphi(x))=0, \quad \forall\, x\in\ (\alpha,\beta)\,.$$

Tehát a $\varphi$ függvénynek a konstansszorosai is megoldásai a (4.6)-nak.

b)

$$y'+g(x)\cdot y=0 \qquad \text{(szeparábilis differenciálegyenlet)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-g(x)\cdot y \qquad y\equiv 0 \text{ megoldás}$$

Ha $y\neq 0$:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=-\int g(x)\,\mathrm{d}x+C_1=-G(x)+C_1$$

$$|y|=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}=K\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}, \quad K>0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y>0: & y=K\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} \\ y<0: & y=-K\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} \\ & \quad (K>0) \\ \text{és} & y\equiv 0 \text{ is mo.}\end{array}\right\} \Longrightarrow y=C\,\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}=C\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad C\in\mathbb{R}$$

az általános megoldás.
Ha $y(x_0)=y_0 \quad\Longrightarrow\quad y_0=C\,\mathrm{e}^{-G(x_0)}$-ból $C$ egyértelműen meghatározható.

c) Nem bizonyítjuk.

d) $y=C\,\mathrm{e}^{-G(x)}$, $C\in\mathbb{R}$-ből látható, hogy valóban

$$y=C\,\varphi(x)$$

alakú az általános megoldás. Azt is látjuk, hogy $\varphi(x)$ seholse nulla.

$\blacksquare$

**4.3. Illusztráció.**
Oldjuk meg az $y' + (\sin x)\, y = 0$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.**
A 4.1 Tétel d) állítása szerint egy $y \neq 0$ megoldást keresünk, ezért $y$-nal oszthatunk:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x, \qquad \big(\ln|y|\big)' = -\sin x,$$

amiből:

$$\ln|y| = \cos x + c\,.$$

Elég az egyik, nem azonosan nulla megoldást tekinteni, például:

$$y = e^{\cos x}.$$

Ismét hivatkozva a 4.1 Tétel d) állítására kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = C\, e^{\cos x}, \qquad x, C \in \mathbb{R}.$$

### Inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Tekintsük most az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x) \tag{4.10}$$

differenciálegyenletet, amelyet $f(x) \not\equiv 0$ esetén *inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezünk és (I)-vel jelölünk. Itt is feltesszük, hogy $g$ és $f$ folytonos az $(\alpha, \beta)$ intervallumon.
A (4.10) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$(H) \qquad y' + g(x)\, y = 0 \tag{4.11}$$

**4.2. Tétel.**
a) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet $y_{I\text{ált}}$ általános megoldása felírható a (4.11) homogén differenciálegyenlet $y_{H\text{ált}}$ általános megoldása és a (4.10) lineáris inhomogén differenciálegyenlet valamely $y_p$ partikuláris megoldása összegeként, tehát:

$$y_{I\text{ált}} = y_{H\text{ált}} + y_p .$$

b) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\,y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása mindig megtalálható a konstans variálás módszerével.

c) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\,y = f(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\ , \quad \text{és} \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.12}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat egyértelműen oldható meg $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)\ , y_0 \in \mathbb{R}$ esetén.

**Bizonyítás.**

a) Először egy segédtételt bizonyítunk be.

**4.2.1. Segédtétel**

Ha (I)-nek két megoldását megtaláltuk, akkor ezeknek a megoldásoknak a különbsége megoldása az

$$(H) \qquad y' + g(x)\,y = 0$$

homogén differenciálegyenletnek.

Ugyanis

$$(I) \qquad y_1'(x) + g(x)\,y_1(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,,$$

és

$$(I) \qquad y_2'(x) + g(x)\,y_2(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,,$$

akkor a két egyenlet különbségéből kapjuk:

$$y_1'(x) + g(x)\,y_1(x) - (y_2'(x) + g(x)\,y_2(x)) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\ .$$

Tehát:

$$(y_1(x) - y_2(x))' + g(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) = 0\,,$$

azaz $y_1(x) - y_2(x)$ megoldása a (4.11) homogén differenciálegyenletnek. Ezért nevezzük (4.11)-et a (4.10) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenletnek.

Jelöljük az $(y_1(x) - y_2(x))$ különbséget $y_H(x)$-szel, ekkor: $y_1(x) = y_H(x) + y_2(x)$ . Ebből már következik a tétel állítása:

$$y_{I\text{ált}} = y_{H\text{ált}} + y_p\,,$$

vagyis a (4.10) inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egyenlő a hozzá tartozó (4.11) homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása plusz a (4.10) inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása.

$y_1 := y_{I\text{ált}}\,, \quad y_2 := y_p$ választással:

$y_1 - y_2 = y_{H\text{ált}}$

az összes lehetséges megoldása (H)-nak

egy konkrét megoldása (I)-nek

tetszőleges megoldása (I)-nek

(I)-nek nem lehet más megoldása, csak ami ebből $y_1$-re kijön, midőn $y_H$ helyén (H) minden lehetséges megoldását szerepeltetjük.

b) Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével

$$y_p = c(x)\,\varphi(x)$$

alakban keressük, ahol $\varphi$ (H) egy seholse nulla megoldása, tehát $\varphi'(x) + g(x)\varphi(x) = 0$. $y_p$-nek az (I)-be való behelyettesítéssel megmutatjuk, hogy létezik ilyen alakú megoldás.
Deriváljuk $y_p$-t: $y_p' = c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)$
Behelyettesítünk (I)-be:

$$(c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)) \; + \; g(x)\cdot(c(x)\cdot\varphi(x)) \; =$$

$$= c'(x)\cdot\varphi(x) \; + \; c(x)\cdot \underbrace{(\varphi'(x) + g(x)\cdot\varphi(x))}_{\equiv 0,\ \text{mivel } \varphi \text{ a (H) megoldása}} = c'(x)\cdot\varphi(x) = f(x)$$

Ebből

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

adódik. Mivel ez folytonos, ezért létezik primitív függvénye, tehát $c$ mindig meghatározható integrálással. Mivel csak egy $y_p$ kell, tehát elég egyetlen $c(x)$-et találni (az integrálási állandó 0-nak választható).

c) Nem bizonyítjuk.

4.1. Pl. $\boxed{y' - \dfrac{y}{x} = x\mathrm{e}^x\,, \qquad y(1) = 5\,, \quad y(x) = ?}$

Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.

