# Differenciálegyenletek I. jegyzet

Kósz B. Álmos

October 2, 2019

## Szeparábilis Differenciálegyenletek

Általános alak:

$$\dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

.

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t) \cdot h(x(t))$$

Rendezek úgy, hogy az $x$ és $t$ függő elemek egy oldalra kerüljenek, az $x$ is függ $t$ től, de nem expliciten, emiatt úgy kezeljük mintha nem függne tőle.

$$\frac{1}{h(x(t))} \cdot dx = g(t) \cdot dt$$

"Beszorzunk egy integráljellel"

$$\int \frac{1}{h(x(t))} \cdot dx = \int g(t) \cdot dt$$

Elvégzem az integrállást és kifejezem az egészet $x$-re. Kész, ennyi.

**Gyakorlatban:** Példák levezetésénél elhagyom a függvények változóinak jelölését a jobban átláthatóság érdekében, tahát pl $g$-t írok $g(t)$ helyett

$$\dot{x} = \frac{1}{t+4}(\cdot 1)$$

A $(\cdot 1)$ et mi képzeltük oda, mert az lesz a $h(x(t))$ tagunk. A $\frac{1}{t+4}$ pedig a $g(t)$ tagunk.

$$\int 1 \cdot dx = \int \frac{1}{t+4} \cdot dt$$

Elvégezzük az integrálást

$$x = ln|t+4| + c$$

Készen vagyunk, kivéve, ha van kezdetiértékünk, ha van, akkor egyszerű behelyettesitéssel meg tudjuk meghatározni a $c$ értékét:

pl, ha $x(0) = 3$

$$3 = ln|0 + 4| + c$$

Ezt kell kifejeznünk $c$-re. Amit kaptunk megoldás $x(t)$ fv-t, az ezzel a $c$ konstans értékkel fog megfelelni a mi feltételeinknek.

## Homogén fokszámú differenciálegyenlet

Általános alak:

$$\dot{x}(t) = f\Big(\frac{x(t)}{t}\Big)$$

Be kell vezetnünk egy új változót:

$$z(t) = \frac{x(t)}{t}$$

$$t \cdot z(t) = x(t)$$

Ezt jegyezzük meg, kelleni kell később!
deriváljunk egyet.

$$\dot{x}(t) = z(t) + t \cdot \dot{z}(t)$$

Ez egyenlő $f(z(t))$ -vel, $\dot{z}(t)$ -re rendezünk.

$$\dot{z}(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t}$$

Mivel $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ ezért ezt mostantól egy szeparábilis egyenletként meg tudjuk oldani $z(t)$-re.

Itt jön vissza az az egyenlőség amit az előbb mondtam, hogy jegyezzünk meg($x(t) = t \cdot z(t)$). Ezzal vissza tudunk váltani $x(t)$-re és készen vagyunk.

**Gyakorlatban:**

$$\dot{x} = \frac{x + \sqrt{t^2 + x^2}}{t}$$

Átalakítunk

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \sqrt{1 + \Big(\frac{x^2}{t^2}\Big)}$$

Az új változó:

$$z = \frac{x}{t}$$

Kifejezem $\dot{x}$ -ot

$$z + t \cdot \dot{z} = \dot{x}$$

$\dot{x}$ egyenlő az eredeti képlet $z$- vel behelyettesített alakjával is, tegyük azt be az $\dot{x}$ helyére

$$z + t \cdot \dot{z} = z + \sqrt{1 + z^2}$$

Kifejezünk $\dot{z}$ -re és onnantól szeparábilis egyenletként megoldjuk, majd a $z$-t visszahelyettesítjük a $t \cdot z(t) = x(t)$ -be és megvan az $x(t)$ megoldás.

