Differenciálegyenletek 2. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Egy $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor sora:

$$T_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Most adjuk meg, az $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, ahol $|x| < 1$.

A nulladik k_0 tagja, a képletbe behelyettesítés alapján: A 0! definíció szerint: $0! = 1$, és a nulladik derivált definíció szerint pedig maga a függvény.Tehát:

$$k_0 = f(0)x^0 = f(0) = 1$$

Az első tagja: Ehhez először meg kell határoznunk $f(x)$ első deriváltját, ezt kell az $x = 0$ helyen vennünk:

$$f'(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{1-x^2}\bigg|_{x=0} = 1$$

Tehát ez a tag:

$$k_1 = \frac{1}{1!}x^1 = x$$

Hasonlóan a második tag: A második derivált $x = 0$-nál:

$$f''(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2}\bigg|_{x=0} = \frac{2}{(1-x)^3}\bigg|_{x=0} = 2$$

Ezzel:

$$k_2 = \frac{2}{2!}x^2 = x^2$$

A harmadik tag: A Harmadik derivált $x = 0$-nál:

$$f'''(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{2}{(1-x^2)^3}\bigg|_{x=0} = \frac{6}{(1-x)^4}\bigg|_{x=0} = 6 = 3!$$

Ezzel:

$$k_3 = \frac{3!}{3!}x^3 = x^3$$

És így tovább, a k-adik tag: A k-adik derivált:

$$f^{(k)}(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{(k-1)!}{(1-x^2)^k}\bigg|_{x=0} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\bigg|_{x=0} = k!$$

Tehát ez a tag:

$$k_k = \frac{k!}{k!}x^k = x^k$$

Az egész Taylor sor ezen tagok összege, hiszen így definiáltuk a tagokat, hogy azok összege a Taylor sor:

$$T_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Tehát valóban teljesül a kérdéses egyenlet, hiszen a fentiek alapján az $f(x)$ függvény Taylor sora:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

2. A következő Taylor sort kell vizsgálnunk:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Mivel ez a Taylor sor egyenletesen konvergens, ezért tagonként deriválhatunk:

$$\sin x = -\frac{d}{dx}\cos x = -\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) =$$

$$= -\left(0 - \frac{2}{2!}x + \frac{4}{4!}x^3 - \frac{6}{6!}x^5 + \dots\right) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

Tehát a $\sin x$ függvény Taylor sora:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

3. Ahhoz, hogy megadjuk az $f(x) = \sin(\cos x)$ függvény Taylor sorát az $x = 0$ pont körül, először meg kell határoznunk a deriváltjait, $x = 0$-ban. A sor nulladik tagja:

$$k_0 = \sin(\cos 0) = \sin(1)$$

Az első tagja: Az első deriváltja $x = 0$-ban:

$$\frac{d}{dx}\sin(\cos x)\Big|_{x=0} = -\sin x \cdot \cos(\cos x)\Big|_{x=0} = 0$$

Tehát a sor első tagja $k_1 = 0$

A második tag: A második derivált:

$$\frac{d}{dx}\left(-\sin x \cdot \cos(\cos x)\right)\Big|_{x=0} = -\cos x \cdot \cos(\cos x) + \sin^2 x \cdot \sin(\cos x)\Big|_{x=0} = -\cos(1)$$

Vagyis a sor második tagja: $k_2 = -\dfrac{\cos(1)}{2!}x^2$

A harmadik tag: A harmadik derivált:

$$\frac{d}{dx}\left(-\cos x \cdot \cos(\cos x) - \sin^2 x \cdot \sin(\cos x)\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= -3\sin x \cdot \cos x \cdot \sin(\cos x) + \sin x \cdot \cos(\cos x) + \sin^3 x \cdot \cos(\cos x)\Big|_{x=0} = 0$$