(H): $\quad y' - \dfrac{y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x} \qquad y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$|y| = \mathrm{e}^C |x|, \quad K := \mathrm{e}^C (> 0) \quad \Longrightarrow \quad y = \pm K x \quad \text{és} \quad y \equiv 0$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása: $\quad y_{H\text{ált}} = C\,x \quad (C \in \mathbb{R})$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x)x\,, \qquad y_p' = c'(x)\,x + c(x)$$

Behelyettesítve (I)-be:

$$\text{(I)} \qquad c'(x)\,x + \underbrace{c(x) - \frac{c(x)\,x}{x}}_{=0} = x\,\mathrm{e}^x$$

Innen:

$$c'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_p = x\,\mathrm{e}^x$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása: $\quad \underline{\underline{y_{I\text{ált}} = C\,x + x\,\mathrm{e}^x \qquad (C \in \mathbb{R})}}$

Az y(1)=5 kezdetiérték probléma megoldása:

$$5 = C + \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad C = 5 - \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = (5-\mathrm{e})x + x\mathrm{e}^x}}$$

### 4.1. Feladat.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

1.) $y\mathrm{e}^{2x} - (1 + \mathrm{e}^{2x})\,y' = 0$

2.) $y' - \dfrac{1}{x\ln x} y = x\ln x\,, \qquad y(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

3.) $y' - \dfrac{y}{x} - 2x^2 = 0\,, \qquad y(1) = -1$

4.) $y' + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1+2x}{1+x}\,, \qquad y(0) = 2$

5.) $y' + \dfrac{y}{x} = \mathrm{e}^x + \dfrac{3\mathrm{e}^x}{x}$

6.) $y' - \dfrac{3}{x} y = 2$

7.) $y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}\,, \qquad y(1) = 0$

8.) $y' + \dfrac{2}{x} y = 3\,, \qquad y(1) = 2$

9.) $y' - \dfrac{3}{x} y = x^4$

10.) $y' + \dfrac{2}{x} y = 3x^2\,, \qquad y(1) = 4$

11.) $y' + 2y \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x$

12.) $y' + \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{1}{x} + 2\right) \mathrm{e}^{2x}, \qquad x > 0$

13.) $y' + 2xy = 4x$

14.) $y' - 3y = x^2 + 1$

15.) $xy' - y = \mathrm{e}^x \left(x^2 + x^3\right)$

16.) $y' + ay = \mathrm{e}^{5x}, \qquad a \neq 0$

17.) $y' + ay = \mathrm{e}^{mx}, \qquad a \neq 0$

# 5. Új változó bevezetése

1.) Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek:

(a) $y' = \varphi(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$u := \frac{y}{x} \qquad \left(u(x) = \frac{y(x)}{x}\right)$$
$$y = u \cdot x$$
$$y' = u' \cdot x + u \cdot 1$$

A helyettesítés elvégzése után az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk:

$$u'\,x + u = f(u)$$

(b) $y' = f(ax + by) \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$u := ax + by$$
$$y = \frac{1}{b}u - \frac{a}{b}x$$
$$y' = \frac{1}{b}u' - \frac{a}{b}$$

A helyettesítés után kapott egyenlet:

$$\frac{1}{b}\,u' - \frac{a}{b} = f(u)\,,$$

mely szintés szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

2.) Egyéb helyettesítések: ezeknél megadjuk, hogy mivel helyettesítünk.

**Példák:**

5.1. Pl. $\boxed{y' = \dfrac{2y^2 + x^2}{xy} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0}$

$$y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \qquad u := \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = u \cdot x,\ \ y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 2u + \frac{1}{u}$$

$$u'x = \frac{u^2+1}{u}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) = \ln|x| + C$$

$$\ln\left(u^2+1\right) = \ln x^2 + 2C$$

$$u^2 + 1 = x^2 \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2C}}_{:=K>0}$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = Kx^2$$

$$\underline{\underline{y^2 = Kx^4 - x^2}} \qquad K > 0$$

5.2. Pl. $\boxed{x^2y' + xy = x^2 + y^2 \qquad y(1) = 2}$

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \qquad x \neq 0 \qquad (\text{Most } x > 0)$$

$$u := \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = ux \quad \Longrightarrow \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 1 + u^2 - u$$

$$u'x = 1 + u^2 - 2u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{(1-u)^{-1}}{-1} = \ln|x| + C \qquad |x| = x \text{ most}$$

$$\frac{1}{1-u} = C + \ln x$$

Visszahelyettesítve:

$$\underline{\underline{1 - \frac{y}{x} = \frac{1}{C + \ln x}}}$$

$$y(1)=2: \qquad 1-2=\frac{1}{C} \implies C=-1 \implies \underline{\underline{y=x\left(1-\frac{1}{-1+\ln x}\right)}}$$

5.3. Pl. $\boxed{y'=\mathrm{e}^{2y+x}-\frac{1}{2} \qquad y(0)=0}$

$$u:=2y+x \implies y=\frac{u}{2}-\frac{x}{2} \implies y'=\frac{u'}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{u'}{2}-\frac{1}{2}=\mathrm{e}^u-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u'=2\mathrm{e}^u$$

$$\int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\int 2\,\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{e}^{-u}=2x+C$$

$$\mathrm{e}^{-2y-x}=-2x+C \qquad y(0)=0: \quad 1=C$$

$$-2y-x=\ln(1-2x)$$

$$\underline{\underline{y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1-2x)}}$$

5.4. Pl.

| |
|---|
| Alkalmazzuk az $u(x)=y^3(x)$ helyettesítést, és oldjuk meg a $$3xy'-2y=x^3y^{-2}$$ differenciálegyenletet! |

$$u=y^3\,, \qquad u'=3y^2\cdot y'\,, \qquad y'=\frac{u'}{3y^2}$$

A differenciálegyenlet átalakítva:

$$3y'y^2-\frac{2}{x}y^3=x^2$$

Elvégezve a helyettesítést:

$$u'-\frac{2}{x}u=x^2 \qquad \text{(lineáris elsőrendű d.e.)}$$

$$\vdots$$

$$u_{há}=C\mathrm{e}^{-\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{\ln x^2}=Cx^2$$

$$u_{ip}=c(x)x^2 \implies u_{ip}'=c'x^2+c\cdot 2x$$

$$c'x^2+c\cdot 2x-\frac{2}{x}\cdot cx^2=x^2$$

$$c'(x)=1 \implies c(x)=x$$

$$u_{ip} = x^3$$

$$u_{iá} = Cx^2 + x^3$$

$$y^3 = Cx^2 + x^3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{C \cdot x^2 + x^3}}}$$

5.5. Pl. $\boxed{y(xy+1) + x(1 + xy + x^2y^2)y' = 0 \qquad u = xy}$

$$u' = 1 \cdot y + xy' \quad \Longrightarrow \quad xy' = u' - y \quad \Longrightarrow \quad xy' = u' - \frac{u}{x}$$

$$\frac{u}{x}(u+1) + (1 + u + u^2)\left(u' - \frac{u}{x}\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$u' \, \frac{1 + u + u^2}{u^3} = \frac{1}{x}$$

$$\int (u^{-3} + u^{-2} + u^{-1}) \, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-1}}{-1} + \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2x^2y^2} - \frac{1}{xy} + \ln|xy| = \ln|x| + C}}$$

