Differenciálegyenletek 5. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
A következő differenciálegyenletet kell elemeznünk:

$$y' = x + y^2$$

Ez láthatóan Riccati féle. Tehát átalakíthatjuk lineáris másodrendű differenciálegyenletté. Használjuk a következő helyettesítést:

$$y = -\frac{u'}{u} \Longrightarrow y' = -\frac{u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe:

$$-\frac{u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = x + \left(\frac{u'}{u}\right)^2$$

Tehát:

$$u'' + xu = 0$$

Ez az ú.n. Airy-féle differenciálegyenlet, egy minusz előjeltől eltekintve. Ennek a megoldásai pedig az ú.n. első és másodfajú Airy-függvények:

$$u = C_1 \cdot \mathrm{Ai}(-x) + C_2 \cdot \mathrm{Bi}(-x)$$

Az Airy-függvényeket kitudjuk még fejezni a közismert elsőfajú Bessel-függvényekkel:

$$\mathrm{Ai}(-x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\left(J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right)$$

$$\mathrm{Bi}(-x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}\left(J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right)$$

Térjünk vissza az eredeti változóinkra: $y = -u'/u$. Ehhez használjuk fel a ν rendű Bessel-függvények deriválására vonatkozó összefüggést:

$$\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = \frac{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}{2}$$

Vezessük be továbbá a C_1 és C_2 konstansok helyett a következő C konstanst:

$$C = \frac{\frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{\sqrt{3}}}{\frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{\sqrt{3}}}$$

.

Ezekkel hosszadalmas alakítások után a következőt kapjuk y-ra:

$$y = \frac{-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)C + x^{3/2}\left(-2J_{-2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - J_{-4/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)C + J_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)C\right)}{2x\left(J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)C\right)}$$

De nekünk nem ezt kellett megadnunk, hanem y taylor sorának első tagját, az $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett: Az ismert módszer szerint: $y' = g'(x)$

$y' = g'(x) = x + y^2 \Longrightarrow g'(0) = 1$

$y'' = g''(x) = 1 + 2yy' \Longrightarrow g''(0) = 3$

$y''' = g'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'' \Longrightarrow g'''(0) = 8$

$y'''' = g''''(x) = 6y'y'' + 2yy''' \Longrightarrow g''''(0) = 34$

$y''''' = g'''''(x) = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy'''' \Longrightarrow g'''''(0) = 186$

Vagyis a Taylor sor:

$$y = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{34}{4!}x^4 + \frac{186}{5!}x^5 + \dots$$

Azaz:

$$y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^4 + \frac{31}{20}x^5 + \dots$$

2. Feladat:
A differenciálegyenlet:

$$y' = (x + y)(x + y + 2)$$

Elvégezve a beszorzásokat:

$$y' = (x^2 + 2x) + 2(x + 1)y + y^2$$

Láthatóan ez is Riccati féle. Most nem végezzük el az előző feladat játékát..., hanem egyből a Taylor soros alakot adjuk meg az $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez. A feladat szerint csak harmadrendig kell. Ugyanúgy mint az előbb:$y' = g'(x)$

$y' = g'(x) = (x^2 + 2x) + 2(x + 1)y + y^2 \Longrightarrow g'(0) = 3$

$y'' = g''(x) = 2x + 2 + 2y + 2xy' + 2y' + 2yy' \Longrightarrow g''(0) = 16$

$y''' = g'''(x) = 2 + 4y' + 2xy'' + 2y'' + 2(y')^2 + 2yy'' \Longrightarrow g'''(0) = 96$

Vagyis a Taylor sor:

$$y = 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{16}{2!}x^2 + \frac{96}{3!}x^3 + \dots$$

Azaz:

$$y = 1 + 3x + 8x^2 + 16x^3 + \dots$$

3. Feladat:

- A megoldandó differenciálegyenlet:

  $$y' - y = 2e^x$$

  Láthatóan ez egy állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Tehát alkalmazhatjuk a próbafüggvény módszerét. De vigyáznunk kell hiszen pont rezonancia van. Ezért a próbafüggvényt úgy kell módosítanunk, hogy x-szel megszorozzuk. Belátható, hogy rezonancia esetén mindig ez a célravezető próbafüggvény.

Tehát a homogén rész megoldását egyből felírhatjuk:

$$Y = Ce^x$$

A próbafüggvény legyen:

$$y_0 = xAe^x \Longrightarrow y_0' = Ae^x + xAe^x$$

Ahol A valós konstans. Ezt az egyenletbe írva:

$$Ae^x + xAe^x - xAe^x = 2e^x \Longrightarrow A = 2$$

Tehát az egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_0 = 2xe^x$$

Az általános megoldás a Homogén rész általános megoldásának és az egyenlet egy partikuláris megoldásának összege:

$$y = Y + y_0$$

Vagyis a Differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Ce^x + 2xe^x$$

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' - y = \sin x - \cos x + 2$$