## Homogén (és Inhomogén) elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Általános alak:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b$$

Abban az esetben, ha $b = 0$, Homogén diffegyenletről beszélünk. Megoldási módszer: Fogjuk az $a$ kitevőt és kifejezzük ilyen formában: $e^{-A(t)}$ Ahol $A(t) = \int a \cdot dt$

Beszorozzuk az egyenletünket $e^{-A(t)}$ -vel

$$\dot{x}(t) \cdot e^{-A(t)} = a \cdot x(t) \cdot e^{-A(t)} + b \cdot e^{-A(t)}$$

Az $a$-s tagot átviszem a túloldalra és effektíve "kiemelek" a bal oldalból $\frac{d}{dt}$ -t.

$$\frac{d}{dt}(x \cdot e^{-A}) = b \cdot e^{-A}$$

Ezután átszorzok $dt$- vel és utána $e^{+A}$ val is. Ezzel meg is kapjuk a végeredményt.

$$x(t) = e^{A}\Big[\int e^{-A} \cdot bdt\Big]$$

**Gyakorlatban:** Legyen az egyenletünk:

$$\dot{x} = t \cdot x + t^3$$

Itt $a = t$ úgyhogy $e^{A} = e^{\frac{-t^2}{2}}$

$$\dot{x} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} = t \cdot x \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} + b \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$$

A jobb oldal első tagját átvisszük a bal oldalra és "kiemeljük" a $\frac{d}{dt}$ -t

$$\frac{d}{dt}(x \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}) = b \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Szorzok $dt$ vel és $e^{A}$-val

$$x = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot t^3 dt$$

Elvégezzük az integrált.

$$x(t) = -t^2 - 2 + c$$

Ha van kezdetiértékünk, akkor arra megoldjuk a $c$-t, pl legyen $x(5) = 2$ Akkor:

$$2 = -5^2 - 2 + c$$

Rendezés után:

$$c = 29$$

Ha kezdetiérték is meg van adva a feladathoz, akkor a megoldásegyenletünk ezzel a c értékkel fogja kielégíteni a feltételeinket.

# Bernoulli egyenlet

Általánosan:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot x^n(t)$$

Beszorzunk $x^{-n}(t)$ -vel

$$x^{-n}(t) \cdot \dot{x}(t) = x^{1-n}(t) + b$$

Bevezetjük új változónak:

$$y(t) = x^{1-n}(t)$$

Akkor

$$\dot{y}(t) = (1-n) \cdot x^{-n}(t) \cdot \dot{x}(t)$$

Itt használnunk kell több összefüggést is. Mivel $\frac{\dot{y}(t)}{(1-n)} = x^{-n}(t) \cdot \dot{x}(t)$ és $x^{-n}(t) \cdot \dot{x}(t) = a \cdot x^{1-n}(t) + b$ ezeket egyenlővé tesszük és behelyettesítünk $x^{1-n}(t)$ helyére $y(t)$-t.

$$\dot{y}(t) = (1-n) \cdot (a \cdot y(t) + b)$$

Ebben megkeressük az $a$ kitevőt, ami $(1-n) \cdot a$ Ezután Elsőrendű Inhomogén lineáris diffegyként megoldjuk. a végeredmény így néz ki:

$$y(t) = e^{\int a \cdot (1-n) dt} \left[ \int e^{-\int a \cdot (1-n) dt} \cdot b \cdot dt \right]$$

Ezt aztán visszavezetjük $x(t)$-re a korábbi összefüggésekkel.

$$y(t) = x^{1-n}(t)$$

Vagyis

$$x(t) = \sqrt[1-n]{y(t)}$$

## Egzakt differenciálegyenlet

Általános alak:

$$M(t, x(t)) + \dot{x} \cdot N(t, x(t)) = 0$$

Elöször egy tesztet kell csinálnunk, hogy megnézzük tényleg egzakt e a diffegy. Ezt kell leellenőrizni:

$$\partial_1 M(t, x(t)) = \partial_2 N(t, x(t))$$

Itt az 1,2 index az $x$ és $t$ változók, bármelyiket használhatjuk 1-esnek és 2-esnek, de fontos, hogy ne ugyanaz legyen a kettő. Előre döntsük el magunknak melyik melyik legyen. Keressük azt az $F(t, x(t))$ fv-t amire igaz, hogy:

$$\partial_1 F(t, x(t)) = M(t, x(t))$$

$$\partial_2 F(t, x(t)) = N(t, x(t))$$

Ezt integrálással csináljuk. Kezdjük az elsővel (itt az 1-es indexet $t$-nek veszem).