5.6. Pl. $\boxed{y'\left(\frac{y^2 - 1}{y^2}\right) = -2x\left(x^2 + y + \frac{1}{y}\right) \qquad z = x^2 + y + \frac{1}{y}}$

$$z = x^2 + y + \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad z' = 2x + y' - \frac{y'}{y^2} \quad \Longrightarrow \quad y' \, \frac{y^2 - 1}{y^2} = z' - 2x$$

Behelyettesítve:

$$z' - 2x = -2xz \quad \Longrightarrow \quad z' + 2xz = 2x \qquad \text{lineáris elsőrendű d.e.}$$

$$\ldots \quad z_{iá} = z_{há} + z_{ip} = C\mathrm{e}^{-x^2} + 1$$

Visszahelyettesítve:

$$\underline{\underline{x^2 + y + \frac{1}{y} = C\mathrm{e}^{-x^2} + 1}}$$

### 5.1. Feladat.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

1.) $4x - 3y + y'\,(2y - 3x) = 0 \qquad u = \dfrac{y}{x}$

2.) $(1 - 2x - 2y)\,y' = x + y + 1 \qquad u = x + y$

3.) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2\,y^4 \qquad u = y^{-3}$

4.) $y' + 2xy = 2x\,y^3 \qquad u = y^{-2}$

5.) $5(1 + x^2)\,y' = 2xy + \dfrac{(1 + x^2)^2}{y^4} \qquad u = y^5$

6.) $(x^2y^2 - 1)\,y' + 2x\,y^3 = 0 \qquad u = \dfrac{1}{xy}$

7.) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2\,\dfrac{y}{x} \qquad u = \dfrac{y}{x}$

8.) $3\,y' - \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{x^2}{y^2} \qquad u = y^3$

9.) $y' = \dfrac{2x + y}{y - x}, \quad x > 0 \qquad u = \dfrac{y}{x}$

10.) $xy'\operatorname{sh} y - \operatorname{ch} y = x^2 \operatorname{sh} x \qquad u = \operatorname{ch} y$

11.) $xy'\sin y + \cos y = 1 \qquad u = \cos y$

12.) $\dfrac{1 + y'}{x + y} = \dfrac{1 + \ln^2(x + y)}{1 + x^2} \qquad y(0) = \mathrm{e} \qquad u = \ln(x + y)$

13.) $xy'\cos(x + y) = \sin^2(x + y) - x\cos(x + y) - 1 \qquad u = \sin(x + y)$

# 6. Iránymező, izoklinák, grafikus megoldás

Tegyük fel, hogy az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ megoldása az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek. Ekkor

$$\varphi'(x) \;=\; f\,(x, \varphi(x))\;, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,.$$

Ha $\varphi$ átmegy az $(x_0, y_0)$ ponton, akkor $\varphi(x_0) = y_0$ és

$$\varphi'(x_0) \;=\; f\,(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0)\,.$$

Tehát, ha az $(x_0, y_0)$ koordinátákat behelyettesítjük a differenciálegyenlet jobb oldalába, akkor az így kapott $f(x_0, y_0)$ érték megadja az $(x_0, y_0)$ ponton átmenő megoldásgörbe érintőegyenesének a meredekségét. ( $\operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0)$ )

Tegyük fel, hogy minden $(x_0, y_0)$ pontban megrajzolunk egy $f(x_0, y_0)$ meredekségű vonaldarabkát, amit **vonalelemnek** nevezünk. Az így kapott tér az **iránymező**.
Minden $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlethez tartozik egy iránymező. A megoldásgörbéknek illeszkedniük kell ehhez az iránymezőhöz, vagyis a megoldásgörbét minden pontjában érinti az iránymező valamely vonaleleme.

6.1. Pl. $\boxed{y' = \dfrac{y}{x}\,, \quad x \neq 0 \quad \text{(Az } y \text{ tengely pontjaihoz nincs rendelve irány.)}}$

Az $y = mx$ egyenes pontjaihoz a differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli: $\operatorname{tg}\alpha = m$.
Tehát most a vonalelemek párhuzamosak a szóban forgó ponthoz mutató helyvektorral.
A megoldásgörbének minden pontban érintenie kell a megfelelő vonalelemet.

D1 ábra

A megoldások leolvashatók az iránymezőből: $y = c\,x\,,\ x > 0$, vagy $y = c\,x\,,\ x < 0$.
(Valóban: $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \implies y = c\,x\,,\ x \neq 0$ és $y \equiv 0\,,\ x \neq 0$. )

**Izoklina:** azon pontok halmaza, melyekhez az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli,tehát az izoklina pontjaiban a vonalelemek párhuzamosak. Ennek megfelelően az izoklinák egyenlete:

$$f(x, y) = K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

6.2. Pl.

$$y' = x - y^2$$

a.) Írja fel az izoklinák egyenletét!
Mely pontokban van a megoldásoknak lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege?

b.) Tekintsük a differenciálegyenlet $(1, -2)$ ponton átmenő megoldását!
(Belátható, hogy van ilyen: egzisztencia tétel.)
Van-e ennek a megoldásfüggvénynek inflexiója az $(1, -2)$ pontban?

a.) Izoklinák: $\quad x - y^2 = K \quad$ (parabolák)

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $\quad y' = 0$ .
Tehát a $K = 0$-hoz tartozó izoklina pontjaiban lehet lokális szélsőérték:

$$x - y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y^2$$

parabola pontjai jönnek szóba. (Az $x = y^2$ izoklinát a megoldásgörbék vízszintesen metszik.)
Az $y' = x - y^2$ differenciálegyenlet mindkét oldalát $x$ szerint deriváljuk:

$$y'' = 1 - 2yy'$$

Az $x = y^2$ parabola pontjaiban $y' = 0$ és így: $\quad y'' = 1 > 0$

$\Longrightarrow$ Az $x = y^2$ parabola pontjaiban $y' = 0$ és $y'' > 0$ , tehát a megoldásfüggvényeknek lokális minimuma van.

b.)

$$y' = x - y^2 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = 1 - (-2)^2 = -3$$
$$y'' = 1 - 2yy' \quad \Longrightarrow \quad y''(1) = 1 - 2(-2)(-3) = -11 \neq 0$$

Nem teljesül az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele $\quad \Longrightarrow \quad$ nincs itt inflexió.

6.3. Pl.

Milyen lokális tulajdonsága van az

$$y' = x^3 + y^3 - 9$$

differenciálegyenlet $(2, 1)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

Az $y'(x) = x^3 + y^3(x) - 9$ egyenletben $x$ helyére 2 kerül. $(y(2) = 1)$

$y'(2) = 2^3 + 1^3 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ lokális szélsőérték lehet

A differenciálegyenlet mindkét oldalát $x$ szerint deriváljuk és itt is elvégezzük az $x = 2$ helyettesítést:

$y'' = 3x^2 + 3y^2 \cdot \underbrace{y'}_{=0} \qquad y''(2) = 12 > 0 \quad \Longrightarrow \quad y(2) = 1 \quad$ lokális minimum érték.