Tehát a sor harmadik tagja: $k_3 = 0$

A negyedik tag: A negyedik derivált:

$$\frac{d}{dx}\left(-3\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(\cos x)+\sin x\cdot\cos(\cos x)+\sin^3 x\cdot\cos(\cos x)\right)\Bigg|_{x=0}=$$

$$=-\sin(\cos x)(3\cos 2x-\cos^2 x\sin^2 x))+\cos x\cdot\cos(\cos x)(1+6\sin^2 x)\Bigg|_{x=0}=\cos(1)-3\sin(1)$$

vagyis a sor negyedik tagja: $k_4 = \dfrac{\cos(1)-3\sin(1)}{4!}x^4$

A fentiek alapján az $f(x)$ függvény Taylor sorának első három elnem tűnő tagja:

$$\sin(\cos x)=\sin(1)-\frac{\cos(1)}{2!}x^2+\frac{\cos(1)-3\sin(1)}{4!}x^4-\ldots$$

Hát láthatóan elég sokban különbözik a $\sin x$ Taylor sorától, hiszen még x hatványai sem egyeznek meg a kettőben. Igazából nem látom mi értelme lenne összehasonlítani a kettőt...

4. Az $y(x) = -x + Ce^{-x}$ függvény x szerinti első deriváltja:

$$y'(x) = -1 - Ce^{-x}$$

Az adott differenciálegyenlet:

$$y' + y + x + 1 = 0$$

Ide beirva, y-t és a kiszámolt y'-t:

$$-1 - Ce^{-x} - x + Ce^{-x} + x + 1 = 0$$

Tehát valóban ez az $y(x)$ az általános megoldása az adott differenciálegyenletnek.

A feltétel szerint $x = 1$-ben $y = 4$ kell teljesüljön. Azaz $y(1) = 4$. Ezt beírva $y(x)$-be:

$$y(1) = -1 + Ce^{-1} = 4$$

Ahonnan:

$$C = 5e$$

Tehát ekkora C esetén fog az $x = 1$ pontban $y = 4$ teljesülni.

Ez a partikuláris megoldás pedig:

$$y_p = -x + 5e^{1-x}$$

5. Az $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + x$ függvény derviáltjai:

$$y'(x) = -C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x} + 1$$

$$y''(x) = C_1e^{-x} + 9C_2e^{3x}$$

Az adott differenciálegyenlet:

$$y'' - 2y' - 3y + 3x + 2 = 0$$

Ide beírva a deriváltakat, és y-t:

$$C_1e^{-x} + 9C_2e^{3x} + 2C_1e^{-x} - 6C_2e^{3x} - 2 - 3C_1e^{-x} - 3C_2e^{3x} - 3x + 3x + 2 = 0 = 0$$

Tehát ez az y valóban az általános megoldása a differenciálegyenletnek.
Ha $y(0) = 0$ akkor, a következő kell legyen:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

Ahonnan, a feltétel C_1-re és C_2-re:

$$C_1 = -C_2$$

Azaz egymás -1 szeresei kell, hogy legyenek.
Legyen, $C_2 = C$ és így $C_1 = -C$. Ezzel a C paraméterrel ez a megoldáscsalád:

$$y_{cs} = C(e^{3x} - e^{-x}) + x$$

A C-ket a következőképpen kell megválasztanunk, ahhoz, hogy a két feltétel teljesüljön:

(a) A feltétel itt: $y'(0) = 0$.
y_{cs}-t deriválva, és azt az $x = 0$ helyen véve, valamint a feltétellel egybevetve:

$$y'_{cs}(0) = (C(3e^{3x} + e^{-x}) + 1)|_{x=0} = 4C + 1 = 0$$

Ahonnan C-re:

$$C = -\frac{1}{4}$$

Ehhez a C -hez tartozó partikuláris megoldás:

$$y_1 = -\frac{e^{3x} - e^{-x}}{4} + x$$

(b) A feltétel itt: $y(1) = 1$
Azaz:

$$y_{cs}(1) = (C(e^{3x} - e^{-x}) + x)|_{x=1} = C(e^3 - e^{-1}) + 1 = 1$$

Ahonnan C-re:

$$C = 0$$

Az ehhez a C-hez tartózó partikuláris megoldás pedig:

$$y_2 = x$$