Csoportelmélet

1. ea.
09. 13.

$17^{00} - 18^{30}$

Bántay Péter

2.56, CS. $15^{30} - 16^{30}$

Csoportelmélet jelentősége:

szimmetria leírása
homológia (top.)

- emberi test tükörszimm.
- tüskésbőrűek: ötfogású szimm.
- építészet
- geometriai szimm.: olyan geom. transzf., amely a vizsgált objektumot mint egészet változatlanul hagyja

fizikai szimm.: olyan transzformáció, amely felcserélhető az időfejlődéssel

Két szimmetria kompozíciója megint egy szimm.
Szimmetriák algebrája = csoport.

Csoportelmélet: kvalitatív információ ⟶ kvantitatív következmények.

A csoport egy halmaz az elemein értelmezett kétváltozós művelettel, amely teljesíti a csoportaxiómákat. $a, b \in G \Rightarrow$ művelet (szorzat) ab

1. asszociativitás $a, b, c \in G$

Generated by CamScanner from intsig.com

$a(bc) = (ab)c$

2. egységelem létezése: $\exists\, 1 \in G$

$a1 = 1a = a \quad \forall\, a \in G$

3. inverzelem létezése: $\forall\, a \in G$ - hez $\exists\, a^{-1} \in G$,

melyre $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

Véges csoport: véges sok eleme van.
Kommutatív (Abel-) csoportok: $ab = ba \quad \forall\, a, b \in G$.

Csoportfogalom általánosítása

félcsoport: nincs inverz + egységelem
kvázicsoport: nem asszociatív

Csoportok a matematikában:

1.) Lagrange és Galois
polinomegyenletek megoldása gyökjelekkel
algebra
2.) Hilbert
számelmélet
3.) Klein és Poincaré
geometria
erlangeni program
4.) játékelmélet, differenciálegyenletek, ...

Generated by CamScanner from intsig.com

1. ea
09.13.

Csoportok a fizikában:

1.) kristályszimmetriák osztályozása
2.) Noether-tétel: szimm. és megm törvények
3.) relativitáselmélet (fizikai téridő szimm.-csoportja – Poincaré-csoport)
4.) kvantumelmélet (Wigner)
5.) paritássértés (Yang és Lee)
6.) kvarkmodell
7.) mértékelmletek
8.) szuperszimmetria, kvantumszimmetria

Generated by CamScanner from intsig.com

2. ea.
09.20.

Csoportaxiómák

1.) asszociativitás

2.) egységelem létezése

3.) inverz létezése

Példák

1.) <u>számcsoportok</u>

$(\mathbb{Z}, +)$ egész számok additív csoportja

kommutatív csoport, végtelen cs.

$(2\cdot\mathbb{Z}, +)$ páros számok (ptl. nem!)

komm., végtelen cs.

számgyűrű: komplex szdnok olyan $R \subseteq C$ részhalmaza, amelyre

1.) $-1 \in R$

2.) ha $a, b \in R \Rightarrow a+b \in R$

3.) ha $a, b \in R \Rightarrow a \cdot b \in R$

$\Downarrow$

$(R, +)$ mindig komm. csop.

van 0 benne: egységelem

$-1 \in R \Rightarrow (-1)\cdot(-1) = 1 \in R \Rightarrow (-1) + 1 = 0 \in R$

van inverz

ha $a \in R \Rightarrow -1 \cdot a \in R$ és $a - a = 0$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ csoport-e? $\longleftrightarrow$ nincs inverz!

$2a = 1$ - nek $\mathbb{Z}$-n nincs megoldása

Generated by CamScanner from intsig.com

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ nem csoport!

$a \cdot 0 = 1$ nincs, a'

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommut., ∞ csop.

racionális számok multiplikatív csoportja

Számtest: olyan számgyűrű, melyben minden nemzérus elem reciproka is eleme a testnek

2.) <u>lineáris csoportok</u> (mátrixcsoportok)

mátrix ≠ lin. transzf.!

V: lin. tér

$(V, +)$ kommut. csoport

$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$; α skalár $\in$ számt. $v_1, v_2 \in V$

$A : V_1 \longrightarrow V_2$ lin. leképz.

$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2$

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$ kiválasztva egy bázist

V_1-ben: $\{b_1, \dots, b_k\}$

V_2-ben: $\{f_1, \dots, f_l\}$

$v = \sum_{i=1}^{k} v_i b_i$

$Av = \sum_{i=1}^{k} v_i A(b_i)$ $\qquad A(b_i) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} f_j$

$m \times$.

Generated by CamScanner from intsig.com

spec.: $V_1 = V_2 \Rightarrow A$: lin. op. $\Rightarrow$ egy bázis! 2.ea 09.20.

$b \equiv f$

- V lineáris tér operátorai

$(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ def. komm. csoport

$(A \cdot B)(v) = A(Bv)$ def.

általában nem alkotnak csoportot!

asszociatív
egységelemes } művelet

inverz csak akkor $\exists$, ha $\det A \neq 0$

$\Downarrow$

Tekintsük az invertálható operátorokat!

- $GL(V) = \{ A: V \to V$ invertálható lin. op. $\}$

szorzással mint művelettel

általános lineáris csoport

$\dim V = 1 \Rightarrow$ skalárok multiplikatív csop.

$\forall$ lin. leképezés számmal való szorzás!

$\dim V > 1$ esetén végtelen nem komm. cs.

- $SL(V) = \{ A: V \to V$ lineáris $| \det A = 1 \}$

speciális lineáris csoport

fontos alkalmazások

$\Downarrow$

mátrixcsoportok (reprezentálva az op.-okat)

Generated by CamScanner from intsig.com

$GL_n = \{ n \times n\text{-es, invertálható mátrixok} \}$

$SL_n = \{ -\!\!\parallel\!\!- \text{, egységnyi determinánsú} \}$

3.) permutációcsoportok

X véges halmaz

$Sym(X) = \{ X \longrightarrow X$ bijektív leképezés $\}$

bij. leképezések kompozíciója bijektív

⇓

$Sym(X)$ csoportot alkot a komp. művelettel

∄ egység : elem $\longmapsto$ elem

egyértelmű inverz leképezés

elem $\longmapsto$ őskép

X feletti szimmetrikus csoport

alternáló csoport : páros permutációk csop.

transzpozíció : olyan permutáció, melyben két elemen kívül az összes többi fix

⇓

páros perm. : páros transzpozíció jelk.

ptl. $-\!\!\parallel\!\!-$. : ptl $-\!\!\parallel\!\!-$ $\quad\quad -\!\!\parallel\!\!-$ ↓

szorzása

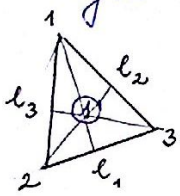
4.) geometriai szimmetriacsoportok

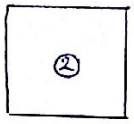
2D szimm. csoportok pl.