$$F(t, x(t)) = \int M(t, x) \cdot dt + c(x(t))$$

Amit itt megkapunk végeredménynek, az az $F$ megoldásfüggvény. Ahoz, hogy megkapjuk a tényleges megoldást, le kell ezt deriválnunk a másik változó szerint (most $x$) és az eredeti $N$ függvényünkkel egyenlővé tenni.

$$\partial_x \Big[ \int M(t, x) \cdot dt + c(x(t)) \Big] = N(t, x(t))$$

Deriválunk és ki kell fejeznünk $\dot{c}(x(t))$-re és végül azt integrálva ($x$ szerint) megkapjuk a végeredményt ebben az alakban:

$$F(t, x(t)) + c(x(t)) = C$$

ahol C konstans.

**Gyakorlatban:**

Legyen a függvényünk

$$(5x - 2x \cdot t) \cdot \dot{x} = x^2 - e^t$$

Itt láthatjuk, hogy az $M$ fv-ünk az egyenlőségjel jobb oldalán lévő kifejezés, az $N$ pedig a másik oldalon, $\dot{x}$ el szorzott kifejezés. Teszteljünk, hogy egzakt-e:

$$\partial_x M = -2x$$

$$\partial_t N = -2x$$

A kettő megegyezik, tehát Egzakt. Elkezdhetjük megoldani.

$$F = \int e + t - x^2 \cdot dt = e^t - x^2 t + c$$

Ezt $x$ szerint deriváljuk és egyenlővé tesszük az eredeti $N$-el:

$$-2xt + \dot{c} = 5x - 2xt$$

megoldjuk $c$-re

$$\dot{c} = 5x$$

$$c = \frac{5}{2}x^2$$

Megoldás:

$$F = e^t - x^2 t + \frac{5}{2}x^2$$

# Homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet

### Homogén és Inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet

Általános alak:

$$\ddot{x}(t) + p \cdot \dot{x}(t) + q \cdot x(t) = f(t)$$

Ha az $f(t) = 0$ akkor homogén függvényről beszélünk, ha pedig $f(t) \neq 0$ akkor inhomogénról, erre a következő fejezetben visszatérünk. Ha pedig $p, q$ $t$ től függetlenek, akkor állandó kitevős az egyenletünk.

A megoldást ilyen alakban keressük:

$$x(t) = x_0(t) + c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$$

Az $x_{1,2}$-t homogén megoldásnak, az $x_0$-t inhomogén megoldásnak hívjuk.

A homogén megoldás első lépéseként felírjuk a karakterisztikus egyenletet, gyakorlatilag egy másodfokú egyenletre "lefordítjuk" a diffegyenletünket és annak a gyökeit keressük.

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

Itt 3 kimenetel lehetséges:

1) $\lambda_{1,2} \in R$ ekkor $x_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2} \cdot t}$
2) $\lambda_1 = \lambda_2$ ekkor $x_1(t) = e^{\lambda t}; x_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$
3) $\lambda_{1,2} \in C$ (ilyenkor egymás konjugáltjai) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$ alakban és
   $x_1(t) = e^{\alpha t} \cdot cos(\beta t)$
   $x_2(t) = e^{\alpha t} \cdot sin(\beta t)$

Ez az alaprendszer 2 lineárisan független megoldása. Be kell csak helyettesíteni abba a képletbe amit mondtunk, hogy ilyen alakban keressük a megoldást és kész. A $c_{1,2}$ a kezdetifeltételek kielégítésére szolgálnak Erről is később lesz majd szó.

**Gyakorlatban:**

Legyen

$$\ddot{x} + 2 \cdot \dot{x} = e^t$$

Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet és oldjuk meg a gyökeire.