6.4. Pl.

Az $y = \varphi(x)$ átmegy az $x_0 = 2$ ; $y_0 = 4$ ponton, és kielégíti az

$$y^2 y' = x(64 - y^3) + x - 2$$

differenciálegyenletet. Milyen lokális tulajdonsága van ennek a megoldásgörbének a $(2, 4)$ pontban?

Az $x$ helyére 2-t, az $y$ helyére 4-et helyettesítve kapjuk:

$$4^2\, y'(2) = 2(64 - 4^3) + 2 - 2,$$

amiből $y'(2) = 0$. Deriváljuk $x$ szerint a fenti implicit differenciálegyenletet:

$$2yy'y' + y^2 y'' = (64 - y^3) + x(-3y^2)y' + 1.$$

Az $x$ helyére 2-t, az $y$ helyére 4-et és az $y'$ helyére 0-át helyettesítve kapjuk:

$$0 + 16y''(2) = 0 + 2(-3 \cdot 0) + 1\,,$$

amiből $y''(2) = \dfrac{1}{16} > 0$.

$y(x)$-nek $x = 2$-ben lokális minimuma van ( $y'(2) = 0$ ; $y''(2) > 0$ ), a minimum értéke: 4.

6.5. Pl.

| |
|---|
| Az $y = \varphi(x)$, $x \in K_{2,\delta}$ megoldása az $$y' = 2\,(x-2)^2 + 5\,y^2\,, \qquad y(2) = -1$$ kezdetiérték problémának. |
| a.) Határozzuk meg a $\varphi'(2)$, $\varphi''(2)$, $\varphi'''(2)$ értékeket! |
| b.) Van-e lokális szélsőértéke $\varphi$-nek $x_0 = 2$-ben? |
| c.) Írjuk fel a $\varphi$ függvény $x_0 = 2$ bázispontú harmadfokú Taylor polinomját! |

M

$$\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 + 5\,\varphi^2(x)\,, \qquad \varphi(2) = -1$$

Mivel a jobb oldal differenciálható, azért a bal oldal is. Tehát létezik $\varphi''(x)$, $x \in K_{2,\delta}$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $\varphi$ akárhányszor differenciálható $K_{2,\delta}$-ban.

a.) $\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 + 5\,\varphi^2(x) \implies \varphi'(2) = 2\,(2-2)^2 + 5\,\underbrace{\varphi^2(2)}_{=(-1)^2=1} = 5$

$\varphi''(x) = 4\,(x-2) + 5 \cdot 2\,\varphi(x)\,\varphi'(x) \implies \varphi''(2) = 4\,(2-2) + 10 \cdot (-1) \cdot 5 = -50$

$\varphi'''(x) = 4 + 10\varphi'(x)\varphi'(x) + 10\varphi(x)\varphi''(x) \implies \varphi'''(2) = 4 + 10 \cdot 5 \cdot 5 + 10 \cdot (-1) \cdot (-50) = 754$

b.) Mivel $\varphi'(2) = 5 \neq 0 \implies$ nincs lokális szélsőérték $x_0 = 2$-ben.
(Szükséges feltétel nem teljesül).

c.) $T_3(x) = -1 + 5\,(x-2) - \dfrac{50}{2!}\,(x-2)^2 + \dfrac{754}{3!}\,(x-2)^3$

### 6.1. Feladat.

1.)
$$y' = x^2 + 2y^2$$
A differenciálegyenlet megoldása nélkül válaszoljunk a következő kérdésekre!

(a) Mely pontokban párhuzamosak a megoldások az $y = 2x$ egyenessel?

(b) Lehet-e lokális szélsőértéke a megoldásoknak?

(c) Írja fel az $y(0) = 0$ kezdeti érték problémához tartozó megoldásgörbe $x_0 = 0$ körüli harmadfokú Taylor polinomját!

2.)
$$y' + y^2 + x^2 + 1 = 0$$
Írja fel az izoklinák egyenletét! Van-e a megoldásoknak lokális szélsőértéke?
Vizsgálja meg a megoldásgörbék pozitív síknegyedbe ($x > 0, \quad y > 0$) eső részeit monotonitás szempontjából!
Számítsa ki az $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ ponton átmenő megoldás első és második deriváltját az $x_0$ pontban!

3.) Milyen lokális tulajdonsága van az
$$y' = y^4 - x^3 + 2x - 15$$
differenciálegyenlet $(-1, 2)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

4.)
$$y' = (y^2 - 4)x + x - 1$$

(a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be három vonalelemet!

(b) Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = 1, \quad y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak az adott pontban? (Ha egyáltalán van ilyen megoldás.)

5.)
$$y' = x^2 + y^2 - 12$$

(a) Vázoljuk az izoklinákat, jelöljük be a vonalelemek irányát!

(b) Mely pontokban van lokális maximuma, illetve lokális minimuma a megoldásgörbéknek?

# 7. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y$

(H): $L[y] = 0$ (homogén egyenlet)

(I): $L[y] = f(x)$ (inhomogén egyenlet)

Ha $f, a_0, \ldots, a_{n-1} \in C^0_{(a,b)}$, akkor $\forall\, y^{(k)}(x_0) = y_{0,k}$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_0 \in (a,b)$ kezdetiérték probléma egyértelműen oldható meg.

(T) Ha $y_1, y_2$ megoldása (I)-nek, akkor $y_1 - y_2$ megoldása (H)-nak.

(B) HF.: az elsőrendűhöz hasonlóan.

(T) Következmény:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip}$$

## 7.1. A homogén egyenlet általános megoldása

(T) (H) megoldásai lineáris teret alkotnak.

(B) Belátjuk, hogy ha $Y_1, Y_2$ megoldása (H)-nak, akkor $Y_1 + Y_2$ és $C \cdot Y_1$ is az.

$$\begin{array}{rl}
& Y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)\, Y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, Y_1' + a_0(x)\, Y_1 \equiv 0 \\
+ & \left(Y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)\, Y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, Y_2' + a_0(x)\, Y_2 \equiv 0\right) \\
\hline
& (Y_1+Y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)\, (Y_1+Y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, (Y_1+Y_2)' + a_0(x)\, (Y_1+Y_2) \equiv 0
\end{array}$$

Tehát valóban $L[Y_1 + Y_2] \equiv 0$. Hasonlóan lehet megmutatni, hogy $L[Y_1] \equiv 0$-ból következik $L[C \cdot Y_1] \equiv 0$.
Ebből már következik, hogy (H) megoldásai lineáris teret alkotnak.