→ szabályos sokszögek szimm. csoportjai

Generated by CamScanner from intsig.com

szabályos háromszög, négyszög, ötszög







euklideszi mozgások (izometriák)

tükrözések
forgatások
eltolások
} és ezek kombinációi

① oldalf. merőlegesek metsz. p. : S (súlypont)

S szimmetriatr. - ra invariáns

⇓

eltolás nem lehet a szimm. között

S a forgatások fixpontja (kp.)

a tükr. egyenesen rajta van S

minden csúcspont / oldal szimm. tr. során csúcspontba / oldalba képződik

⇓

2 csúcsot megcserél a tükr.

át kell hogy menjen egy csúcsponton

⇓

tükr. egyenesek

a kp.-on és a

csúcsponton vannak át

$D_3 = \{ 1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{tükr.}}, \underbrace{C}_{120°\text{-os forg.}}, \underbrace{C^2}_{240°\text{-os forg.}} \}$

↳ harmadfokú diédercsoport

ü)

≅ K

Generated by CamScanner from intsig.com

n-ed fokú diédercsoport

D_n: szab. n-szög szimm. csoportja

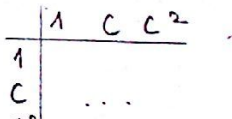
$D_n = \{1, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \text{forg.}\}$ ált. nem komm.

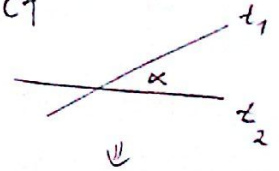
$|D_n| = 2n$: n db forg. + n db tükr.

Hogyan tudunk jellemezni egy ilyen csoportot?
(nem túl sok elemmel rendelkező véges csoportok esetén)

Szorzótábla (Cayley-tábla) véges csoportokra

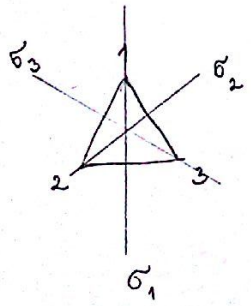
	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
1	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
σ_1	σ_1	1	C	C^2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	C^2	1	C	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	C	C^2	1	σ_1	σ_2
C	C	σ_3	σ_1	σ_2	C^2	1
C^2	C^2	σ_2	σ_3	σ_1	1	C

- sorokban oszlopokban minden csop. elem pontosan 1x szerepel
- nem teljesen szimm. a főátlóra $\Rightarrow$ nem komm.
- 

komm. csoport (n-csop.)
- 

$\Downarrow$

2 tükr. = 2α forg.



- mi lesz a csúcspontokkal?

σ_1: $1 \to 1$, $2 \leftrightarrow 3$

σ_2: $2 \to 2$, $1 \leftrightarrow 3$

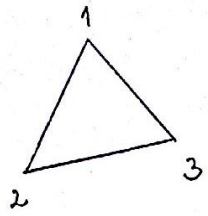
σ_3: $3 \to 3$, $1 \leftrightarrow 2$

$\Rightarrow$ $\sigma_1\sigma_2$: $1 \to 3 \to 2$, $2 \to 2 \to 3$, $3 \to 1 \to 1$ (+ forgatás) $\Rightarrow C$!

- $\sigma_1 C = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_1)^2\sigma_2 = \sigma_2$

Generated by CamScanner from intsig.com

D_3



szimmetriák → csúcspontok permutációja

homomorfizmus: olyan leképezés két csoport között, amely műveletartó („azonos alakúság")

$\phi: G \to H \qquad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad x, y \in G$

xy: G csop.-beli szorzás; $\phi(x)\phi(y)$: H-beli szorzás

következmények:

$\phi(1_G) = 1_H$

$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

$E = \{1\}$ a szorzás műveletével

1	1
1	1

$\phi: G \to E$, $x \mapsto 1$ } E-be $\forall$ csoportból tudunk homomorfizmust definiálni!

(nem túl mély kapcsolat)

izomorfizmus: bijektív homomorfizmus

G és H izomorf jelben $G \cong H$, ha létezik $\phi: G \to H$ izomorfizmus. (ekvivál.-rel.-szerű)

1.) $G \cong G$

2.) $G \cong H \Rightarrow H \cong G$

3.) ha $G \cong H$ és $H \cong K$ $\Rightarrow G \cong K$

Generated by CamScanner from intsig.com

Nem ekviv. rel, mert a csoportok nem alkotnak halmazt.

$G \cong H \Rightarrow |G| = |H|$ elemek számossága ua.

Izomorfia-elv: egymással izomorf csoportok csoportelméleti szempontból nem különböztethetők meg.

Példák:

1.) $Sym(X) \cong Sym(Y)$ akkor és csak akkor, ha a két halmaz ugyanannyi elemet tartalmaz: $|X| = |Y|$.

n-ed fokú szimmetrikus csoport

$S_n = Sym(\{1, \dots, n\})$

2.) $D_3 \cong S_3$, magasabb oldalszámra nem!

($\underset{\sim}{T} \cong A_4$ alternáló csoport

szabályos tetraéder)

3.) $\phi: G \to G$; a G csoport <u>automorfizmusai</u> (csoport szimmetria-struktúrája)

$Aut(G) = \{\phi: G \to G\}$

Csoportot alkot a kompozíció műveletével.

egységelem az identitás

$\exists$ inverz, mert bijektív leképezések

Generated by CamScanner from intsig.com

D_3

	1	c	c^2
1	1	c	c^2
c	c	c^2	1
c^2	c^2	1	c

Részcsoport: csoportelemek olyan halmaza, amely maga is csoportot alkot az eredeti művelet megszorításával.

$H \subseteq G$: 1.) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

2.) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

$\Downarrow$

ebből következik, hogy $1 = xx^{-1}$ is $\in H$

jelölés: $H < G$

Példák:

1.) $\{1, c, c^2\} < D_3$

2.) $\{1_G\} < G$ triviális részcsoport

3.) $G < G$

Tulajdonságok:

1.) $G < G$ reflexív

2.) ha $H < G$ és $G < H \Rightarrow G = H$ irreflexív

3.) tranzitív: $H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$

Generated by CamScanner from intsig.com

4.) $|H| \leq |G|$

$(2\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Z}, +)$ és $|\ | = |\ |$

5.) Részcsoportok metszete is részcsoport.

$H_1 < G$

$H_2 < G$

$x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow xy \in H_1,\ xy \in H_2 \Rightarrow xy \in H_1 \cap H_2$

$y, x \in H_1, H_2 \Rightarrow y^{-1}, x^{-1} \in H_1, H_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{-1}, y^{-1} \in H_1 \cap H_2$

Ez részcsoportok uniójára általában nem igaz.

Legyen X a G csop. elemeinek tetszőleges részhalmaza.

$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{H < G \\ X \subseteq H}} H$ részcsoportot kapunk.

X halmaz által generált részcsop.

Ez az X-et tartalmazó legkisebb részcsoport.

$H < G$ és $X \subseteq G$, hogy $\langle X \rangle = H \Rightarrow X$ a H egy <u>generátorrendszere</u>. (Ez nem egyértelmű!)