Láthatóan ez egy állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Rezonancia nincsen tehát nyugodtan alkalmazhatjuk a próbafüggvény módszerét.
A Homogén rész megoldását ismét felírhatjuk egyből:

$$Y = Ce^x$$

A próbafüggvény pedig:

$$y_0 = A\sin x + B\cos x + D \Longrightarrow y_0' = A\cos x - B\sin x$$

Itt A,B, és D konstansok. Ezeket az eredeti diffegyenletbe írva:

$$A\cos x - B\sin x - A\sin x - B\cos x - D = \sin x - \cos x + 2$$

Rendezve:

$$-(A+B)\sin x + (A-B)\cos x - D = \sin x - \cos x + 2$$

A két oldal akkor lesz egyenlő minden x-re ha az egyes tagok együtthatói megegyeznek:
$A + B = -1$
$A - B = -1$
$D = -2$
Az első két egyenlet alapján: $A = -1$ és $B = 0$, valamint $D = -2$ Tehát egy partikuláris megoldása a diffegyenletnek:

$$y_0 = -\sin x - 2$$

Tehát az általános megoldás : $y = Y + y_0$ Azaz:

$$y = Ce^x - \sin x - 2$$

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$(x+2)y' - y = 2(x+2)^3$$

Ha $x \neq -2$ akkor leoszthatunk $x+2$-vel:

$$y' - \frac{1}{x+2}y = 2(x+2)^2$$

Láthatóan ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Az állandó variálásának módszerével oldjuk meg.
A Homogén rész szétválasztható. Így az általános megoldása:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{1}{x+2}dx$$

Integrálva a következőt kapjuk:

$$Y = C(x+2)$$

A partikuláris megoldást tehát keressük, a következő alakban:

$$y_0 = C(x) \cdot (x+2) \Longrightarrow y_0' = C'(x)(x+2) + C(x)$$

Ezeket az eredeti diffegyenletbe írva:

$$C'(x)(x+2) + C(x) - \frac{C(x) \cdot (x+2)}{x+2} = 2(x+2)^2$$

Ahonnan a következőt kapjuk:

$$C'(x) = 2(x+2) \Longrightarrow C(x) = x^2 + 4x = x(x+4)$$

Vagyis az y_0 partikuláris megoldás:

$$y_0 = x(x+2)(x+4)$$

Tehát a diffegyenlet általános megoldása $y = Y + y_0$:

$$y = C(x+2) + x(x+2)(x+4)$$

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' - xy = x^2$$

Láthatóan ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Az állandó variálásának módszerével oldjuk meg.
A Homogén rész szétválasztható. Így az általános megoldása:

$$\frac{dY}{Y} = xdx$$

Integrálva:

$$Y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

A partikuláris megoldást tehát keressük a következő alakban:

$$y_0 = C(x)e^{\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow y_0' = C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}}$$

Ezeket az eredeti diffegyenletbe írva:

$$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x^2$$

Ahonnan a következőt kapjuk:

$$C'(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Most ezt kell integrálnunk ahhoz, hogy megkapjuk a $C(x)$ függvényt. Kicsit alakítsuk át:

$$C(x) = \int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int \left(\underbrace{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}}_{(-xe^{-\frac{x^2}{2}})'} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Amint ismeretes fent a jobb oldali tagban kijelölt integrál nem adható meg elemi függvényekkel. Ez majdnem pont definíció szerint az erf hibafüggvény:

$$C(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Vagyis az y_0 paritkuláris megoldás:

$$y_0 = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] e^{\frac{x^2}{2}} = -x + e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Tehát a diffegyenlet általános megoldása $y = Y + y_0$:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - x + e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$xy' - y = x^3 + 1$$

Ha $x \neq 0$ akkor leoszhatunk vele:

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 + \frac{1}{x}$$

Ez ismét egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet. És ismét az állandó variálásának módszerét alkalmazzuk.
A homogén rész megoldása:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow Y = Cx$$

A partikuláris megoldást tehát keressük a következő alakban:

$$y_0 = C(x)x \Longrightarrow y_0' = xC'(x) + C(x)$$

Ezeket visszaírva a diffegyenletbe:

$$xC'(x) + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

Innen:

$$C'(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

Ezt integrálva a $C(x)$ függvény:

$$C(x) = \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$$

Vagyis a partikuláris megoldás:

$$y_0 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right) x = \frac{x^3}{2} - 1$$

Tehát a diffegyenlet általános megoldása $y = Y + y_0$:

$$y = Cx + \frac{x^3}{2} - 1$$

4. Feladat:

A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y \ln y + (x - \ln y)y' = 0$$

Használjuk tehát a következő helyettesítést:

$$y = e^u \Longrightarrow y' = u'e^u$$

Ezt az eredeti egyenletbe írva:

$$ue^u + (x - u)u'e^u = 0$$

Láthatóan leoszthatunk e^u-val:

$$u + (x - u)u' = 0$$

Azaz:

$$\underbrace{u + xu'}_{(ux)'} - \underbrace{uu'}_{(u^2/2)'} = 0$$

Tehát integrálva mindkét oldalt x szerint:

$$\int d(ux) = \int d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Ahonnan:

$$ux = \frac{u^2}{2} + C$$

Ezt átrendezve:

$$u^2 - 2xu + C = 0$$

Ez láthatóan egy másodfokú egyenlet u-ra. A megoldóképlet alapján:

$$u = x \pm \sqrt{x^2 - C}$$

Itt meg kell különböztetnünk eseteket. Ha $C \leq 0$ Akkor ez biztosan jó, tehát ekkor:

$$u = x \pm \sqrt{x^2 - C}$$

Ha azonban $C > 0$ akkor lehetséges, hogy a gyökjel alatt negatí szám jelenik meg, tehát u ekkor komplex lesz:

$$u = x \pm i\sqrt{x^2 - C}$$

Tehát az eredeti változóra visszatérve az általános megoldása az egyenletnek:

$$y = e^{x \pm \sqrt{x^2 - C}} = e^x e^{\pm \sqrt{x^2 - C}}$$

illetve:

$$y = e^{x \pm i\sqrt{x^2 - C}} = e^x(\cos\sqrt{x^2 - C} \pm i \sin\sqrt{x^2 - C})$$