Differenciálegyenletek 8. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
A következő diffegyenletet kell megoldanunk:

$$(y' + x)^2 = e^{y'}$$

Használjuk a következő helyettesítést: $p = y'$. Most vonjunk mindkét oldalból gyököt. Ezt megtehetjük, hiszen mindkét oldal positive:

$$p + x = \pm e^{\frac{p}{2}}$$

Differenciáljuk az egészet most y szerint.:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dx}{dy} = \pm \frac{1}{2}\frac{dp}{dy} e^{\frac{p}{2}}$$

Na de $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ azaz, tovább rendezve:

$$\frac{dp}{dy}\left(\pm \frac{p}{2} e^{\frac{p}{2}} - p\right) = 1$$

Ez egy szétválasztható változójú diffegyenlet p-re és y-ra. Tehát integrálva:

$$y = \pm (p - 2)\, e^{\frac{p}{2}} - \frac{p^2}{2}$$

Az eredeti diffegyenlet alapján :$\pm e^{\frac{p}{2}} = p + x$. Ezt ide beírva:

$$y = (p + x)(p - 2) - \frac{p^2}{2}$$

Ez egy másodfokú egyenlet p-re. a megoldása pedig:

$$p = y' = -x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 2y + 4}$$

Ez már egy sima diffegyenlet, y-ra. Használva az $u = x^2 + 2y + 4$ helyettesítést, a következőt kapjuk:

$$u' = 4 \pm 2\sqrt{u}$$

Szétválasztva a változókat és integrálva:

$$\pm\sqrt{u} - 2\ln(\sqrt{u} \pm 2) = x + c$$

Visszatérve az eredeti változókra a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\pm\sqrt{x^2 + 2y + 4} - 2\ln(\sqrt{x^2 + 2y + 4} \pm 2) - x + C = 0$$

Innen sajnos nem tudjuk kifejezni y-t elemi függvényekkel.

2. Feladat:
A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y'^2 \sin y' + 2y^2 - y'y - 3xy' \sin y' - 2yy' \sin y' + 3xy = 0$$

Az egész egyenletet szorzattá tudjuk alakítani:

$$(y' \sin y' - y) \cdot (y' - 3x - 2y) = 0$$

Egy szorzat akkor lesz nulla ha valamelyik tényezője nulla. Azaz ha a baloldali tényező nulla:

$$y' \sin y' - y = 0$$

Legyen $p = y'$, és deriváljuk az egészet x szerint:

$$\frac{dp}{dx}\sin p + p\frac{dp}{dx}\cos p - p = 0$$

Átrendezve:

$$\frac{dp}{dx}\left(\frac{\sin p}{p} + \cos p\right) = 1$$

Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet p-ra és x-re. Integrálva:

$$x = \int \frac{\sin p}{p}\,dp + \sin p + C$$

$$y = p\sin p$$

Ez az egyenletrendszer a differenciálegyenlet megoldását jelenti, hiszen innen y is és x-is kifejezhető p-vel mint paraméterrel. Nézzük, hogy mikor lesz az eredeti szorzat másik tényezője nulla. azaz oldjuk meg az alábbi diffegyenletet:

$$y' - 3x - 2y = 0$$

Legyen $u = 3x + 2y \Longrightarrow y' = \frac{3-u'}{2}$. Ezzel egy szétválasztható változójú diffegyenletet kapunk:

$$u' = 3 - 2u$$

Egyből integrálhatunk tehát az megoldása:

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + Ce^{2x}$$

3. Feladat:
A megoldandó diffegyenlet:

$$\ln\frac{1}{y'} - y + xy' = 0$$

Használjuk a szokásos helyettesítést: $p = y'$. Ekkor átalakítva az egyenletet:

$$y = px - \ln p$$

Ez láthatóan Clairaut-féle. Differenciáljuk tehát az egészet x szerint:

$$y' = p = \frac{dp}{dx} + p - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

Rendezve:

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p}\right) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla ha valamelyik tényezője, vagy esetleg mindkettő nulla. Azaz ha a bal tényező nulla:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow p = C$$

Tehát az általános megoldás ekkor, ezt az eredeti diffegyenletbe írva:

$$y = Cx - \ln C$$

Nézzük ha a másik tényező nulla:

$$x - \frac{1}{p} = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{x}$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe:

$$y = 1 + \ln x$$

Tehát ez lesz a szinguláris megoldása.

