4. házi feladatsor megoldások

Tüzes Dániel, TUDPAAT

1. Alkalmazzuk a $2x - 3y = u$ helyettesítést! Ekkor $\frac{du}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$. Behelyettesítve a $\frac{dy}{dx} = u^2$ összefüggésbe, kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{du}{dx} = u^2.$$

Ez egy szétválasztható együtthatójú differenciálegyenlet:

$$\frac{du}{2 - 3u^2} = dx$$

Elvégezve az integrálást mindkét oldalon, Bronstejn szerint kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arth}\left(u\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = x + c_1$$

Ebből kifejezve u-t, majd visszahelyettesítve arra kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{th}\left(c_2 + \sqrt{6}x\right) = 2x - 3y,$$

vagyis

$$y = \frac{2x - \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{th}\left(\sqrt{6}x + C\right)}{3}$$

2. Használjuk a $2y + x - 2 = u$ helyettesítést! Ekkor $\frac{du}{dx} = 2\frac{dy}{dx} + 1$, ebből kifejezve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - 1}{2},$$

majd visszahelyettesítve az eredeti összefüggésbe:

$$\frac{\frac{du}{dx} - 1}{2} = u.$$

Ez egy széválasztható együtthatójú differenciálegyenlet:

$$dx = \frac{du}{2u + 1}.$$

Ennek megoldása:

$$x + c_1 = \frac{1}{2} \ln |2u + 1| .$$

Visszahelyettesítve u-ra, majd y-ra rendezve kapjuk, hogy

$$y = \frac{e^{2x} \cdot C + 3 - 2x}{4}.$$

3. Használjuk a $u = x + 2y$ helyettesítést! Ekkor $\frac{du}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$, ebből kifejezve $\frac{dy}{dx}$-et, majd az eredeti összefüggésbe behelyettesítve ezzel és $u = x + 2y$-vel:

$$\frac{du}{dx} - 1 = 2\frac{u+1}{u-1}.$$

Ez egy szétválasztható együtthatójú differenciálegyenlet:

$$\frac{u-1}{3u+1} du = dx,$$

melynek megoldása

$$x + c = \frac{u}{3} - \frac{4}{9} \ln |9u + 3| .$$

Ebbe visszahelyettesítve $u = x + 2y$-val kapjuk, hogy

$$0 = 2\frac{y-x}{3} - \frac{4}{9} \ln |3x + 6y + 1| + C.$$

Ebből nem fejezhető ki y az elemi fügvényekkel.

4. Használjuk a $2x - 2y = u$ helyettesítést! Ezt x-szerint deriválva, majd abból kifejezve $\frac{dy}{dx}$-at, és visszahelyettesítve a $2x - 2y = u$ helyettesítéssel már módosított példakitűzési egyenletbe kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \frac{3-u}{u-1}.$$

Ez egy szétválasztható együtthatójú differenciálegyenlet:

$$dx = \frac{u-1}{4u-8} du.$$

Mindkét oldalon elvégezve az integrálást, u-ra visszhelyettesítve kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{4} \ln |x - y - 1| - \frac{x+y}{2} + C.$$

Ebből y nem fejezhető ki az elemi fügvényekkel.

5. Osszunk le xy^2dx-tel, így kapjuk, hogy $y' = x^2/y^2 - y/x$. Használjuk az $u = y/x$ helyettesítést! Kifejezve y-t, abból $y' = u'x + x$, visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{u^2} - u = \frac{du}{dx}x + u.$$

Ez egy szétválasztható együtthatós differenciálegyenlet:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{u^2}{1-2u^3}du.$$

Integrálva mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$c + \ln|x| = -\ln\left|u^3 - 1/2\right|/6$$

Visszahelyettesítve u-ra, majd mindkét oldalt e-re emelve kapjuk, hogy

$$c_2 x = \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{2}}}.$$

Mindkét oldalt 6-ik hatványra emelve, abból kifejezve y-t, kapjuk, hogy

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} + \frac{C}{x^3}}$$

6. Használjuk hát a $x/y = u$ helyettesítést! Ebből $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} - \frac{x\frac{du}{dx}}{u^2}$, így visszaírva az eredeti összefüggésbe kapjuk, hogy

$$1 + 2e^u + 2(1-u)\left(\frac{1}{u} - \frac{x\frac{du}{dx}}{u^2}\right)e^u = 0.$$

Ez egy szétválasztható együtthatós differenciálegyenlet:

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{\frac{2e^u}{u} - \frac{2e^u}{u^2}}{1 + \frac{2}{u}e^u}du.$$

Ennek megoldása:

$$\ln|x| + c = -\ln\left|1 + \frac{2}{u}e^u\right|.$$

Visszahelyyettesítve u-ra kapjuk, hogy

$$Cx = \frac{x}{x + 2ye^{\frac{x}{y}}}.$$

Ebből y nem fejezhető ki elemi fügvényekkel.