<u>Ciklikus csoport</u>: ha olyan csoport, amely generálható egyetlen elemmel.

Pl. $(\mathbb{Z}, +)$ az $\{1\}$ elemmel, végtelen ciklikus csoport

Generated by CamScanner from intsig.com

Ciklikus csoportok szerkezete:

3. ea.
09.27.

$1, \textcircled{x}, x^2, x^3, \ldots$
$\| \quad$
$x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots$ } x elem által gen. összes részcsop.

Ha G véges, csak véges számú különböző x-hatvány lehetséges.

legkisebb pozitív egész, amelyre $x^n = 1$ a csoport rendje

Ha $|G| = \infty$, akkor $\phi : G \to (\mathbb{Z}, +)$

$x^k \mapsto k$

bijektív, műveletartó $\quad x^k x^l = x^{k+l}$

Ha G véges: $\phi : G \to \{0, \ldots, n-1\}$

$x^k \mapsto k$

$x^k x^l = x^{(k+l) \bmod n} \qquad 0 \le k, l < n$

bijektív, műveletartó

$(\mathbb{Z}_n, +)$: modulo n egészek

$\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}$ cikl. csoport az összeset jellemzi, $\forall$ cikl. csop. ezekkel izomorf.

Példa:

$\{1, c, c^2\} < D_3$

$\|$

$\langle \{c\} \rangle = \langle \{c^2\} \rangle = \langle \{c, c^2\} \rangle$

Generated by CamScanner from intsig.com

3. ea
09.27.

- $x \in G$ elem rendje az általa generált ciklikus részcsoport elemszáma. $|\langle x \rangle|$

$H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$

Részcsoportok összessége egy részben rendezett halmaz (nem minden elempár közt értelmezzük a rendezési relációt).

Áll.: Részcsoportok mindig hálót alkotnak. Léteznek minimumok, maximumok.

minimum: $\min\{H_i\} = \bigcap_i H_i$

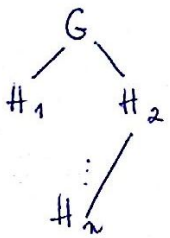
maximum: $\max\{H_i\} = \langle \bigcup_i H_i \rangle$

részcsoporthálló

Hasse-diagram:

G

$H < G$ részcsop. összessége



(él: ha $H_i < H_j$ és nincs H_k, hogy $H_i < H_k$ és $H_k < H_j$)

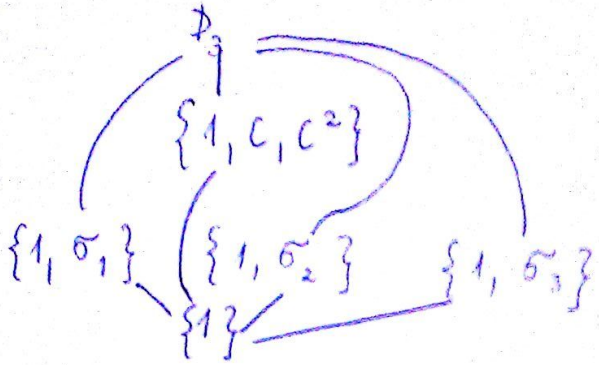
akkor húzunk élt a diagramba, ha 2 részcsop. K és H

$K < H$, és ha

$K < M < H \Rightarrow K = M$ vagy $M = H$

Generated by CamScanner from intsig.com

M D_3 :



Par

R

R

r

Mira

Trivi

Generated by CamScanner from intsig.com

4. ea.
10.04.

Mellékosztályok:

$H < G$, $x \in G$, $xH = \{xh : h \in H\}$ baloldali mellékosztály $\Rightarrow$ jobbo. ~ $Hx = \{hx : h \in H\}$

általában nem esnek egybe

dualitás viszont van köztük

Partíciót alkotnak a csoportot.

Minden elem tagja valamelyik ~-nak.

2 ~ vagy egybeesik, vagy diszjunkt.

$z \in xH \cap yH$

$z \in xH \Rightarrow z = xh_1$

$z \in yH \Rightarrow z = yh_2$ $\quad h_1, h_2 \in H$

$xh_1 = yh_2 \Rightarrow y = \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{h_3 \in H} \cdot (h_1 h_2^{-1})$

$yH = \{yk : k \in H\} = \{x(h_3 k) : k \in H\} = xH$

Részhalmazok: ekviv. rel. ekvival. osztályai, ha partíciók. (Pl. ekiv.: ugyanabban a rh.-ban vannak.) - ~: ekvipartíció.

Minden melléosztály számossága megegyezik.

Triviális ~ H.

$xH = \{xh \mid h \in H\}$

$xh \longmapsto h$ bijekció H és xH között

Generated by CamScanner from intsig.com

Melldkosztályok halmaza G/H (poset - halmaz)

H részcsoport <u>indexe</u> G-ben $= [G : H]$

G/H számossága. (Hány kül. bo.-i ~ van.)

(Hasse-diagramon index szerint rendezzük a részcsop.-okat.)

$[G : G] = 1$

$[G : \{1_G\}] = |G|$

<u>Tétel: Lagrange tétele</u>: ha G véges csoport, akkor $|G| = |H| \cdot [G : H]$ minden $H < G$ részcsoportra. (meggondolds triv.)

D_3 - n pl. vizsgálható.

Köv.: minden prímrendű csoport ciklikus.

$|G| = p \quad p > 1 \quad H < G \Rightarrow |H| = 1 \text{ v. } p$

$\Rightarrow$ 2 részcsop. van: triv. + önmaga

$p > 1 \Rightarrow \exists g \in G;\ g \neq 1_G \quad \langle g \rangle = G$!

D_3 szorzótáblá e. régebben

$N = \{1, c, c^2\}$ részcsop. $\quad \sigma_1 N = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} =$

$H_1 = \{1, \sigma_1\} \quad = \sigma_2 N = \sigma_3 N$

$G/N = \{N, \sigma_1 N\}$

Generated by CamScanner from intsig.com

4. ea. 10.04.

Nem egyértelmű kapcsolat: több - egyértelmű kapcsolat

$$G/H_1 = \{H_1, cH_1, \sigma_2 H_1\}$$

$$cH_1 = \{c, \sigma_3\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 H_1 &= \{\sigma_2, c^2\} \\ H_1 \sigma_2 &= \{\sigma_2, c\} \end{aligned}\right\} \quad \sigma_2 H_1 \neq H_1 \sigma_2$$

Normális részcsoport: $xN = Nx \quad \forall x \in G$.

Pl. $\{1\}$

G

Minden részcsoport normális, ha G csoport kommutatív.

$N < G \quad x \equiv_N y$, ha ugyanazon mellékosztály elemei. ($\equiv_N$ ekviv. reláció)

Normális részcsoport esetén ez kompatibilis a csoportművelettel (azaz kongruencia-reláció). $x_1 \equiv_N y_1$ és $x_2 \equiv_N y_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \equiv_N y_1 \cdot y_2$

Lehetőséget ad művelet bevezetésére az ekvivalenciaosztályok halmazán.