■

(T) (H) megoldásainak tere $n$ dimenziós. $(\neg$B)

Ha tehát megadunk $n$ db lineárisan független megoldást, akkor

$$y_{há} = \sum_{i=1}^{n} C_i\, Y_i(x)$$

(D) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ függvények lineárisan függetlenek $x \in I$-n, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f_i(x) \equiv 0,\ x \in I \quad \text{a.cs.a., ha } \lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Ⓓ Az $f_1, \ldots, f_n$ függvények legyenek az $x$ változónak legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható függvényei. A

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mátrixot Wronski-féle mátrixnak, a belőle képzett determinánst *Wronski-féle determinánsnak* nevezzük.

Legyen $f_1, \ldots, f_n$ legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható $I$-n:

a.) az I-n $|\underline{\underline{W}}| \not\equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1, \ldots, f_n$ lineárisan függetlenek $I$-n

b.) $\quad \not\Longleftarrow$

Pl.: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = |x|^3$ lineárisan függetlenek $(-\infty, \infty)$-en, de

$$|\underline{\underline{W}}| = \begin{vmatrix} x^3 & |x|^3 \\ 3x^2 & \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

(Kevésbé fontos számunkra:

c.) $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan összefüggő $\quad \Longrightarrow \quad |\underline{\underline{W}}| \equiv 0.$ )

De igaz a következő tétel:

Ⓣ $L[Y_i] \equiv 0$, $x \in I$, $i = 1, \ldots, n$, tehát $Y_1, \ldots, Y_n$ a homogén egyenlet megoldásai $I$-n :
$Y_1, \ldots, Y_n$ lineárisan függetlenek $\quad \Longleftrightarrow \quad |\underline{\underline{W}}(x)| \neq 0$, ha $x \in I$.
(Tehát ilyenkor érvényes a megfordított, egyben erősebb állítás is.) $\quad (\neg B)$

Hogyan kereshetünk $n$ darab lineárisan független megoldást?

### 7.1.1. A homogén egyenlet általános megoldása függvény együtthatós esetben

Ezzel nem foglalkozunk.

### 7.1.2. A homogén egyenlet általános megoldása konstans együtthatós esetben

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ próbafüggvénnyel kísérletezünk:

$$y' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(k)} = \lambda^k\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Behelyettesítve (H)-ba:

$$\underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0\right)}_{\text{karakterisztikus polinom}} \mathrm{e}^{\lambda x} = 0\,, \qquad \mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$$

A következő, ún. karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0 = 0$$

Ennek $n$ db gyöke van, de lehetnek többszörös gyökök és komplex gyökök is. Mivel állandó együtthatós a polinom, a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. A különböző esetek:

1.) A különböző valós gyökökhöz tartozó $\mathrm{e}^{\lambda_i x}$, $\mathrm{e}^{\lambda_j x}$ $(i \neq j)$ függvények lineárisan függetlenek.

2.) Ha pl. $\lambda_1$ $k$-szoros gyök (belső rezonancia), akkor is van hozzá $k$ db lineárisan független megoldás: $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $x^2\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ $(\neg\mathrm{B})$

3.) Az előző állítások akkor is igazak, ha a gyökök komplexek. De így nem valós megoldást kapnánk.

Pl.: $\lambda_1 = \alpha + j\beta\,, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - j\beta$ :

$Y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{(\alpha+j\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{j\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x)$

$Y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{(\alpha-j\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{j(-\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x)$

Mint tudjuk $Y_1$ és $Y_2$ tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$$\left.\begin{aligned} Y_1^* &:= \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \left(= \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\right) \\ Y_2^* &:= \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \left(= \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Ezek is lineárisan függetlenek.} \\ \text{Ezekre cseréljük le } Y_1, Y_2\text{-t.}\end{array}$$

(Többszörös komplex gyökök esetén $Y_1^*, Y_2^*$ szorzandó $x$-szel, $x^2$-tel, $x^3$-nel, stb.)

**Példák:**

7.1. Pl. $\boxed{y''' - 2y'' - 3y' = 0}$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = -1,\; \lambda_3 = 3$$

$$y_H = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

7.2. Pl. $\boxed{y''' + 2y'' + y' = 0}$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

7.3. Pl. $\boxed{y''' + 4y'' + 13y' = 0}$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2 - 3j,\ \lambda_3 = -2 + 3j$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x$$

7.4. Pl. $\boxed{y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0}$

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = j,\ \lambda_4 = \lambda_5 = -j$$

$$y_H = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$$

**7.1. Feladat.**

Írjon fel olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek megoldásai:

a.) $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$

b.) $e^x,\ xe^x,\ x^2 e^x$

c.) $x^2 e^{-x},\ x^3 e^{2x}$

d.) $e^{2x} \sin x,\ e^{2x} \cos x$

e.) $e^{2x} \sin 3x,\ e^{-3x}$

f.) $e^{2x} \sin x,\ x^2 e^{2x} \sin x,\ 1$

g.) tetszőleges másodfokú polinom, $\sin x$

## 7.2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

### 7.2.1. Állandók variálása

A módszer minden jobb oldali $f$ függvénynél alkalmazható, azonban elég nehézkes. Speciális $f$-re lesz jobb módszerünk is. Az állandók variálását csak a másodrendű esetre mutatjuk meg. (Számonkérése csak a VDII-ben lesz.)

Legyen adott az $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x)$-hez tartozó homogén differenciálegyenlet megoldása:

$y_H = C_1\,Y_1(x) + C_2\,Y_2(x)$

Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az alábbi alakban keressük:

$$c\cdot \Big|\quad y_{ip} := \underline{c_1(x)\,Y_1(x)} + \underline{\underline{c_2(x)\,Y_2(x)}}$$

$$b\cdot \Big|\quad y'_{ip} = \underline{c_1\,Y'_1} + \underline{\underline{c_2\,Y'_2}} + \underbrace{c'_1\,Y_1 + c'_2\,Y_2}_{:=0}$$

Alulhatározott feladat (majd meglátjuk, hogy jogos a felvétel).

$$a\cdot \Big|\quad y''_{ip} = c'_1\,Y'_1 + \underline{c_1\,Y''_1} + c'_2\,Y'_2 + \underline{\underline{c_2\,Y''_2}}$$

Behelyettesítve (I)-be ($c_1$, $c_2$, $c'_1$, $c'_2$-re rendezzük):

$$c_1\underbrace{(aY''_1 + bY'_1 + cY_1)}_{=0,\text{ mert } L[Y_1]\equiv 0} + c_2\underbrace{(aY''_2 + bY'_2 + cY_2)}_{=0,\text{ mert } L[Y_2]\equiv 0} + aY'_1c'_1 + aY'_2c'_2 = f(x)$$

$c'_1, c'_2$-re az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y'_1 & Y'_2 \end{bmatrix}}_{\underline{W}} \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

$|\underline{W}| \neq 0$, mert $Y_1$, $Y_2$ lineárisan függetlenek és $L[y] = 0$ megoldásai $\Longrightarrow$ az egyenletrendszer egyértelműen oldható meg $c'_1$, $c'_2$-re:

$$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y'_1 & Y'_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

$c'_1, c'_2$ folytonossága miatt létezik $c_1, c_2$. (Integrációs állandó nem kell.)
Példát gyakorlaton mutatunk.

