Differenciálegyenletek 4. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. A megoldandó differenciálegyenlet:
$$y' = (2x - 3y)^2$$
Használjuk, az $u = 2x - 3y$ helyettesítést.
Ekkor:
$$u' = 2 - 3y' \quad \longrightarrow y' = \frac{2-u'}{3}$$
Tehát az egyenletünk:
$$\frac{2-u'}{3} = u^2$$
Átrendezve:
$$2 - 3u^2 = u' = \frac{du}{dx}$$
Ez egy szeparálható differenciálegyenlet.
De először nézzük meg mi van ha a baloldal zérus. Ez akkor van ha:
$$u = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
láthatóan ez megoldása az diffegyenletnek. Az eredeti változókkal:
$$y = \frac{2}{3}x \pm \sqrt{\frac{2}{27}}$$
Tehát ez egy megoldás.
Ha u nem egyenlő az előző értékkel, akkor leoszthatunk: Szétválasztva a változókat:
$$dx = \frac{du}{2-3u^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}u)^2}$$
Integrálva:
$$x + K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\text{arth}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right)$$
Innen az általunk keresett u:
$$u = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \text{th}(\sqrt{6}\,x + C)$$
Visszatérve az eredeti változókra, a diffegyenlet általános megoldása:
$$y = \frac{2}{3}x - \sqrt{\frac{2}{27}} \cdot \text{th}(\sqrt{6}\,x + C)$$

2. A megoldandó diffegyenlet:
$$y' - 2y = x - 2$$
Az állandó variálásának módszerét használjuk. A Homogén rész megoldása:
$$Y' - 2Y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad Y = C \cdot e^{2x}$$
Keressük a partikuláris megoldást az
$$y_0 = C(x) \cdot e^{2x}$$
alakban. Ekkor a deriváltja:
$$y_0' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$$
Ezeket visszaírva az eredeti egyenletbe:
$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = C'(x)e^{2x} = x - 2$$
Innen megtudjuk határozni $C(x)$-t:
$$C(x) = \int \frac{x-2}{e^{2x}}\,dx = -\frac{x-2}{2}e^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2}\right)e^{-2x} + K = \frac{3-2x}{4e^{2x}} + K$$
Az általános megoldás az y_0 és Y összege. Azaz:
$$y = C \cdot e^{2x} + \left(\frac{3-2x}{4e^{2x}} + K\right) \cdot e^{2x} = \underbrace{(C+K)}_{Q} \cdot e^{2x} + \frac{3-2x}{4}$$
Tehát:
$$y = Qe^{2x} + \frac{3-2x}{4}$$
3. A Megoldandó differenciálegyenlet:
$$y' = \frac{x+2y+1}{x+2y-1}$$
használjuk az $u = x + 2y$ helyettesítést. Ekkor $u' = 1 + 2y'$ ahonnan $y' = \dfrac{u'-1}{2}$.
Ezzel a diffegyenlet:
$$\frac{u'-1}{2} = \frac{u+1}{u-1}$$
Rendezve:
$$u' = \frac{3u+1}{u-1}$$
Ez egy szeparálható diffegyenlet.
nézzük meg mi van, ha a jobb oldal zérus, azaz: $u = -\dfrac{1}{3}$
Láthatóan ez egy megoldás. Az eredeti változókkal kifejezve:
$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{6}$$

Ha most már nem veszi fel a fenti értéket, akkor szétválaszthatjuk a változókat:

$$dx = \frac{u-1}{3u+1}du$$

Integrálva:

$$x + c = \frac{u}{3} - \frac{4}{9}\ln|9u+3|$$

Visszatérve az eredeti változókra:

$$\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}\ln|3x+6y+1| + C = 0$$

Ebből viszont y-t nem tudjuk kifejezni elemi függvényekkel.