C_1, C_2 ekviv. oszt. $\Rightarrow C_1 \cdot C_2 = x_1 x_2$-t tartalmazó osztály, ha $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$.

Generated by CamScanner from intsig.com

G/N *faktorcsoport*, az ekviv. osztályok a jelölt értelmezett művelettel.

$G/N = \{xN\}$ mellékosztályai az N normális részcsop.-nak.

$(xN)\cdot(yN) = (xy)N$

$X, Y \subseteq G$ ↝ kiterjesztés ↴

$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ komplexusszorzat

mellékosztályok szorzata

$xN = \{xh \mid h \in N\} = \{x\}N$

Egy részcsop. akkor normális, ha $\forall$ két mellékosztálynak a komplexusszorzata is mellékosztály.

Pl. D_3 normális részcsoportjai

$\{1\}, D_3, \{1, c, c^2\} = N$

⇓

faktorcsoportok

$G/\{1\} \to \{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{c\} \ldots$ stb.

izomorf az eredeti csoporttal $\overset{N}{=} G$

$G/G \overset{N}{=} \{1\}$

ezek érdektelenek

Generated by CamScanner from intsig.com

D_3/N	N	$\sigma_1 N$
N	N	$\sigma_1 N$
$\sigma_1 N$	$\sigma_1 N$	N

komplexusszorzat

másodfokú ciklikus csoport
(csak 1 kételemű csop. van!)

N: forgatások részcsop.
irányítástartó

$\sigma_1 N$: irányításváltó, tükrözések

⇓

geom. tartalom!

faktorcsoport: „előjel"

	+	−
+	+	−
−	−	+

szorzótáblával megegyezik

homomorfizmus

$\phi : D_3 \to \{+1, -1\}$

$x \mapsto$ paritás(x)

faktorcsoport → term. homomorfizmus!

Term. homom.: $N \trianglelefteq G$
norm. részcsop.

$\Pi_N : G \to G/N$ homom.

$x \mapsto xN$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$\pi_N(xy) = (xy)N = \pi_N(x)\,\pi_N(y)$$

$$(xN)(yN) = (xy)N \quad \text{l. előbb}$$

Term. homom. képe:

$$\pi_N(G) = G/N \Rightarrow \text{szürjektív leképezés}$$

<u>Homomorfizmus-tétel</u>: tetszőleges $\phi: G \to H$ homom. esetén $\underbrace{\ker\phi}_{\phi \text{ magja}} = \{x \in G \mid \phi(x) = 1_H\}$ egy normális részcsoportja G-nek, és $G/\ker\phi \cong \phi(G)$.

Biz.: $x, y \in \ker\phi \Rightarrow \phi(x) = \phi(y) = 1$

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = 1 \Rightarrow x^{-1} \in \ker\phi$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = 1 \Rightarrow xy \in \ker\phi$$

$\Downarrow$

$\ker\phi$ részcsop.

$$\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$$

$$\phi(x);\ \phi(y) \in \phi(G)$$

$$\phi(x)\cdot\phi(y) = \phi(xy) \in \phi(G) \quad \text{stb.}$$

l. könyv.: norm. részcsop. + izomorfia

homomorf képek = faktorcsoportok (izomorfia erejéig)

Generated by CamScanner from intsig.com

csolat van $\phi(G)$ részcsoportjai és G azon részcsoportjai között, amelyek tartalmazzák $\ker\phi$-t.

Generated by CamScanner from intsig.com

5. ea.
5. ea.
10. 11.

Direkt szorzat

G és H csoportok $G \times H$ direkt szorzata (x, y) $x \in G$, $y \in H$ alakú rendezett párok csoportja (= Descartes-szorzat)

$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2, y_1 y_2)$ művelettel, kielégíti a csoportaxiómákat

- $\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big)(x_3, y_3) = (x_1 x_2, y_1 y_2)(x_3, y_3) = (x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3)$

$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1)(x_2 x_3, y_2 y_3) = (x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3)$

asszociatív művelet

- egységelem $(1_G, 1_H)$
- $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$

1.) $G \times H$ és $H \times G$ csoportok izomorfak
„kommutatív" (nem művelet, a csoportok nem alkotnak halmazt!)

2.) $(G \times H) \times K \cong G \times (H \times K)$ „asszociatív"

3.) $G \times \{1\} \cong G$

DE! inverz nem létezik

Generated by CamScanner from intsig.com

$|G \times H| = |G| \cdot |H| \Rightarrow$ nem lehetnek inverzek

$|G||G^{-1}| = |1| = 1$ nem $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ Descartes-szorzatként előálló csop. jellemzése

$$G \times H = \{(x, y) \mid x \in G,\ y \in H\}$$

$$\hat{G} = \{(x, 1_H) \mid x \in G\}$$

$$\hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$$

Áll.: $\hat{G} < G \times H$, és $\hat{H} < G \times H$

$(x, 1_H)(y, 1_H) = (xy, 1_H) \in \hat{G}$ stb.

1.) Sőt: normális részcsoportok $\hat{G}, \hat{H} \triangleleft G \times H$

legyen $(g, h) \in G \times H$

$$(g, h)\,\hat{G} = \{(g, h)(x, 1_H) \mid x \in G\} =$$

$$= \{(gx, h) \mid x \in G\} =$$

$$= \{(x, h) \mid x \in G\}$$

$$\hat{G}(g, h) = \{(xg, h) \mid x \in G\} = \{(x, h) \mid x \in G\}$$

$\hat{G}$ normális részcsop.

szimmetriamegfontolásokból $\hat{H}$ is n. rés.

Generated by CamScanner from intsig.com

5. ea.
10. 11.

$\phi: G \times H \to G$
$(x, y) \mapsto x$ } homomorfizmus

$\phi((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \phi((x_1 x_2, y_1 y_2)) = x_1 x_2 =$

$= \phi(x_1, y_1) \cdot \phi(x_2, y_2)$

képe: az egész G : $\phi(G \times H) = G$

$\ker \phi = \{(x, y) \in G \times H \mid \phi((x, y)) = 1_G\} =$

$= \{(1_G, y) \mid y \in H\} = \hat{H}$

2.) Homom. tétel miatt: $G = \phi(G \times H) \cong G \times H / \hat{H}$

⇒ egyik szerinti faktorcsoport a másikkal izomorf

3.) $\hat{G} \cong G$ és $\hat{H} \cong H$

$\pi: \hat{G} \to G$
$(x, 1_H) \mapsto x$ izomorfizmus

4.) $\hat{G} \cap \hat{H} = \{(1_G, 1_H)\}$ triviális részcsoport

5.) $\langle \hat{G} \cup \hat{H} \rangle = \{(x, y) \mid x = 1_G$ vagy $y = 1_H\}$

$(x, 1_H)$ $(1_G, y)$ tartalmazza

$(x, y) \in \langle \hat{G} \cup \hat{H} \rangle$

$\langle \hat{G} \cup \hat{H} \rangle = G \times H$ az egész csoportot generálja

Generated by CamScanner from intsig.com

6.) elemeik páronként kommutálnak

$$(x, 1_H)(1_G, y) = (x, y)$$

$$(1_G, y)(x, 1_H) = (x, y)$$

Ha egy csoportban találhatók két normális részcsoport, melyek páronként kommutálnak, metszetük triviális, és amelyek együttesen generálják az egész csoportot, akkor ez a csoport izomorf lesz a direkt szorzatukkal. Direkt szorzatok majdnem komm. csoportok. Komm. csop. direkt szorzata komm.