### 7.2.2. Kísérletezés (Ansatz)

Csak speciális zavaró függvény (a jobb oldalon álló $f$ ) esetén alkalmazható és csak állandó (konstans) együtthatójú lineáris differenciálegyenletnél!

Ha az állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f$ függvény:

a.) $Ke^{\alpha x}$

b.) $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$

c.) $K_1 \sin \alpha x$

d.) $K_2 \cos \beta x$

függvények valamelyike, akkor a partikuláris megoldást az alábbi alakban kereshetjük:

a.) $y_{ip} = Ae^{\alpha x}\,, \qquad A$ ismeretlen

b.) $y_{ip} = Q_m(x) = B_m x^m + \cdots + B_0\,, \qquad B_0, \dots, B_m$ ismeretlen

c.) $y_{ip} = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x\,, \qquad A, B$ ismeretlen

d.) $y_{ip} = A \sin \beta x + B \cos \beta x\,, \qquad A, B$ ismeretlen

A próbafüggvényben szereplő — még határozatlan — állandókat tartalmazó kisérletező függvényt elegendően sokszor differenciálva és az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve az egyenlő együtthatók módszerével (a megfelelő tagok együtthatóinak összehasonlításával) tudjuk meghatározni.

Ha a feltételezés helyes volt, akkor annyi független lineáris egyenletet kapunk az ismeretlen együtthatókra, ahány ismeretlenünk van. (Tehát pontosan 1 megoldás van.)

Ha a jobb oldali $f$ függvényben az előző függvények összege, szorzata szerepel, akkor a kísérletező függvényeket is össze kell adni.

*Külső rezonancia:*

A módszer nem vezet eredményre, ha a kísérletező függvény, vagy annak egy tagja szerepel a homogén egyenlet megoldásai között. Ilyenkor $x$-szel szorozzuk ezt a tagot mindaddig, amíg megszűnik a rezonancia.

7.5. Pl. $\boxed{y'' - 3y' + 2y = (e^{3x}) + (x^2 + x)}$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \qquad y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot & y_{ip} := (Ae^{3x}) + (Bx^2 + Cx + D) \\ -3\cdot & y'_{ip} = 3Ae^{3x} + 2Bx + C \\ 1\cdot & y''_{ip} = 9Ae^{3x} + 2B \end{array}$$

$$(9A - 9A + 2A)e^{3x} + x^2(2B) + x(2C - 6B) + (2D - 3C + 2B) = e^{3x} + x^2 + x$$

$$2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$2B = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{B = \frac{1}{2}}$$

$$2C - 6B = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2C = 4 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{C = 2}$$

$$2D - 3C + 2B = 0 \qquad 2D = 6 - 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{D = \frac{5}{2}}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{3x}}}$$

7.6. Pl. $\boxed{y'' - 3y' + 2y = (x) + (e^x)}$

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \qquad \text{(Lásd fent.)}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot & y_{ip} := (Ax + B) + (Ce^x) \\ -3\cdot & y'_{ip} = \qquad A \ + Ce^x \\ 1\cdot & y''_{ip} = \qquad\qquad Ce^x \end{array}$$

$$x(2A) + (2B - 3A) + (\underbrace{2C - 3C + C}_{=0})e^x = x + e^x \qquad (0 \neq 1 \ \text{ külső rezonancia})$$

Helyesen:

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot & y_{ip} := (\,Ax + B) + (Cxe^x) \\ -3\cdot & y'_{ip} \ = \quad +A \quad +Cxe^x \ +Ce^x \\ 1\cdot & y''_{ip} \ = \qquad\quad +Cxe^x \ +Ce^x + Ce^x \end{array}$$

$$x(2A) + (2B - 3A) + xe^x(\underbrace{2C - 3C + C}_{=0}) + e^x(-3C + 2C) = x + e^x$$

$$2A = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{A = \frac{1}{2}}$$

$$2B - 3A = 0 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{B = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}}$$

$$-C = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{C = -1}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x}}$$

7.7. Pl. $\boxed{y'' - y = (x^2 - x + 1) + (e^x)}$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-1\cdot & y_{ip} := (Ax^2 \ +Bx \ \ +C) \ +(Dx\mathrm{e}^x) \\
0\cdot & y'_{ip} = \qquad\quad +2Ax + B + \quad Dx\mathrm{e}^x \qquad +D\mathrm{e}^x \\
1\cdot & y''_{ip} = \qquad\qquad\qquad +2A \ \ +Dx\mathrm{e}^x \ \ +D\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^x
\end{array}
$$

$$-Ax^2 - Bx + (2A - C) + x\mathrm{e}^x(-D + D) + \mathrm{e}^x \cdot 2D = x^2 - x + 1 + \mathrm{e}^x$$

$$A = -1 \qquad B = 1 \qquad C = 2A - 1 = -3 \qquad D = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x - 3 + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x}}$$

7.8. Pl. $\boxed{y'' - 2y' + y = 6\mathrm{e}^x}$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad y_H = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x \qquad \text{(belső rezonancia)}$$

$$
\begin{array}{r|l}
1\cdot & y_{ip} := Ax^2\mathrm{e}^x \qquad \text{(külső rezonancia)} \\
-2\cdot & y'_{ip} = 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x \\
1\cdot & y''_{ip} = 2A\mathrm{e}^x + 2Ax\mathrm{e}^x + 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x
\end{array}
$$

$$x^2\mathrm{e}^x(\underbrace{A - 2A + A}_{=0}) + x\mathrm{e}^x(\underbrace{-4A + 4A}_{=0}) + 2A\mathrm{e}^x = 6\mathrm{e}^x \qquad A = 3$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + 3x^2\mathrm{e}^x}}$$

7.9. Pl. $\boxed{y'' + 8y' + 25y = \mathrm{e}^{-4x}}$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm j6}{2} = -4 \pm j3$$

$$y_H = C_1\mathrm{e}^{-4x}\cos 3x + C_2\mathrm{e}^{-4x}\sin 3x$$

$$
\begin{array}{r|l}
25\cdot & y_{ip} := A\mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{(nincs külső rezonancia!)} \\
8\cdot & y'_{ip} = -4A\mathrm{e}^{-4x} \\
1\cdot & y''_{ip} = 16A\mathrm{e}^{-4x}
\end{array}
$$

$$(25A - 32A + 16A)\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} \qquad 9A = 1 \qquad A = \frac{1}{9}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^{-4x}\cos 3x + C_2\mathrm{e}^{-4x}\sin 3x + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-4x}}}$$