4. A Megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{2y-2x+3}{2x-2y-1}$$

használjuk az $u = 2y - 2x$ helyettesítést. Ekkor $u' = 2y' - 2$ ahonnan $y' = \frac{u'}{2} + 1$.
Ezzel a diffegyenlet:

$$\frac{u'}{2} + 1 = \frac{u+3}{-u-1}$$

rendezve:

$$u' = -4\frac{u+2}{u+1}$$

Ez egy szeparálható diffegyenlet. nézzük, meg mikor lesz a jobb oldal zérus.
Akkor amikor $u = -2$. Láthatóan ez egy megoldás.
Az eredeti változókkal kifejezve:

$$y = x - 1$$

Tehát ez egy megoldása a diffegyenletnek.

Most ne vegye fel u a fenti értéket. Ekkor a változókat szétválasztva:

$$\frac{u+1}{u+2}du = -4dx$$

Integrálva:

$$-4x + c = u - \ln(u+2)$$

Az eredeti változókra visszatérve:

$$\frac{y}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|y-x+1| + C = 0$$

Sajnos innen sem fejezhető ki y elemi függvényekkel.

5. A Megoldandó differenciálegyenlet:

$$(x^3 - y^3)dx = xy^2 dy$$

Ha $y = 0$ akkor nincs megoldás így leoszthatunk vele. kössük még ki, hogy $x \neq 0$. Ezt átalakítva, és közben leosztva az egészet xy^2-tel:

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x} = y'$$

Használjuk az $u = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést. Ekkor $y' = xu' + u$. Ez alapján az egyenlet:

$$\frac{1}{u^2} - u = xu' + u$$

Rendezve:

$$\frac{1 - 2u^3}{u^2} = xu'$$

Most ismét nézzük meg, hogy a baloldal mikor lesz zérus.
Ez akkor lesz, amikor: $u = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$
Láthatóan ez megoldás. Visszatérve az eredeti változókra:

$$y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Tehát ez megoldása a diffegyenletnek.
Most akkor zárjuk ki u fenti értékét, így szeparálhatjuk a változókat:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u^2}{1 - 2u^3} du$$

Integrálva:

$$\ln |Kx| = -\frac{1}{6} \ln |1 - 2u^3|$$

Rendezve egy kicsit:

$$\ln \frac{1}{(Kx)^6} = \ln |1 - 2u^3|$$

Mindkét oldalt e-re emelve, és rendezve:

$$u^3 = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^6}$$

Visszatérve az eredeti változókra, a megoldás:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} - \frac{C}{x^3}}$$

6. A Megoldandó differenciálegyenlet:

$$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx+2\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$$

Használjuk a tippként megadott $u=\dfrac{x}{y}$ helyettesítést.
Ekkor, ha $x\neq 0$, akkor u sem lehet nulla. Tehát:

$$y'=\frac{1}{u}-\frac{u'}{u^2}x$$

Ezzel a diffegyenlet:

$$1+2e^u+2(1-u)\left(\frac{1}{u}-\frac{u'}{u^2}x\right)e^u=0$$

Ezt átalakítva:

$$1+\frac{2}{u}e^u=-\left(\frac{2e^u}{u}-\frac{2e^u}{u^2}\right)xu'$$

Ez egy szeparálható differenciálegyenlet. Láthatóan ha a baloldal zérus lenne, akkor nem teljesülne a diffegyenlet, így szétválasztva a változókat:

$$-\frac{dx}{x}=\frac{\dfrac{2e^u}{u}-\dfrac{2e^u}{u^2}}{1+\dfrac{2}{u}e^u}du$$

A baloldalon, éppen egy $\frac{f'}{f}$ alakú integrandus van így könnyen integrálhatunk:

$$\ln|Kx|=-\ln\left|1+\frac{2}{u}e^u\right|$$

Ahonnan:

$$Kx=\frac{1}{1+\dfrac{2}{u}e^u}$$

Visszatérve az eredeti változókra:

$$2ye^{\frac{x}{y}}+x+C=0$$

Sajnos ebből sem tudjuk y-t kifejezni elemi függvényekkel.