Példa: legyen n és m relatív prím.

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = ? \qquad \text{(ciklikus csop.: egy elem generál)}$$

$$\mathbb{Z}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_m = \{1, y, y^2, \dots, y^{m-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \{(x^k, y^l) \mid 0 \le k < n,\ 0 \le l < m\}$$

$$(x, y)^0 = (1, 1)$$

$$(x, y)^1 = (x, y)$$

$$(x, y)^k = (x^k, y^k)$$

$$(x, y)^n = (1, y^n)$$

Generated by CamScanner from intsig.com

5. ea.
10.11.

n és m relatív prím $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$:

$an + bm = 1$ (könnyen meggondolható)

$$(x, y)^{an} = (x^{an}, y^{an}) = (1, y^{1-bm}) = (1, y)$$

$$(x, y)^{bm} = (x^{bm}, y^{bm}) = (x^{1-an}, 1) = (x, 1)$$

$$(x^k, y^l) = (x, 1)^k \cdot (1, y)^l = (x, y)^{bmk+anl}$$

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ciki. csop.

(1 elemmel generálható!)

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$$

általában nem igaz, ha nem relatív prímek

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_4$ nem izomorfak!

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Klein-f. csoport

Tetszőleges elemszámú ciklikus csoportok direkt szorzata általában nem ciklikus, de mindig kommutatív (Abel-cs.).

Abel-csoportok tétele: minden véges ~~-ge-~~ n elődd ciklikus csoportok direkt szorzataként. (Frobenius – Stickelberger-tétel)

prím hatványrendű

itt elődd. sorrendtől eltekintve egyértelmű.

Generated by CamScanner from intsig.com

$$G \cong \tilde{\bigoplus_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \qquad p_i - k \text{ prímszámok}$$

Véges Abel-csoportok egyértelműen jellemezhetők ezekkel a prímhatványokkal.

Ha G nem véges, de végesen generált Ab.-cs., akkor G prímhatványrendű ciklikusok és véges sok végtelen cikl. csop. direkt szorzatakét áll elő.

Köv.: $|G| = \prod_i p_i^{k_i}$ tetszőleges Abel-csoportra. (Ez a számelmélet alaptétele.)

Csoportok féldirekt szorzata

G és H csoportok, $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$

$\{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$

$g \mapsto \alpha_g$

$\alpha_g : H \longrightarrow H$

bijektív

műveletartó

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, \alpha_{x_2}(y_1)\, y_2)$$

spec.: $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$

$g \longmapsto id_H \Rightarrow$ direkt szorzat

Generated by CamScanner from intsig.com

Rendezett párok csoportot alkotnak.

$|G \ltimes_\alpha H| = |G|\,|H|$

sok tul. nem fog teljesülni!

a szorzás nem szimmetrikus

$\hat{G} = \{(x, 1_H) \mid x \in G\}$

$\hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$ részcsoportok a féldirekt szorzatban

$\hat{G} \cong G$; $\hat{H} \cong H$

$\hat{H} \lhd G \ltimes_\alpha H$, de $\hat{G}$ <u>nem</u> normális.

$G \ltimes_\alpha H / \hat{H} \cong G$

$\hat{G} \cap \hat{H}$ triviális

generálják az egész csoportot

de elemeik nem kommutálnak páronként

Példák:

- az euklideszi mozgások csoportja (izometriák)
  transzlációk és rotációk féldirekt szorzata
- Minkowski-tér tdv. tasztó tr. ≡ Poincaré-csop.
- kristályok szimmetriacsoportjai

Generated by CamScanner from intsig.com

Centralizátorok

6. ea.
10. 18.

$x \in G$, $C_G(x) = \{ y \in G \mid xy = yx \} < G$

Áll.: részcsoport G-ben.

$y_1, y_2 \in C_G(x) \Rightarrow$ $xy_1 = y_1 x$, $xy_2 = y_2 x$

$$x(y_1 y_2) = (xy_1) y_2 = (y_1 x) y_2 = y_1 (x y_2) = y_1 (y_2 x) = (y_1 y_2) x$$

$y \in C_G(x)$ $\quad xy = yx$

$$y^{-1}(xy) y^{-1} = y^{-1}(yx) y^{-1}$$

$$y^{-1} x = x y^{-1}$$

$X \subseteq G$ részhalmaz centralizátora

$$C_G(X) = \{ y \in G \mid xy = yx \ \forall x \in X \} = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$$

ez is egy részcsoport

Példák

$C_G(1) = G$

$C_G(G) = Z(G)$ az adott csoport centruma

elemei a centrális elemek

minden G-beli elemmel felcserélhetők

Ha G kommutatív $\Rightarrow$ $Z(G) = G$.

Generated by CamScanner from intsig.com

ha a centrum mindig normális részcsop.: $Z(G) \triangleleft G$.

el $x \in G$ $\quad xZ(G) = \{xy \mid y \in Z(G)\} =$

$= \{yx \mid y \in Z(G)\}$

centrum bal-, ill. jobboldali mellékoszt.

{ Legyen $H < G$ egy részcsoport.

$N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\}$ <u>normalizátor</u>

$< G$

$C_G(H)$ általában kisebb, mint $N_G(H)$

$xH = \{xh \mid h \in H\} = \{hx \mid h \in H\} = Hx$

de fordítva nem biztos, hogy igaz!

ott halmaz ≡ halmaz

C beldthető, hogy $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$

De $H \triangleleft N_G(H)$, a normalizátor G legkisebb

Tu olyan részcsoportja, amelyben még a H

E normális.

Ja $N_G(H) = \bigcap_{H \triangleleft K < G} K$ is belátható.

<u>Derivált részcsoport</u> két elem felcserélhető,

Generated by CamScanner from intsig.com

ha $xy = yx$. Mivel mérjük az ettől való eltérést?

$$\underbrace{xy\,x^{-1}}\,y^{-1} = 1$$

$[x, y]$ csoportelméleti kommutátor

$\{[x, y] \mid x, y \in G\}$ nem részcsoport!

Nézzük meg az ezáltal gen. részcsoportot!

↓

kommutátor-részcsoport ≡ derivált részcsoport

$$G' = \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle$$

$G' \triangleleft G$ normális részcsoport

G/G' kommutatív

Ha Abel-csoport, akkor $G' = \{1_G\}$ triviális.

Deriváltlánc: $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$, ..., $G^{(n)} = G^{(n-1)'}$

Tudjuk, hogy $G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G^{(0)}$.

