# Differenciálegyenletek 1. házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. **a,** $\frac{d}{dx}\sin(x^3)\cos(2x^2) = 3x^2\cos(x^3)\cos(2x^2) - 4x\sin(2x^2)\sin(x^3)$

   **b,** $\frac{d}{dx}\sin(\exp(\cos(3x))) = -3\sin(3x)\exp(\cos(3x))\cos(\exp(\cos(3x)))$

   **c,** $\frac{d}{dx} - e^{e^x} = -e^{e^x}e^x = -e^{x+e^x}$

   **d,** $\frac{d}{dx}\cos^2(\arcsin(x)) = -2\cos(\arcsin(x))\underbrace{\sin(\arcsin(x))}_{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2x\cos(\arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}$

   **e,** $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^4+\sqrt{x^2-a^2}}} = \frac{d}{dx}(x^4+\sqrt{x^2-a^2})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^4+\sqrt{x^2-a^2})^{-\frac{3}{2}}(4x^3+\frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}2x) =$
   $= -\frac{4x^3+x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{2(x^4+\sqrt{x^2-a^2})^{\frac{3}{2}}}$

2. Használjuk az összetett függvények deriválási szabályát : $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ ha $f$ és $g$ két függvény. Azaz:

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'$$

   Az inverzfüggvény definíciója szerint: $f^{-1}(f(x)) = x$ Tehát $(f^{-1}(f(x)))' = 1$
   Ezt felhasználva az inverzfüggvény deriváltjára a következőt kapjuk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = f^{-1\prime}(f(x))\cdot f'(x)$$

   Hasonlóan, $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ahonnan:

$$f^{-1\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

   Tehát:

$$(f\circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))\cdot f^{-1\prime}(x) = f'(f^{-1}(x))\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = 1$$

   És:

$$(f^{-1}\circ f)'(x) = f^{-1\prime}(f(x))\cdot f'(x) = \frac{1}{f'(x)}\cdot f'(x) = 1$$

   Ezzel beláttuk a feladat állítását a formális szabályok segítségével.

3. Az adott kétváltozós függvény: $f(x,y) = x^3\ln(y^6-x^3)$. A kérdéses parciális deriváltak:

   **a,** $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\ln(y^6-x^3) - x^3\frac{3x^2}{y^6-x^3} = 3x^2\ln(y^6-x^3) - \frac{3x^5}{y^6-x^3}$

   **b,** $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3\frac{6y^5}{y^6-x^3} = \frac{6x^3y^5}{y^6-x^3}$

   **c,** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6x^3y^5}{y^6-x^3}\right) = \frac{18x^2y^5(y^6-x^3)+18x^5y^5}{(y^6-x^3)^2} = \frac{18x^2y^{11}}{(y^6-x^3)^2}$

**d,** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2\ln(y^6-x^3) - \frac{3x^5}{y^6-x^3}\right) = 3x^2\frac{6y^5}{y^6-x^3} - 3x^5\frac{-6y^5}{(y^6-x^3)^2} =$

$$= \frac{18x^2y^5(y^6-x^3)+18x^5y^5}{(y^6-x^3)^2} = \frac{18x^2y^{11}}{(y^6-x^3)^2}$$

**e,** $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2\ln(y^6-x^3) - \frac{3x^5}{y^6-x^3}\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(6x\ln(y^6-x^3) - 3x^2\frac{3x^2}{y^6-x^3} - \frac{15x^4(y^6-x^3)+3x^5\cdot 3x^2}{(y^6-x^3)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x\ln(y^6-x^3) + \frac{15x^7-24x^4y^6}{(y^6-x^3)^2}\right) =$$

$$= \frac{-144y^5x^4(y^6-x^3)^2 - 12y^5(y^6-x^3)(15x^7-24x^4y^6)}{(y^6-x^3)^4} + 6x\frac{6y^5}{y^6-x^3} = \frac{36xy^{11}(2x^3+y^6)}{(y^6-x^3)^3}$$

4. Azt kell belátnunk, hogy egy $f(x,y,z)$ háromváltozós függvény parciális deriváltjaira fennáll a következő:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)$$

A Young-tételt fogjuk használni. Ez azt mondja ki, hogy egy $f(x,y,z)$ sokszor deriválható függvényre:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f$$

Tehát a mi esetünkben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)}_{\text{erre a fv.-re a young tétel}} = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)}_{\text{most erre a Young-tétel}} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)}_{\text{most erre a young}} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)$$

És pont ezt akartuk belátni. A vizsgálandó függvény: $f(x,y,z) = \cos(x\sin(y^2e^z))$ Most deriváljuk parciálisan:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\cos(x\sin(y^2e^z)) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^zxy^2\cos(e^zy^2)\sin(x\sin(e^zy^2))\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^zxy\left(\cos(e^zy^2)\sin(x\sin(e^zy^2)) + e^zy^2\left(x\cos^2(e^zy^2)\cos(x\sin(e^zy^2)) - \sin(e^zy^2)\sin(x\sin(e^zy^2))\right)\right)\right) =$$

$$= 2e^zy\left(-\frac{1}{2}x\cos\left(x\sin\left(e^zy^2\right)\right)\left(e^zy^2\left(1+3\cos\left(2e^zy^2\right)\right)\right) + \sin\left(2e^zy^2\right)\right) +$$

$$+\left(-\cos\left(e^zy^2\right) + e^zy^2\left(1+x^2\cos\left(e^zy^2\right)^2\right)\sin\left(e^zy^2\right)\right)\sin\left(x\sin\left(e^zy^2\right)\right)$$

Most a másik parciális deriválási sorrend:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\cos(x\sin(y^2e^z)) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin(e^zy^2)\sin(x\sin(e^zy^2))\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(-2e^zy\cos(e^zy^2)\left(x\cos(x\sin(e^zy^2))\sin(e^zy^2) + \sin(x\sin(e^zy^2))\right)\right) =$$

$$= 2e^zy\left(-\frac{1}{2}x\cos\left(x\sin\left(e^zy^2\right)\right)\left(e^zy^2\left(1+3\cos\left(2e^zy^2\right)\right)\right) + \sin\left(2e^zy^2\right)\right) +$$

$$+\left(-\cos\left(e^zy^2\right) + e^zy^2\left(1+x^2\cos\left(e^zy^2\right)^2\right)\sin\left(e^zy^2\right)\right)\sin\left(x\sin\left(e^zy^2\right)\right)$$

Láthaóan ugyanazt kaptuk a két esetben, tehát valóban teljesül a tétel.