Differenciálegyenletek 7. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
   A feladat az
$$y' = \frac{\sin(\lambda y + x)}{\sin(\lambda x)}$$
differenciálegyenlet megoldásainak vizsgálata az origó közelében.
Mivel az origó közelében vizsgálódunk, ezért x, y tetszőlegesen kicsi, tehát így közelíthetünk:
$$y' = \frac{\lambda y + x}{\lambda x}$$
Vizsgáljuk a sajátértéket (A saját értékeket, most a félreértés elkerülése végett s-sel jelölöm):
$$\begin{vmatrix} \lambda - s & 1 \\ 0 & \lambda - s \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow s_1 = s_2 = \lambda$$
Tehát azt kaptuk, hogy a sajátértékek egybeesnek. Vagyis ezt a szinguláris pontot most csomópontnak hívjuk. De még két eset lehetséges. az egyik, hogy az integrálgörbéknek a szinguláris pontban közös érintőjük van, a másik, hogy a szinguláris pontból minden irányban pontosan egy integrálgörbe indul ki. A mi esetünkben az előbbi eset lesz, azaz az integrálgörbéknek a szinguláris pontban (Most origóban), közös értintőjük. Ahhoz, hogy ezt lássuk, határozzuk meg az integrálgörbéket:
$$y' = \frac{\lambda y + x}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{x}$$
Legyen $u = y/x \Longrightarrow y' = u'x + u$:
$$u'x = \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow u = C \cdot x + \frac{x \ln|x|}{\lambda}$$
Tehát láthajuk, hogy az integrál görbék valóban az első esetbeliek. Íme a rajz:

Most azt kell belátnunk, hogy a :
$$y' = \frac{x + 5y}{3x - y}$$
differenciálegyenlet megoldásai ugyanúgy viselkednek az origóban, mint az előző egyenlet megoldásai.
Vizsgáljuk a sajátértékeket:
$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

Tehát azt kaptuk, hogy itt is egybe esnek a sajátértékek vagyis csomópont lesz a szinguláris pont. Most már csak az integrálgörbéket kell meghatároznunk:

$$y' = \frac{x+5y}{3x-y} = \frac{1+5\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

Legyen $u = y/x \Longrightarrow y' = u'x + u$:

$$u'x = \frac{1+5u}{3-u} - u = \frac{1+2u+u^2}{3-u} = \frac{(u+1)^2}{3-u} \Longrightarrow \ln|Cx(1+u)| = -\frac{4}{1+u}$$

Tehát láthatóan most is egy közös érintőjük lesz az origóban az integrálgörbéknek, és nem minden irányban pontosan egy integrálgörbe fog kiindulni. Ismét rajzok:

2. Feladat:

- A következő differenciálegyenlet szinguláris pontja, most csak az origó körüli viselkedését kell vizsgálnunk. Mivel az origó körül, ezért fejsük Taylor sorba az origó körül a számlálót és a nevezőt, és írjuk az elsőrendű tagokat vissza:

$$y' = \frac{\sin y \cdot \cos y - \mathrm{tg}2x}{xe^{2y} + \mathrm{tg}y} \approx \frac{y-2x}{x+y}$$

Tehát ezt a diffegyenletet kell vizsgálnunk:

$$y' = \frac{y-2x}{x+y}$$

A saját értékek:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 - i\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$$

Tehát azt látjuk, hogy a sajátértékek egymás komplex konjugáltjai, és nem is tisztán képzetesek. vagyis, a szinguláris pont most fókusz. Tehát az integrálgörbék a szinguláris pont körül végtelen sok fordulatot tesznek.
Határozzuk is meg az integrálgörbéket:

$$y' = \frac{y-2x}{x+y} = \frac{-2+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

Legyen $u = y/x \Longrightarrow y' = u'x + u$:

$$u'x = \frac{u-2}{u+1} - u = -\frac{u^2+2}{u+1} \Longrightarrow \ln\left|Cx^2\left(2+\frac{y^2}{x^2}\right)\right| + \mathrm{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}x} = 0$$

Ha itt áttérünk polárváltozókra, akkor azonnal láthatjuk, hogy ez egy az origóból induló 'spirálsereg'.

- Most ennek a diffegyenletnek a szinguláris pontok körüli viselkedését kell vizsgálnunk:

$$y' = \frac{xy - y^2 - y}{x^2 - 4y^2 - 4y - 2x} = \frac{y(x - y - 1)}{(x + 2y)(x - 2y - 2)}$$

Először keressük meg a szinguláris pontokat. Ezek pontosan ott lesznek, ahol a nevező és számláló egyszerre vesz fel 0 értéket. végignézve az eseteket a következők lettek a szinguláris pontok:

$$(x, y) = (0, 0) \qquad (x, y) = (0, -1) \qquad (x, y) = (2, 0) \qquad (x, y) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Először vizsgáljuk a $(0, 0)$ pont körüli viselkedést. A Taylor sor elsőrendű tagjáig sorbafejtve:

$$y' = \frac{y}{2x + 4y}$$

A saját értékek:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2 \ \ \lambda_2 = 1$$

Láthatjuk, hogy a sajátértékek valósak és egyenlő előjelűek, tehát ez a szinguláris pont csomópont. Az integrálgörbék az origóban érinteni fogják tehát egymást egy kivételével. Határozzuk is meg az integrálgörbéket:

$$y' = \frac{y}{2x + 4y} = y' = \frac{\frac{y}{x}}{2 + 4\frac{y}{x}}$$

Legyen $u = y/x$ ekkor $y' = u'x + u$:

$$u'x = \frac{-u - 4u^2}{2 + 4u} \Longrightarrow y^2 - 4Cy = Cx$$

Tehát az integrálgörbék egy parabola sereg lesznek.