Eljutunk-e a triv. részcsoportig?

Ha véges sok lépés után $G^{(n)} = \{1_G\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>feloldható csoport</u>.

↳ „közel" van a komm. csoporthoz

Generated by CamScanner from intsig.com

Feit – Thomson: minden páratlan rendű csoport feloldható.

Konjugált osztályok: $xy = yx$

$y^{-1}xy = x$

$\parallel$

x^y jelölés

x y általi konjugáltja

x akkor cserél fel y-nal, ha $x^y = x$.

Ekkor $y^x = y$, a felcs. szimm. reláció.

$X, Y \subseteq G \quad X^Y \{x^y \mid x \in X, y \in Y\}$

$x \in G$: konj. osztály $x^G = \{x^y \mid y \in G\}$

Ezek particionálják a csoportelemek halmazát. (Két konj. oszt. vagy megegyezik egymással, vagy diszjunkt.)

$z \in x^G \cap y^G$

$z = x^g = y^h \qquad z, x, y, g, h \in G$

$g^{-1}xg = h^{-1}yh$

$x = (gh^{-1})y(hg^{-1}) = (hg^{-1})^{-1}y(hg^{-1}) =$

$= y^{(hg^{-1})}$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$x^G = \{ x^k \mid k \in G \} = \{ (y(hg^{-1}))^k \mid k \in G \} =$$

$$= \{ (k^{-1} g h^{-1}) y (hg^{-1}k) \mid k \in G \} = \{ y^e \mid e \in G \} =$$

ez végigfut a csoportelemek összességén

$$= y^G$$

⇓

Ha van két nemtriv. elem, a két konj. oszt. -ük egyenlő.

Centrális elemek konjugált osztályai egyeleműek.

$$z \in Z(G) \Rightarrow z^y = z \Rightarrow z^G = \{z\}$$

⇓

triviális osztály: $1^G = \{1_G\}$

Kommutatív csoportban minden konjugált osztály egyelemű: minden elem önmaga alkot egy konjugált osztályt.

Példa: D_3 konjugált osztályai

	1	c	c^2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	1	1	1	1
c	c	c	c	c^2	c^2	c^2
c^2	c^2	c^2	c^2	c	c	c
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	σ_1	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	σ_3	σ_2	σ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_1	σ_2	σ_1	σ_3

$xy = yx$ esetén $x^y = x$

$c^{\sigma_1} = \underbrace{\sigma_1^{-1}}_{\sigma_1} c \underbrace{\sigma_1}_{\sigma_3} = c^2$

Generated by CamScanner from intsig.com

$1^G = \{1\}$ $\quad C^G = (C^2)^G = \{C, C^2\}$

$\sigma_1^G = \sigma_2^G = \sigma_3^G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

három konjugáltosztály

elemszámaik összege: csoport rendje

k. o. - k rendje osztja a csoport rendjét

$|x^G| = [G : C_G(x)]$ ← köv.

$C_{D_3}(1) = D_3$ $\quad C_{D_3}(\sigma_1) = \{1, \sigma_1\}$

$C_{D_3}(C) = \{1, C, C^2\}$ $\quad C_{D_3}(\sigma_2) = \{1, \sigma_2\}$

$C_{D_3}(C^2) = \{1, C, C^2\}$ $\quad C_{D_3}(\sigma_3) = \{1, \sigma_3\}$

Egy részcsoport akkor normális, ha konjugált osztályok uniója.

$N \triangleleft G$ $\quad xN = Nx \quad \forall x \in G$

$N = x^{-1}Nx = \{h^x \mid h \in N\}$

minden elem minden konjugáltja eleme a normális részcsoportnak

⇓

unióval megkaph. a norm. rcs. - t

Pl. $C_{D_3}(C) \triangleleft D_3$, de $C_{D_3}(\sigma_1) \not\triangleleft D_3$ következésképpen.

Generated by CamScanner from intsig.com

$Z(G) = 1$ elemű konjugált osztályok

6 ea
10.18

unió ja

Permutációs hatások

$\phi: D_3 \to Sym(\{1,2,3\})$ homom. l. régebben

$\phi: G \to Sym(X)$ az X véges halmaz feletti perm. hatása G-nek.

Hatás foka = tartóhalmaz (X) elemszáma.

$g \in G \qquad \phi(g) \in Sym(X)$

$\phi(g): X \to X$

$= \phi(g)(x)$

$x \in X \qquad : x \mapsto g \cdot x$ nem szorzás!

csoporte. ↑ ↑ tartóhalmaz eleme

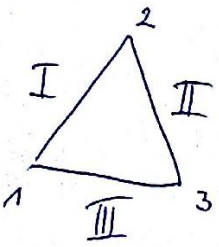
homom.

$\phi(gh) = \phi(g)\,\phi(h)$

$(gh)x = (gx)(hx)$ szorzatjelölés értelme

Pólya: $x \in X$ pont pályája $Gx = \{ gx \mid g \in G \}$

D_3



$\Psi: D_3 \to Sym\{I, II, III\}$

indsik perm. hatás

csúcspontokból alkotott 2 elemű halmazok: $\{1,2\}$ $\{2,3\}$ $\{3,1\}$

$\Omega: D_3 \to Sym(\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\})$

érdemi különbség nincs közöttük

⇓

ekvivalens permutációs hatás

$\phi: G \to Sym(X)$ és $\psi: G \to Sym(Y)$ akkor ekviv., ha $\exists\ \alpha: X \to Y$ bijektív leképezés, hogy teljesül a köv. feltétel:

$$\alpha \circ \phi(g) = \psi(g) \circ \alpha. \quad \forall g \in G.$$

Hatások összege: $\phi: G \to Sym(X)$ és $\psi: G \to Sym(Y)$ összege, ha $X \cap Y = \emptyset$

$$\phi \oplus \psi: G \to Sym(X \cup Y)$$

$g \in G \quad (\phi \oplus \psi)(g): X \cup Y \to X \cup Y$

$$x \longmapsto \begin{cases} \phi(g)(x) & \text{ha } x \in X \\ \psi(g)(x) & \text{ha } x \in Y \end{cases}$$

ít fokszám összeadódik.

$\phi_1 \cong \psi_1$ és $\phi_2 \cong \psi_2$ (ekviv.), akkor

$\phi_1 \oplus \phi_2 \cong \psi_1 \oplus \psi_2$

$\phi \oplus \psi = \psi \oplus \phi$ „kommutatív"

$\phi_1 \oplus (\phi_2 \oplus \phi_3) = (\phi_1 \oplus \phi_2) \oplus \phi_3$ „asszociatív"

Generated by CamScanner from intsig.com

Tetszőleges hatás előáll tranzitív hatások összegeként, az előállítás egy sorrendtől eltekintve egyértelmű. 6.ea 10.18.

Tranzitív hatás: csak egy pályája van.

$$Gx = X \quad \forall x \in X \text{-re.}$$

Véges G csoport esetén csak véges sok inekvivalens tranzitív hatás van $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$.

