Differenciálegyenletek gyakorlat
6. házi feladatsor

2008. április 782067681.

1. Írjuk fel a $y(0) = 1$ kezdőfeltételhez tartozó megoldását az alábbi differenciálegyenletnek, ahol a és b két tetszőleges konstans:

$$y' - ay = e^{bx}$$

Ismert (és a gyakorlaton is szerepelt), hogy az $a \neq b$ esetben a megoldás

$$y(x) = Ae^{ax} + Be^{bx}$$

alakban kereshető, ahol az A és B konstansok az a és b paraméterek megadott függvényei. Ezzel ellentétben $a = b$ mellett, azaz a „rezonancia" esetében az állandók variálásának módszerével kell élni.

Mutassuk meg, hogy ha az $y(0) = 1$ kezdőfeltételt nem változtatjuk, úgy a rezonanciás eset megoldása előáll a standard megoldás $a \to b$ határértékeként!

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:

- $y' = \frac{2y^2+xy+3y}{x^2+2xy+3x+4y}$
- $y' = 3\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^4}$

3. A gyakorlaton szerepelt a homogén egyenletek megoldási módszere, miszerint ha az $y' = f(x, y)$ alakú egyenletben szereplő f egy nuladrendű homogén függvény, azaz tetszőleges pozitív λ-ra

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y),$$

úgy az egyenlet az $y = ux$ helyettesítéssel megoldhatóvá válik.

Hasonló trükkel oldhatók meg azon egyenletek is, melyek valamilyen tetszőleges n valós számra teljesítik a következő egyenletet:

$$f(\lambda x, \lambda^n y) = \lambda^{n-1} f(x, y)$$

Ez esetben az $y = ux^n$ helyettesítés alkalmazandó. Oldjuk meg ezzel a módszerrel a 2. feladat 2. egyenletét! (ellenőrizzük, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk-e meg)

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet, melynek egy partikuláris megoldása $y = -1/x$:

$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$$