Differenciálegyenletek 3. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. A kör egyenlete Descartes koórdinátákban:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ennek x szerinti deriváltja:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Ahonnan

$$yy' + x = 0$$

Tehát ez az origó középpontú körök differenciálegyenlete.

2. A parabola érintőjének egyenlete általános alakban:

$$y = m \cdot x + b$$

tekintsük az x tengelynek egy $x = a$ pontját. Ebben a pontban a parabolánk $y = x^2$ egyenlete szerint: $y(a) = a^2$ A parabola érintőjének meredékségét egy tetszőleges x helyen a deriváltja adja. Azaz $m = 2x$. Tehát az a pontbeli érintő egyenlete:

$$a^2 = 2a \cdot a + b$$

Ahonnan az érintő y tengellyel való b metszéspontjára:

$$b = -a^2$$

Tehát a parabola egy tetszőleges érintőjének egyenlete:

$$y = 2ax - a^2$$

Láthatóan a a szabad paraméter. Most egy olyan differenciálegyenletet kell keresnünk, amelynek ez az általános megoldása.

Deriváljuk az egyenletet x szerint:

$$y' = 2a \quad \longrightarrow \quad a = \frac{y'}{2}$$

Ezt visszaírva az egyenletbe:

$$y = y' \cdot x - \frac{(y')^2}{4}$$

Ahonnan az $y = x^2$ parabola érintőinek differenciálegyenlete:

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$$

3. Az adott differenciálegyenletek megoldása:

(a) A megoldandó differenciálegyenlet:

$$(x+2)(2x+3)y' = x$$

Ha $x \neq -2$ és $x \neq -\frac{3}{2}$ akkor leoszthatunk a jobb oldalon levő szorzattal és változókat szét is választottuk. x-nek a fent felsorolt értékei esetén láthatóan nincs megoldása a differenciálegyenletnek, tehát ezt nyugodtan megtehetjük. Leoszva és integrálva:

$$y = \int \frac{x}{(x+2)(2x+3)} dx$$

Tehát a következő integrált kell meghatároznunk:

$$\int \frac{x}{(x+2)(2x+3)} dx$$

Alakítgassuk egy kicsit:

$$\int \frac{x}{(x+2)(2x+3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+7-7}{2x^2+7x+6} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+7}{2x^2+7x+6} dx - \frac{7}{4} \int \frac{1}{(x+2)(2x+3)} dx$$

Az első integrált könnyen megadhatjuk, hiszen az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú:

$$\frac{1}{4} \int \frac{4x+7}{2x^2+7x+6} dx = \frac{1}{4} \ln |(x+2)(2x+3)| + C_1$$

A második integrált a parciális törtekre bontás módszerével adjuk meg:

$$\frac{7}{4} \int \frac{1}{(x+2)(2x+3)} dx = \frac{7}{4} \int \frac{2}{2x+3} dx - \frac{7}{4} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{7}{4} \ln |2x+3| - \frac{7}{4} \ln |x+2| + C_2 =$$

$$= \frac{7}{4} \ln \left| \frac{2x+3}{x+2} \right| + C_2$$

Tehát az eredeti integrálunk:

$$\int \frac{x}{(x+2)(2x+3)} dx = \frac{1}{4} \ln |(x+2)(2x+3)| + C_1 - \frac{7}{4} \ln \left| \frac{2x+3}{x+2} \right| - C_2 = \ln \frac{(x+2)^2}{(|2x+3|)^{3/2}} + C$$

Tehát a differenciálegyenletünk általános megoldása:

$$y = \ln \frac{(x+2)^2}{(|2x+3|)^{3/2}} + C$$

Ez a megoldás reguláris, és szinguláris megoldást nem találtunk.

(b) A differenciálegyenlet:

$$y' - y^3 = 0$$

Láthatóan az $y = 0$ megoldása a differenciálegyenletnek. És ez a medoldás reguláris. Ha $y \neq 0$ akkor leoszthatunk vele és integrálhatunk:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int dx$$

Azaz:

$$-\frac{1}{2y^2} + C = x$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2(C - x)}}$$

(c) A differenciálegyenlet:

$$y'(3x + 2x^2) = 3y$$

Láthatóan az $y = 0$ most is megoldása a diiferenciálegyenletnek. továbbá $x \neq 0$ és $x \neq -\frac{3}{2}$ is kizárhatjuk, hiszen ezen x-ek esetén csak az $y = 0$ a megoldás. Ha $y \neq 0$, leoszthatunk vele és a változókat szétválaszthatjuk, és integrálhatunk:

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{x(2x + 3)}$$

A jobboldali integrált a parciális törtekre bontással lehet elvégezni, a jobboldali pedig alapintegrál. Azaz:

$$\ln |y| = \ln \frac{|C \cdot x|}{|2x + 3|}$$

Tehát az általános megoldás:

$$y = C \frac{x}{2x + 3}$$

Természetesen a C nem veheti fel a 0 értéket, hiszen akkor már korábban sem lenne, értelmezve, és ekkor $y = 0$-t kapnánk amit a megoldás menetében kizártunk.

4. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{x}{x + 3} dx - \frac{y}{y + 3} dy = 0$$

Láthatóan a változók már szét is vannak választva, tehát egyből integrálhatunk:

$$\int \frac{x}{x + 3} dx = \int \frac{y}{y + 3} dy$$

Átalakítva:

$$\int \left(1 - \frac{3}{x + 3} dx\right) = \int \left(1 - \frac{3}{y + 3} dy\right)$$

Elvégezve az integrálást:

$$x + 3 \ln |x + 3| + c = y + 3 \ln |y + 3|$$

Ezt az alábbi alakra hozhatjuk:

$$(x+3)^3 \cdot e^{-(x+c)} = (y+3)^3 \cdot e^{-y}$$

Most vonjunk köbgyököt és osszuk el mindkét oldalt $-3 \cdot e$-vel. Ekkor ezt kapjuk:

$$-\frac{y+3}{3}e^{-\frac{y+3}{3}} = -\frac{x+3}{3}e^{-\frac{x+c+3}{3}}$$

Innen $-\dfrac{y+3}{3}$-t kifejezhetjük a Lambert-W függvénnyel. Ugyanis a Lambert-W függvény definíciója szerint:

$$p = ke^k \Longleftrightarrow k = W(p)$$

Tehát a mi esetünkben, $k = -\dfrac{y+3}{3}$ és $p = -\dfrac{x+3}{3}e^{-\frac{x+c+3}{3}}$, tehát a fenti alapján:

$$-\frac{y+3}{3} = W\left(-\frac{x+3}{3}e^{-\frac{x+c+3}{3}}\right)$$

Ahonnan y-ra:

$$y = -3\left[1 + W\left(-\frac{x+3}{3}e^{-\frac{x+c+3}{3}}\right)\right]$$

A feladat megadja az $y(1) = 1$ feltételt is, és ebből meghatározható, a c konstans. Azaz:

$$1 = -3\left[1 + W\left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{c+4}{3}}\right)\right]$$

Ahonnan c-re: $c = 0$.

Az ehhez tartozó partikuláris megoldás pedig:

$$y_p = -3\left[1 + W\left(-\frac{x+3}{3}e^{\frac{x+3}{3}}\right)\right]$$