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \phi_i$$

n_i multiplicitás $(n_i \in \mathbb{N}^+)$

Coset-hatások

$H < G$ véges indexű részcsoport

G/H = H baloldali mellékosztályainak összessége

$$\phi_H : G \to \mathrm{Sym}(G/H) \qquad xH = \{xh \mid h \in H\}$$

$$\phi_H(g) : xH \longmapsto (gx)H$$

$$\phi_H(gk) = \phi_H(g)\phi_H(k)$$

ϕ_H coset-hatás tranzitív perm. hatás.

egyetlen pálya van

$$xH \overset{\phi_H(yx^{-1})}{\sim} yH$$

7.ea. 10.25.

Generated by CamScanner from intsig.com

Minden tranzitív hatás ekvivalens egy coset-hatással.

Stabilizátor részcsoport: $x \in X$ $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$
az adott pont stabilizátora

mindig részcsoportja G-nek.

$g, h \in G_x$ $gx = x$ $hx = x$ $(gh)x = g(hx) = gx = x$

$x \in X$, $g \in G$

$$G_{gx} = \{h \in G \mid h(gx) = gx\} = \{h \in G \mid \underbrace{(g^{-1}hg)}_{g^{-1}(hg)}x = g^{-1}gx = x\}$$

h g általi konjugáltja

$G_{gx} = g\,G_x\,g^{-1}$ az x stabilizátorának konjugáltja.

Tranzitív hatás pontjainak stabilizátorai egymással konjugáltak, és bármely pont stabilizátorához tartozó cosethatás ekvivalens a tranzitív hatással.

⇓

egy-egyértelmű kapcsolat tranzitív hatások és részcsoportok konjugált osztályai között

Generated by CamScanner from intsig.com

7. ea.
10. 25.

Cayley-tétel: minden véges csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

$\phi_{\{1\}} : G \to Sym(G/\{1\})$

coset-hatás: izomorfizmus

Hatás különböző pályáinak száma:

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \phi_i \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ a pályák száma $\sum_{i=1}^{m} n_i$.

Cauchy-Frobenius-lemma: $\to \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$

$$Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$\{(g)x) : g \in G,\ x \in X$ és $gx = x\} =$ lefixáltak

$$= \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid gx = x\}| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

x-et lefixálva

$$\sum_{x \in X} |\{g \in G \mid gx = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

$$X = \bigcup_{\alpha=1}^{p} (X_\alpha) \text{ hatás pályái}$$

$$G_{gx} = g G_x g^{-1} \Rightarrow |G_{gx}| = |G_x|$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{x \in X_\alpha} |G_x| = \sum_{\alpha=1}^{p} |X_\alpha| \cdot |G_x| = |G| \cdot p$$

$x \in X_\alpha \qquad G_x$

$$|G/G_x| = [G : G_x]$$

$$|X_\alpha| = [G : G_x]$$

Lagrange-t.:

$$|G| = \underbrace{[G : G_x]}_{|X_\alpha|} \cdot |G_x|$$

Szorzathatás:

$\phi: G \to Sym(X)$ és $\psi: G \to Sym(Y)$ hatások szorzata

$$\phi \otimes \psi : G \to Sym(X \times Y)$$

$$(\phi \otimes \psi)(g): X \times Y \to X \times Y$$

$$(x, y) \mapsto (gx, gy)$$

$\phi_1 \cong \psi_1$ és $\phi_2 \cong \psi_2 \Rightarrow \phi_1 \otimes \phi_2 \cong \psi_1 \otimes \psi_2$

$\phi \otimes \psi \cong \psi \otimes \phi$

$\phi_1 \otimes (\phi_2 \otimes \phi_3) = (\phi_1 \otimes \phi_2) \otimes \phi_3$ } „szokásos"

Generated by CamScanner from intsig.com

fokszámok összeszorzódnak

$$\phi_1 \otimes (\phi_2 \oplus \phi_3) \cong (\phi_1 \otimes \phi_2) \oplus (\phi_1 \otimes \phi_3)$$

„disztributivitás"

⇓

Burnside-gyűrű: hatások ekvivalenciaosztályai az összeadással és a szorzással

|| számgyűrű: hasonlóság

DE: zérus elem nincs

nincsenek inverzek sem

⇓

félgyűrű

Véges csoport esetén

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \phi_i \qquad \psi = \bigoplus_{i=1}^{m} k_i \phi_i$$

$$\phi \otimes \psi = \bigoplus_{i,j=1}^{m} n_i k_j (\phi_i \otimes \phi_j)$$ disztributivitás

$$\phi_i \otimes \phi_j = \bigoplus_{l=1}^{m} N_{ij}^{\ l} \phi_l$$ struktúra-állandók

$$= \bigoplus_{i,j} n_i k_j \bigoplus_{l} N_{ij}^{\ l} \phi_l = \bigoplus_{l} \left(\sum_{ij} n_i k_j N_{ij}^{\ l} \right) \phi_l$$

ha ezek multiplicitásait tudom, ∀ két hatás szorzatát el tudom végezni

Generated by CamScanner from intsig.com

8. ea.
11. 08.

$\phi : G \to Sym(X)$

$\forall$ önmagára képező műv.

permutáció : szimmetria

struktúrálatlan halmaz elemein

$\updownarrow$

gyakran : van (!) struktúra ! $\Rightarrow$ szimmetriacsop.

bonyolultabbak, ezek homom. érdekesek !

$\Phi : G \to Hom(X)$ $\quad X$: top. tér

$\phi : G \to GL(V)$ $\quad V$: lin. tér

lin. op.

$\Downarrow$

Reprezentációelmélet

Lehetőségelmélet

G csop. ábr. a V lin. térre egy

$D : G \to GL(V)$ homomorfizmus.

(D : Darstellung)

kv. m. miatt fontos, mert

az állapotok lin. (Hilbert-) teret

alkotnak

Generated by CamScanner from intsig.com

$\Rightarrow$ szimm. tr. - k lin. op. - ok

unitér $\quad U^+ = U^{-1}$

antiunitér $\quad U^+ = U^{-1}{}^*$

időtükröző - ez az egyetlen

$D: G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ szimm. csop. ábr. a $\mathcal{H}$. - téren.

$D: G \longrightarrow GL(V)$ ábr.

- $D(1) = \mathbb{1}$
- $D(xy) = D(x)D(y)$
- $D(x^{-1}) = D(x)^{-1}$

lin. teret jellemez

skalárok teste

dimenzió (bázis számossága)

mátrixabrázolás

V lin. tér 1 bázisa $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$$D(x)\, b_i = \sum_j \underbrace{D_{ij}(x)}\, b_j$$

ábr. mátrix

báziscserét végrehajtva a V téren

Generated by CamScanner from intsig.com

$\{b_1, \dots, b_n\} \longrightarrow \{b_1', \dots, b_n'\}$

létezik olyan $A \in GL(V)$, hogy $b_i' = A b_i$.

