Differenciálegyenletek 6. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
   Az alábbi differenciálegyenletet kell elemezgetnünk.

$$y' - ay = e^{bx}$$

Az adott kezdeti feltétel, $y(0) = 1$. A feladat szerint a megoldást kereshetjük, ha $a \neq b$ az alábbi alakban:

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx}$$

Határozzuk, meg az A és B konstansokat. Írjuk be ezt a megoldást a diffegyenletbe:

$$Aae^{ax} + Bbe^{bx} - Aae^{ax} - Bae^{bx} = e^{bx}$$

Ahonnan:

$$B = \frac{1}{b-a}$$

De ismerjük az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt, így megtudunk adni egy összefüggést A és B között, ahonnan A-t is kitudjuk fejezni a-val és b-vel:

$$A + B = 1$$

Tehát A-ra:

$$A = 1 - \frac{1}{b-a}$$

Vagyis a diffegyenlet megoldása:

$$y = e^{ax} + \frac{e^{bx} - e^{ax}}{b-a}$$

De $a = b$ esetén rezonancia van. Ekkor oldjuk meg a diffegyenletet, az állandó variálásának módszerével:

$$y' - ay = e^{ax}$$

A homogénrész megoldása:

$$Y = Ce^{ax}$$

Tehát a partikuláris megoldást keressük hasonló alakban:

$$y_0 = C(x) \cdot e^{ax} \Longrightarrow y_0' = C'(x)e^{ax} + C(x)ae^{ax}$$

Ezt visszírva a diffegyenletbe, a következőt kapjuk:

$$C'(x) = 1 \Longrightarrow C(x) = x$$

Tehát az általános megoldás $y = Y + y_0$:

$$y = Ce^{ax} + xe^{ax}$$

A kezdeti feltétel $y(0) = 1$ ahonnan $C = 1$. Vagyis:

$$y = (x+1)e^{ax}$$

Azt kell belátnunk, hogy ha az előző megoldásnál $b \to a$ akkor ezt kapjuk. Akkor vegyük az előző megoldás határértékét:

$$y = e^{ax} + \lim_{b \to a} \frac{e^{bx} - e^{ax}}{b-a}$$

De amint látjuk, a

$$\lim_{b \to a} \frac{e^{bx} - e^{ax}}{b-a}$$

határérték definíció szerint az e^{bx} függvény b szerinti deriváltja az a pontban. Ez pedig:

$$\left.\frac{d}{db}e^{bx}\right|_{b=a} = xe^{bx}|_{b=a} = xe^{ax}$$

Tehát az y:

$$y = e^{ax} + xe^{ax} = (x+1)e^{ax}$$

Vagyis láthatóan ugyanazt kapjuk, ha $b \to a$.

2. Feladat:

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{2y^2 + xy + 3y}{x^2 + 2xy + 3x + 4y}$$

A diffegyenlet láthatóan Jacobi féle, így osszuk, le a számlálót és a nevezőt is x-szel. Ekkor:

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}y + y + 3\frac{y}{x}}{x + 2y + 3 + 4\frac{y}{x}} = \frac{y\left(2\frac{y}{x}+1\right) + 3\frac{y}{x}}{x\left(1+2\frac{y}{x}\right) + 3 + 4\frac{y}{x}}$$

Most használjuk az $y = ux$ helyettesítést. Ekkor $y' = u'x + u$:

$$u'x = \frac{y\left(2\frac{y}{x}+1\right) + 3\frac{y}{x}}{x\left(1+2\frac{y}{x}\right) + 3 + 4\frac{y}{x}} - u = -\frac{4u^2}{x + 2ux + 3 + 4u}$$

Most vegyük a két oldal reciprokát, tehát tekintsük most a dx/du-t. Mostantól a vesszős jelölés tehát jelentse az u szerinti deriválást. azaz:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du} = -\frac{x + 2ux + 3 + 4u}{4u^2} = -\left(\frac{1}{4u^2} + \frac{1}{2u}\right)x - \left(\frac{3}{4u^2} + \frac{1}{u}\right)$$

Beszorozva x-szel, és rendezve:

$$x' + \left(\frac{3}{4u^2} + \frac{1}{u}\right)x = -\left(\frac{1}{4u^2} + \frac{1}{2u}\right)x^2$$

Láthatóan ez már Bernoulli féle. Tehát használjuk a szokásos helyettesítést: $v = x^{-1}$. Ekkor ebből kapunk egy lineáris inhomogén diffegyenletet:

$$v' - \left(\frac{3}{4u^2} + \frac{1}{u}\right)v = \frac{1}{4u^2} + \frac{1}{2u}$$

Ennek a megoldására használjuk az állandó variálásának módszerét: A Homogén rész megoldása:

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{3}{4u^2} + \frac{1}{u}\right)du$$

Integrálva mindkét oldalt:

$$V = Cu\exp\left(-\frac{3}{4u}\right)$$

Vagyis keressük a partikuláris megoldást az alábbi alakban:

$$v_0 = C(u)u\exp\left(-\frac{3}{4u}\right) \Longrightarrow v_0' = C'(u)u\exp\left(-\frac{3}{4u}\right) + C(u)\exp\left(-\frac{3}{4u}\right)\left[\frac{3}{4u} + 1\right]$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe, és rendezve:

$$C'(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2u^3} + \frac{1}{u^2}\right] \exp\left(\frac{3}{4u}\right)$$