Most vizsgáljuk a másik szinguláris pontot $(0, -1)$. A számlálót és nevezőt e pont körül sorbafejtve az elsőrendű tagokig:

$$y' = \frac{-x + y + 1}{-2x + 4y + 4}$$

Ezt hasonlóan vizsgálhatjuk mint az előzőeket. Vagyis a sajátértékek:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \ \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Láthatjuk, hogy ezek egymás komplex konjugáltjai, és nem tisztán képzetesek, tehát ez a pont fókusz lesz, és az integrálgörbék e pont körül végtelen fordulatot tesznek, vagyis ez ismét egy 'spirálsereg' lesz e pont körül.

Nézzük a harmadik $(2, 0)$ szinguláris pontot, elvégezve a sorfejtést e pont körül:

$$y' = \frac{y}{2x + 4y - 4}$$

A sajátértékek:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2 \ \ \lambda_2 = 1$$

Láthatóan a saját értékek valósak és egyenlő előjelűek, tehát ez csomópont lesz. Az integrálgörbék pedig: $(Cy - 2)^2 = Cx - 2C + 4$ vagyis parabolák.

Most nézzük meg a negyedik $(2/3, -1/3)$ szinguláris pontot. Elvégezve a sorfejtést:

$$y' = \frac{x - y - 1}{2x + 4y}$$

A sajátértékek:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3 \;\; \lambda_2 = -2$$

Láthatjuk, hogy valósak de ellentétes előjelűek. vagyis ez nyeregpont.

3. Feladat:

- Ezt a differenciálegyenletet kell megoldanunk:

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$

Nézzük az egyes parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial}{\partial y}e^{-y} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - (2y + xe^{-y}) = -e^{-y}$$

Láthatóan pont megegyeznek, tehát ez a differenciálegyenlet egzakt. vagyis létezik olyan $F(x,y) = C_1$, hogy:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^{-y} \Longrightarrow F(x,y) = xe^{-y} + f(y)$$

Ahol $f(y)$ egy függvénye y-nak. De azt is ismerjük, hogy:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -2y - xe^{-y} = -xe^{-y} + \frac{f(y)}{dy} \Longrightarrow f(y) = -y^2 + c$$

Vagyis az $F(x,y)$:

$$F(x,y) = xe^{-y} - y^2 + c = C_1$$

Tehát az általános megoldása a diffegyenletnek:

$$xe^{-y} - y^2 + C = 0$$

- Most ezt a diffegyenletet kell megoldanunk:

$$3x^2(1 + \ln y)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0$$

Vizsgáljuk a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial}{\partial y}3x^2(1 + \ln y) = \frac{3x^2}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{y} - 2y\right) = \frac{3x^2}{y}$$

Láthajuk, hogy ezek megegyeznek, tehát a diffegyenlet egzakt:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2(1 + \ln y) \Longrightarrow F(x,y) = x^3(1 + \ln y) + f(y)$$

Ahol $f(y)$ egy függvénye y-nak. De azt is ismerjük, hogy:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3}{y} - 2y = \frac{x^3}{y} + \frac{f(y)}{dy} \Longrightarrow f(y) = -y^2 + c$$

Vagyis az $F(x,y)$:
$$F(x,y) = x^3(1+\ln y) - y^2 + c = C_1$$
Tehát az általános megoldása a diffegyenletnek:
$$x^3(1+\ln y) - y^2 + C = 0$$

4. Feladat:

- A következő differenciálegyenletet kell megoldanunk:
$$(x^2+3\ln y)y\,dx - x\,dy = 0$$
Keressük a megoldást $y = e^u$ alakban. Ekkor $y' = u'e^u$, tehát:
$$(x^2+3u)e^u - x\cdot u'e^u = 0$$
Leosztva e^u-val, és alakítva (feltéve, hogy $x \neq 0$):
$$u' - \frac{3}{x}u = x$$
Ez pedig egy elsőrendű lineáris inhomogén diffegyenlet. Az egyenletet az állandó variálásának módszerével oldjuk meg. A homogén rész megoldását rögtön megadhatjuk:
$$U = C\cdot x^3$$
A partikuláris megoldást tehát kerresük $u_0 = C(x)\cdot x^3 \Longrightarrow u_0' = C'(x)x^3 + 3x^2C(x)$ alakban. Ezt beírva a diffegyenletbe a következőt kapjuk, $C'(x)$-re:
$$C'(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow C(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow u_0 = -x^2$$
Tehát a megoldása $u = U + u_0$:
$$u = Cx^3 - x^2$$
Visszatérve az eredeti változókra $u = \ln y$, az eredeti diffegyenlet általános megoldása:
$$y = e^{Cx^3 - x^2}$$

- Most a következő diffegyenletet kell megoldanunk:
$$(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y-1)dy = 0$$
osszuk le az egész egyenletet x^2-tel:
$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$
Vizsgáljuk a parciális deriváltakat:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right) = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$
Láthatóan megegyeznek, tehát a differenciálegyenlet így egzakt lett. Ezt oldjuk meg a szokásos módon:
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2} \Longrightarrow F(x,y) = x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} + f(y)$$

Ahol $f(y)$ egy függvénye y-nak. De azt is ismerjük, hogy:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x} = 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x} + \frac{f(y)}{dy} \Longrightarrow f(y) = c$$

Vagyis az $F(x,y)$:

$$F(x,y) = x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} + c = C_1$$

Tehát az általános megoldása a diffegyenletnek:

$$x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} + C = 0$$