4. Feladat:
A megoldandó diffegyenlet:

$$y'' - \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Láthatóan a változók már szét is vannak választva, tehát egyből integrálhatunk:

$$y' = \int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Számítsuk ki a jobboldali integrált. Ehhez használjuk ezt a helyettesítést : $\sin t = \frac{x}{2} \Longrightarrow dx = 2\cos t\, dt$ Ezzel az integrál:

$$\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \mathrm{tg}^2 t\, dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt - \int dt = \mathrm{tg} t - t + C_1$$

Visszatérve az eredeti változókra, ezt kaptuk:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin\frac{x}{2} + C_1$$

Most már csak mégegyszer kell integrálnunk.
Ehhez vegyük észre, hogy:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4-x^2} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Azaz:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \sqrt{4-x^2}$$

A másik integrál ami kell:

$$\int \arcsin x\ dx = \int 1 \cdot \arcsin\frac{x}{2}\ dx = x \cdot \arcsin\frac{x}{2} - \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = x \cdot \arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$$

Tehát a diffegyenlet általános megoldása:

$$y = -2\sqrt{4-x^2} - x \cdot \arcsin\frac{x}{2} + C_1 x + C_2$$

5. Feladat:
A megoldandó differenciálegyenlet:

$$xy'' - y' - \sqrt{y'^2 - x^2} = 0$$

vigyük át a gyökös kifejezést a jobb oldalra és emeljünk négyzetre, feltéve, hogy $y'' \geq \frac{y'}{x}$ Hiszen így lesz ekvivalens átalakítás. ekkor y'^2 kiesik, és marad x-szel való osztás után (feltéve, hogy $x \neq 0$):

$$xy''^2 - 2y'y'' + x = 0$$

Ezt ismét osszuk le x-szel:

$$y''^2 - 2\frac{y'}{x}y'' + 1 = 0$$

Ez láthatóan egy másodfokú egyenlet y''-re. A megoldóképlet alapján (Most csak a plusszos megoldás jó nekünk az elején tett kikötés miatt):

$$y'' = \frac{y'}{x} + \sqrt{\frac{y'^2}{x^2} - 1}$$

Haszáljuk most a következő helyettesítést: $u = y'/x \Longrightarrow y'' = u'x + u$, ezzel:

$$u'x = \sqrt{u^2 - 1}$$

Ez pedig már egy szétválasztható változójú diffegyenlet. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\mathrm{arch}u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \ln(C_1 \cdot x) \Longrightarrow u + \sqrt{u^2 - 1} = C_1 \cdot x$$

Innen visszatérve az eredeti változókra:

$$\frac{y'}{x} + \sqrt{\frac{y'^2}{x^2} - 1} = C_1 \cdot x$$

A gyökös kifejezést egy oldalra rendezve és négyzetre emelve, kiesik az y'^2/x^2-es tag, vagyis marad:

$$y' = \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{1}{2C_1}$$

Mégyegyszer integrálva, megkaphatjuk y-t:

$$y = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{x}{2C_1} + C_2$$

Tehát ez lesz a diffegyenlet általános megoldása.

6. Feladat:
A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y''y^2 + 2yy'^2 - 2y' = 0$$

Láthatjuk egyből, hogy $y = k$ ahol k valós konstans, az megoldása az egyenletnek.
Vegyük észre, hogy:

$$(y' \cdot y^2)' = y''y^2 + 2yy'^2$$

Ez alapján a diffegyenlet:

$$(y' \cdot y^2)' = 2y'$$

EGyből integrálhatunk:

$$y'y^2 = 2y + C_1$$

Ez láthatóan egy szétválasztható változójú diffegyenlet. Ha y nem konstans, akkor válasszuk szét a változókat:

$$\frac{y^2}{2y + C_1}dy = dx$$

Integrálva, az eredeti diffegyenlet általános megoldása:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{C_1}{4}y + \frac{C_1^2}{8}\ln(2y + C_1) - x - \frac{3C_1^2}{16} + C_2 = 0$$

y-t innen sajnos nem tudjuk kifejezni elemi függvényekkel.

7. Feladat:
A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Keressük a megoldást a szokásos alakban $y = e^{\lambda x} \Longrightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \Longrightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. azaz:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4$. Tehát a diffegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$