7.10. Pl. $\boxed{y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3}$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$y_H = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} \qquad (y_{ip} = A\mathrm{e}^{-2x} \text{ nem jó, mert külső rezonancia van.})$$

$$\begin{array}{r|l}
6\cdot & y_{ip} := x \cdot A\mathrm{e}^{-2x} = \underline{Ax\mathrm{e}^{-2x}} \\
5\cdot & y'_{ip} = A\mathrm{e}^{-2x} - \underline{2Ax\mathrm{e}^{-2x}} \\
1\cdot & y''_{ip} = -2A\mathrm{e}^{-2x} - 2A\mathrm{e}^{-2x} + \underline{4Ax\mathrm{e}^{-2x}}
\end{array}$$

$$x\mathrm{e}^{-2x}(\underbrace{6A - 10A + 4A}_{=0}) + \mathrm{e}^{-2x}(5A - 4A) = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad \underline{A = 2}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}}$$

$$\begin{array}{ll}
y(0) = 0 & 0 = C_1 + C_2 \qquad C_1 = -C_2 \\
y'(0) = 3 & y' = -2C_1\mathrm{e}^{-2x} - 3C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x\mathrm{e}^{-2x} \\
 & 3 = -2C_1 - 3C_2 + 2 \qquad C_2 = -1 \qquad C_1 = 1
\end{array}$$

$$\underline{\underline{y = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}}$$

7.11. Pl. $\boxed{y'' + y = (-4\cos x) + (x) \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2}$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm j \qquad y_H = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$\begin{array}{r|l}
1\cdot & y_{ip} := (\underline{Ax\cos x} + \underline{\underline{Bx\sin x}}) + (Cx + D) \qquad \text{(külső rezonancia)} \\
 & (y'_{ip} = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x + C) \\
1\cdot & y''_{ip} = -A\sin x - A\sin x - \underline{Ax\cos x} + B\cos x + B\cos x - \underline{\underline{Bx\sin x}}
\end{array}$$

$$x\cos x(A - A) + x\sin x(B - B) + \cos x \cdot (2B) + \sin x \cdot (-2A) + Cx + D = -4\cos x + x$$

$$2B = -4 \qquad \underline{B = -2} \qquad -2A = 0 \qquad \underline{A = 0} \qquad \underline{C = 1} \qquad \underline{D = 0}$$

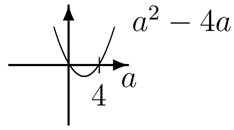
$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\sin x + x}}$$

$$\begin{array}{ll}
y(0) = 2 & 2 = C_1 \\
y'(0) = 2 & y' = -C_1\sin x + C_2\cos x - 2\sin x - 2x\cos x + 1 \\
 & 2 = C_2 + 1 \qquad C_2 = 1
\end{array}$$

$$\underline{\underline{y = 2\cos x + \sin x + x(1 - 2\sin x)}}$$

7.12. Pl. $\boxed{\begin{array}{c}\text{Tetszőleges } a \in \mathbb{R}\text{-re oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:}\\ y'' + ay' + ay = 0\end{array}}$

$$\lambda^2 + a\lambda + a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$




a.) $0 < a < 4 \quad (a^2 - 4a < 0) \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}$

$y = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\, x\right) + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\, x\right)$

b.) $a = 0$ ill. $a = 4 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$ belső rezonancia

$y = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \cdot x$

c.) $a < 0$ vagy $a > 4 \quad (a^2 - 4a > 0) \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a}$

$y = C_1 \mathrm{e}^{(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a})x} + C_2 \mathrm{e}^{(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a})x}$

### 7.2. Feladat.

1.) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

2.) $y''' - 4y'' + 5y' = 0$

3.) $y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

4.) $y'' + 4y = x$

5.) $y'' + y = 2\sin x \cos x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

6.) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

7.) $y^{(4)} + 4y'' = \cos x$ Adja meg az összes periodikus megoldást!

8.) $y'' + 4y = 2\sin x \cos x$

9.) $y'' + \alpha y' + 3y = 0$
Milyen $\alpha$ érték mellett lesz a differenciálegyenlet minden megoldásfüggvénye olyan, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$?

10.) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

11.) $y'' + y' = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

12.) $y' - 5y = 2\mathrm{e}^{5x}$

13.) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$

14.) $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' = x + 1$

15.) $y^{(4)} - 2y'' + y = 2\mathrm{e}^{x}$

# 8. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 2x + 3y + 1 \\ \tfrac{dy}{dt} &= -x + y + e^t \end{aligned} \right\} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Ez egy kétváltozós elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ahol $t$ a független változó, $x$, $y$ pedig az ismeretlen függvények. A fenti mátrixos alakot röviden jelölhetjük:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} + \underline{f}(t)}\ ,$$

ahol

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

**Konstans együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:**

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} + \underline{f}(t)} \qquad \left( \underline{f}(t) \not\equiv \underline{0} \right) \quad ,$$

ahol $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es, adott, konstans elemű mátrix.
A fenti differenciálegyenlet-rendszerhez tartozik egy homogén differenciálegyenlet-rendszer.

**Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:**

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}}$$

Az egyváltozós lineáris differenciálegyenlethez hasonlóan itt is igaz, hogy az inhomogén általános megoldása megegyezik a homogén általános megoldása plusz az inhomogén egy partikuláris megoldása:

Ⓣ $$\underline{x}_{I\acute{a}lt} = \underline{x}_{H\acute{a}lt} + \underline{x}_{Ip}$$

Ⓣ A homogén megoldástere lineáris tér, dimenziója $n$, ahol $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix.

Ⓣ Ha $\lambda$ sajátértéke $\underline{\underline{A}}$-nak és $\underline{s}$ egy a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektor ( $\underline{\underline{A}}\ \underline{s} = \lambda\ \underline{s}$ ), akkor

$$\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{s} \quad \text{megoldása az} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} \quad (H)$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

(B)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}s_1 \\ e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t}s_1 \\ \lambda e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\underline{s} = e^{\lambda t}\boxed{\lambda\underline{s}} = e^{\lambda t}\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{s}} = \underline{\underline{A}}e^{\lambda t}\underline{s} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

(T)

Ha az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es konstans elemű mátrixnak $n$ darab különböző sajátértéke $\lambda_1, \lambda_2, \dots,$ $\lambda_n$ és az ezekhez tartozó egy-egy megfelelő sajátvektor $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$, akkor az

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad (H)$$

általános megoldása felírható

$$\underline{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{s}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\underline{s}_3 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{s}_n$$

alakban, ahol $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges konstansok ( valós számtest felett vagy komplex számtest felett is igaz az állítás. )

8.1. (Pl.)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (H)$$

Karakterisztikus polinom: $det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6 \end{gathered}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{s} = 0 \quad \overset{\lambda=2}{\Longrightarrow} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez egy közönséges lineáris egyenletrendszer, ami Gauss módszerrel megoldható.