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0, -2$$

Ezek valós gyökök, az "1-es kategóriába" esnek.

$$x_1 = e^{0 \cdot t} = 1$$

$$x_2 = e^{-2 \cdot t}$$

Megoldás:

$$x = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

Ahol $c_{1,2} \in R$

**Az Inhomogén egyenlet partikuláris megoldása**

Tegyük fel, hogy az $f(t)$-t ilyen alakban fel tudjuk írni, és ebben keressük is:

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_1 cos(\beta t) + P_2 sin(\beta t))$$

$P_{1,2}$ polinomok. Ha kitaláltuk a paramétereinket, akkor fel tudjuk írni a partikuláris megoldást így:

$$x_p(t) = e^{\alpha t} \cdot t^k (Q_1 cos(\beta t) + Q_2 sin(\beta t))$$

Az $\alpha$ és $\beta$ paramétereinket egyszerűen átemeljük az előző képletből.
a $k = \alpha + \beta$ egy szám, 0 és 2 között, attól függően, hogy az ezen képlet szerint kapott számunk (komplex vagy valós) hányszor szerepel a karakterisztius egyenletünk gyökei között.
A $Q_{1,2}$ megintcsak polinomok, de fokszámuk nem haladhatja meg a $P_{1,2}$ legnagyobb fokszámát.
A $Q$ ha nem esik ki 0-val szorzás miatt, akkor a pontos értékét úgy kereshetjük meg, hogy a partikuláris megoldást ($x_p$) a $Q$- val eggyütt behelyettesítjük az eredeti egyenletünkbe és azt megoldjuk $Q$-ra

**Gyakorlatban:**

Itt az előző egyenlet megoldását fogom folytatni, aminek már megvan az alaprendszer 2 megoldása.

$$f = e^t$$

Ezt összehasonlítjuk és megkeressük melyik paraméter mi legyen (lehet), hogy ezt adja ki.

$$\alpha = 1$$

Mert van egy $t$ az $e$ kitevőjében. Figyeljünk, hogy ahoz, hogy az $e^t$ megmaradjon, egy 1-est kell gyártanunk a zárójelben.

$$\beta = 0$$

Mert így a $sin$ 0 lesz és a $cos$ 1, elmékezzünk, kell nekünk pontosan egy darab 1 es.

$$P_2 = 0$$

De bármi lehetne, a $sin$ -os kifejezés ígyis úgyis 0 marad.

$$P_1 = 1$$

Mert nekünk egy 1 es kell ($1 \cdot 1$ pedig pont 1 ugye ezt mondani se kell.) Elkészítjük a partikuláris megoldást. Mennyi a k? $k = \alpha + i \cdot \beta = 1 + 0 \cdot i = 1$ ez szerepel a karakterisztikus egyenlet megoldásai közt? Nem, szóval $k = 0$

$$x_p = e^{1 \cdot t} \cdot t^0 (Q_1 cos(0 \cdot t) + Q_2 sin(0 \cdot t)) = e^t + Q_1$$

Most keressük meg a $Q_1$ et. Behelyettesítjük ezt az eredeti egyenletünkbe.

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^t Q_1) + 2 \cdot \frac{d}{dt}(e^t Q_1) = e^t$$

Deriválás után:

$$e^t Q_1 + 2e^t Q_1 = e^t$$

Leosztunk $e^t$ vel és kifejezzük a $Q_1$ et

$$Q_1 = \frac{1}{3}$$

A teljes megoldása az egyenletnek (nem felejtjük el, hogy $x_p = e^t Q_1$):

$$x = c_1 + c_2 \cdot e^{-2 \cdot t} + \frac{e^t}{3}$$

Ha pedig van egy kezdetiértékünk, pl legyen: $x(0) = 1$ és $\dot{x}(0) = 0$ behelyettesítve az elsővel az $x$-be:

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1$$

rendezés után ezt kapjuk:

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}$$

A második feltétellel behelyettesítünk az $\dot{x}$-be:

$$-2c_2 + \frac{1}{3} = 0$$

Azt kapjuk, hogy

$$c_2 = \frac{1}{6}$$

Akkor

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

A vége:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{6} + \frac{e^t}{3}$$