Tehát A $C(u)$ függvény:

$$C(u) = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2u^3} + \frac{1}{u^2}\right] \exp\left(\frac{3}{4u}\right) du = -\frac{2}{3}\exp\left(\frac{3}{4u}\right)\left[\frac{1}{2u} + \frac{1}{3}\right]$$

Tehát az általános megoldása a diffegyenletnek $v = V + v_0$:

$$v = Cu\exp\left(-\frac{3}{4u}\right) - u\exp\left(-\frac{3}{4u}\right) \cdot \frac{2}{3}\exp\left(\frac{3}{4u}\right)\left[\frac{1}{2u} + \frac{1}{3}\right]$$

Azaz:

$$v = Cu\exp\left(-\frac{3}{4u}\right) - \frac{2u}{9} - \frac{1}{3}$$

Visszatérve az előző változókra, azaz: $v = 1/x$, és $u = y/x$, a következőt kapjuk:

$$9Cy\exp\left(-\frac{3x}{4y}\right) - 2y - 3x - 9 = 0$$

Innen viszont y-t sajnos nem tudjuk kifejezni elemi függvényekkel.

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' = 3\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^4}$$

Kicsit átrendezve:

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^4}y^2$$

Ez tehát nem más mint egy Bernoulli féle diffegyenlet. Vagyis használjuk a szokásos helyettesítést: $u = y^{-1}$. Ekkor:

$$u' + \frac{3}{x}u = -\frac{1}{x^4}$$

Ez már egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Az állandó variálásának módszerével oldjuk meg: A homogén rész megoldása:

$$\frac{dU}{U} = -\frac{3}{x}dx$$

Azaz:

$$U = \frac{C}{x^3}$$

Vagyis a partikuláris megoldást keressük a következő alakban:

$$u_0 = \frac{C(x)}{x^3} \Longrightarrow u_0' = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe a következőt kapjuk:

$$C'(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow C(x) = -\ln x \Longrightarrow u_0 = -\frac{\ln x}{x^3}$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $u = U + u_0$:

$$u = \frac{C}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3}$$

Visszatérve az eredeti változókra: $u = 1/y$, az eredeti diffegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{x^3}{C - \ln x}$$

3. A feladatban leírt módszerrel megoldandó diffegyenlet, ugyanaz mint az előbb:

$$y' = 3\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^4}$$

A mi esetünkben:

$$f(x,y) = 3\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^4}$$

Azaz:

$$f(\lambda x, \lambda^n y) = 3\frac{\lambda^n y}{\lambda x} + \frac{\lambda^{2n} y^2}{\lambda^4 x^4} = \lambda^{n-1}\left(3\frac{y}{x} + \lambda^{n-3}\frac{y^2}{x^4}\right)$$

Ez láthatóan csak akkor lesz $f(\lambda x, \lambda^n y) = \lambda^{n-1} f(x,y)$ alakú, ha $n = 3$. Tehát a szükséges helyettesítés:

$$y = ux^3 \Longrightarrow y' = u'x^3 + 3x^2 u$$

Ezt beírva a diffegyenletbe a következőt kapjuk:

$$u'x = u^2$$

A változókat szétválasztva (láthatóan $u = 0$ triviális megoldása az egyenletnek, most tehát legyen $u \neq 0$):

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

Integrálva:

$$u = \frac{1}{C - \ln x}$$

Visszatérve az eredeti változókra, $u = y/x^3$:

$$y = \frac{x^3}{C - \ln x}$$

Tehát láthatóan ugyanazt kaptuk mint az előző módszerrel.

4. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$x^2 y' == x^2 y^2 + xy + 1$$

Ha $x \neq 0$ osszunk le vele:

$$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$$

Láthatjuk, hogy ez Riccati féle. Adott az egyik partikuláris megoldás: $y = -1/x$. Tehát használjuk a következő helyettesítést:

$$y = u - \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = u' + \frac{1}{x^2}$$

Ezt visszaírva, a következőt kapjuk:

$$u' + \frac{1}{x}u = u^2$$

Ez már Bernoulli féle, használjuk a szokásos helyettesítést: $v = u^{-1}$. Ekkor:

$$v' - \frac{1}{x}v = -1$$

Ez már inhomogén lineáris, használjuk az állandó variálásnak módszerét. A homogén rész megoldását rögtön megadhatjuk:

$$V = Cx$$

Tehát a partikuláris megoldás:

$$v_0 = C(x) \cdot x \Longrightarrow v_0' = C'(x)x + C(x)$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe:

$$C'(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow C(x) = -\ln x$$

Tehát az általános megoldás $v = V + v_0$:

$$v = Cx - x \ln x$$

Visszatérve az eredeti változókra $u = 1/v$ és $u = y + 1/x$ tehát:

$$y = \frac{1}{x(C - \ln x)} - \frac{1}{x}$$

Láthatóan $C \to \infty$ esetén visszakapjuk a megadott partikuláris megoldást.