$s_{12} = 0$, $s_{11}$ és $s_{13}$ közül az egyik tetszőleges, így a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó egyik sajátvektor:

$$\underline{s_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan kapható $\lambda_2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

és $\qquad \lambda_3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\underline{x}_{H\acute{a}lt} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & c_1 e^{2t} & + & c_2 e^{3t} & + & c_3 e^{6t} \\ y & = & & & c_2 e^{3t} & - & 2c_3 e^{6t} \\ z & = & -c_1 e^{2t} & + & c_2 e^{3t} & + & c_3 e^{6t} \end{array}$$

ahol $c_1$, $c_2$, $c_3$ tetszőleges valós konstansok

8.2. Pl.

$$\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 2x & + & 9y \\ \dot{y} & = & x & + & 2y \end{array} \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} (2-\lambda)^2 = 9 \\ 2-\lambda = \pm 3 \\ \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{11} = 3 \quad s_{12} = 1 \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{21} = 3 \quad s_{22} = -1 \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{H\acute{a}lt} = c_1\, e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 3c_1 e^{5t} & + & 3c_2 e^{-t} \\ y & = & c_1 e^{5t} & - & c_2 e^{-t} \end{array}$$

, ahol $c_1$, $c_2 \in \mathbf{R}$

8.3. Pl.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\left|\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -16 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Karakterisztikus polinom: $(2-\lambda)^2+16=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} (2-\lambda)^2 &= -16 \\ 2-\lambda &= \pm 4i \\ \lambda_1 = 2+4i,\ \lambda_2 &= 2-4i \end{aligned}$

$$(\underline{\underline{A}}-\lambda_1\underline{\underline{E}})\underline{s}_1=\underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -4i & -16 \\ 1 & -4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{11}=4i \quad s_{12}=1 \quad \underline{s}_1=\begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan megkaphatjuk, hogy

$$(\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{E}})\underline{s}_2=\underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4i & -16 \\ 1 & 4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{21}=-4i \quad s_{22}=1 \quad \underline{s}_2=\begin{bmatrix} -4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a két sajátérték egymás konjugáltja, ezért a két sajátvektor is egymás konjugáltja. Így $\underline{s}_2$ meghatározására nem lett volna szükség.

$\lambda_1$ és $\underline{s}_1$ segítségével felírhatjuk a komplex megoldást:

$$\underline{x}_{komplex\ megold\acute{a}s} = e^{(2+4i)t}\begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\left(\cos 4t + i\sin 4t\right)\begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Itt is igaz, hogy, ha $\underline{x}$ megoldása az $\dot{\underline{x}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ valós együtthatós differenciálegyenlet-rendszernek, akkor $\mathrm{Re}\ \underline{x}$ és $\mathrm{Im}\ \underline{x}$ is megoldások és lineárisan függetlenek.

$$\mathrm{Re}\ \underline{x} = \begin{bmatrix} e^{2t}(-4)\sin 4t \\ \\ e^{2t}\cos 4t \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix} \quad \text{valós megoldás, báziselem}$$

$$\mathrm{Im}\ \underline{x} = \begin{bmatrix} e^{2t}4\cos 4t \\ \\ e^{2t}\sin 4t \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix} \text{valós megoldás, előbbitől független báziselem.}$$

A megoldástér dimenziója 2, ezért a valós általános megoldás a $\mathrm{Re}\ \underline{x}$ és $\mathrm{Im}\ \underline{x}$ lineár kombinációja.

$$\underline{x}_{H\acute{a}lt} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix} \text{valós alakú megoldás}$$

Megjegyezzük, hogy $\lambda_2$ és $\underline{s}_2$-ből ugyanehhez az általános megoldáshoz jutnánk.

Pl. Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= \quad x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \qquad\quad 3x_3 \end{aligned}$$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (= \underline{\underline{A}}\, \underline{x})$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_{1,2} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= 0 \\ a &:= t \\ b &:= u \end{aligned}$$

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} t \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehát van két lineárisan független sajátvektor: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ -2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Ebből például $\underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A megoldás:

$$\underline{x}(t) = c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vagy más alakban:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^t \\ c_2 \mathrm{e}^t + c_3 \mathrm{e}^{3t} \\ 2c_3 \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

Például az $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 + c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 2\ c_3 = 1$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

# 9. Egzisztencia és unicitás tétel

$$\Big(y'(x) = f(x, y(x)); \quad y(x_0) = y_0\Big) \;\equiv\; \left(y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\right) \quad (f \text{ folyt.})$$

differenciálegyenlet — integrálegyenlet

(Ui.: $y'(x) = \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\right)' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} \ldots = y_0$)

Az utóbbi integrálegyenletből jön az ötlet, hogy a matematikában több területen is eredményesen használt fokozatos közelítések módszerével $\left(y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x}^{x_0} f(x, y_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x\right)$ próbálkozzunk.

## 9.1. Picard féle szukcesszív approximáció

$Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ (zárt!)

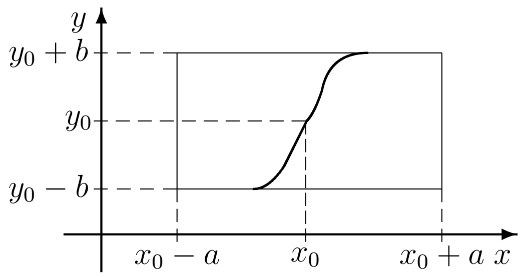
$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}^2$, $Q \subset D$

Ha $f, f'_y \in C^0_Q$, akkor a

$\varphi_0(x) = y_0$

$\vdots$

$\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t$




rekurzíve meghatározott függvénysorozathoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ $K_{x_0,\delta}$-n és $\varphi$ megoldása az $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték problémának. ($\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$)
(Ha $\varphi^*$ is megoldás lenne $K_{x_0,\delta}$-ban, akkor $\varphi^*(x) \equiv \varphi(x) \quad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}$.)

Következmény:

## 9.2. Egzisztencia és unicitás tétel

Ha $f, f'_y$ folytonos a $Q$ (zárt) téglalapon $(f, f'_y \in C^0_Q)$, akkor $\exists\, K_{x_0,\delta}$, amelyben az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték problémának egy és csakis egy megoldása van. $(\neg$B)
(A tétel bizonyítása a szukcesszív approximáció módszerét használja fel. Így nem csupán a megoldás létezésének kérdését intézi el, hanem lehetőséget ad ezen megoldás közelítő kiszámítására is (konstruktív bizonyítás).)

Pl.

$$y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0 \implies y = 0 + \int_0^x (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \left(t^2 + \varphi_{n-1}^2(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

$\varphi_0(x) \equiv 0$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7} + \frac{2\cdot x^{11}}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 11} + \frac{x^{15}}{9\cdot 7\cdot 15}$$

($\varphi_3' \not\equiv x^2 + \varphi_3^2$ Visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy bár $\varphi_3$ nem elégíti ki a differenciálegyenletet, de pl. $K_{0,\frac{1}{10}}$ -ben a bal oldal és a jobb oldal eltérése már kicsi.)
(Lásd Derive segédlet.)