Az új bázisban az ábr. op. mx.-elemei

$$D'_{ij}(x) = \left[A^{-1} D(x) A\right]_{ij}$$

ekvivalens ábrázolások.

$\Downarrow$

$$A D'(x) = D(x) \cdot A$$

két kül. lin. téren def. ábr.

$D_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ és

$D_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ ábr. ekviv., ha

$\exists A : V_1 \longrightarrow V_2$ invertálható lin. op., hogy

$$A D_1(x) = D_2(x) A \quad \forall x \in G.$$

Adott egy G csop. Határozzuk meg ekvivalencia erejéig az összes ábrázolását! (alapfa)

Példák:

1, definiáló ábrázolás

V lin. tér feletti $GL(V) > G$.

Generated by CamScanner from intsig.com

részcsop. esetén $D : G \to GL(V)$; $x \mapsto x$

2.) permutációs ábrázolás

$$\phi : G \longrightarrow Sym(X)$$

$$V = \{ f : X \mapsto \mathbb{C} \}$$

$$D : G \longrightarrow GL(V)$$

$$x \mapsto D(x)$$

$$D_\phi(x) f : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$p \longmapsto f(x^{-1}p)$$ ábrázolás-e?

$$D_\phi(xy) f : X \longmapsto \mathbb{C}$$

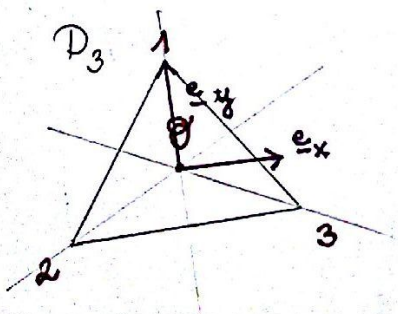
$$p \longmapsto f(y^{-1}x^{-1}p)$$

$$[D_\phi(x) \circ D_\phi(y)] f = D_\phi(x) [D_\phi(y) f] : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$p \longmapsto D_\phi(y) f(x^{-1}p)$$

$$p \longmapsto f(y^{-1}(x^{-1}p))$$

3.) D_3



Válasszuk $\mathcal{O}$-nak a Δ súlypontját!

$\Rightarrow$ lin. tér 2D

Generated by CamScanner from intsig.com

8. ea.
11. 08.

bázis : $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$

$D : D_3 \longrightarrow GL(V)$

$D(1) = 1\!\!1$

$$D(\sigma_1) = \begin{cases} \underline{e}_x \longmapsto -\underline{e}_x \\ \underline{e}_y \longmapsto \underline{e}_y \end{cases} \qquad D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_2) = \begin{cases} \underline{e}_x \longmapsto \frac{1}{2}\underline{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_y \\ \underline{e}_y \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_x - \frac{1}{2}\underline{e}_y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_3) = \begin{cases} \underline{e}_x \longmapsto \frac{1}{2}\underline{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_y \\ \underline{e}_y \longmapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_x - \frac{1}{2}\underline{e}_y \end{cases}$$

Maschke tétele : komplex számtest

- minden polinomnak van gyöke
- Cauchy-sorozatnak van határértéke

$\Downarrow$

könnyű vele dolgozni

Ábrázolások direkt összege

$D_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ és $D_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$

$(D_1 \oplus D_2) : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$

rendezett p.

$\{(x,y) \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$g \longmapsto (D_1 \oplus D_2)(g)$$

$$(D_1 \oplus D_2)(g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$$
$$(x, y) \longmapsto (D_1(g)x, D_2(g)y)$$

Ha $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázisa V_1-nek, és $\{f_1, \dots, f_m\}$ bázisa V_2-nek, akkor

$$\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m)\}$$

bázisa lesz $V_1 \oplus V_2$-nek.

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

$$\Downarrow$$

Összegbázisra vonatkozóan blokkdiag. mx.

$$\begin{matrix} (e_1,0) \\ \vdots \\ (e_n,0) \\ (0,f_1) \\ \vdots \\ (0,f_m) \end{matrix} \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

1.) Ha $D_1 \cong D_2$ és $D_3 \cong D_4 \Rightarrow D_1 \oplus D_3 \cong D_2 \oplus D_4$

2) $D_1 \oplus D_2 \cong D_2 \oplus D_1$ ($\exists$ lin. op. köztük)

$$D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$$

ekvivalens ábrázolások

$D: G \longrightarrow GL(V)$ $W < V$ lin. altér, akkor inv. altér, ha $\forall x \in G$ és $v \in W$ esetén $D(x)\, v \in W$.

- 0 vektor
- egész tér } triviális inv. altérek

Ha $\mathcal{F}$ nemtriv. $\Rightarrow$ reducibilis,

$\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ irreducibilis ábrázolás.

Maschke tétele: véges csoport minden komplex ábrázolása felbontható irreducibilis ábrázolások direkt összegére, sorrendtől eltekintve egyértelműen.

$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i$ irreducibilis dekompozíció

↳ multiplicitás

Generated by CamScanner from intsig.com

9 ea.
11. 15.

$G \longrightarrow GL(V) \Rightarrow D$ homomorf.

ábrázolás

- $\dim(V)$
- mi a skaldrok teste : $\mathbb{C}$ - ben egyszerűbb

fontos jellemzők

ábrázoldsok ekvivalenciája

$\left.\begin{array}{l} D_1 : G \longrightarrow GL(V) \\ D_2 : G \longrightarrow GL(V) \end{array}\right\}$ $D_1 \cong D_2$, ha $\exists$ bijektív

$A : V_1 \longrightarrow V_2$, és

$A D_1(g) = D_2(g) A \quad \forall g \in G$

Maschke - tétel : véges csop. minden ábrázoldása irreducibilisek direkt összege

Irred. ábr.: nincs nemtriv. invariáns altere

$\Downarrow$

irred. dekompozíció

$$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i$$

Schur - lemma : ha $D : G \to GL(V)$ irred, és $\exists$ $A : V \to V$ lin. op., amely minden ábrázolási operátorral felcserél ($AD(g) = D(g)A \; \forall g \in G$ esetén), akkor $A = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{C} \text{ skalár}} \cdot id_V$.

Generated by CamScanner from intsig.com

Schr.-e. mo. $\Leftrightarrow$ $\hat{H}$ diagonalizálása ev. r.-ben

$\exists$ szimm.: $A: V \to V$, $\det A = 1$ $A = A^{-1}$ unitér

szimm. $\Leftrightarrow$ időfejlődést nem befolyásolja

$$[H, A] = 0$$

egy irred. altéren belül

$$\hat{H} = \underset{w}{\lambda} \cdot id_V$$

itt degenerált a $\hat{H}$

λ az altéren a sé.

$$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i \Rightarrow V = \bigoplus_i V_i \qquad n_i \geq 1$$

ekkor $\hat{H}$ blokkdiagonalizálható

-ev. elméletben: $|\psi\rangle$ $e^{i\alpha}$ erejéig definiált csak

eddig: $D(xy) = D(x)D(y)$

akkor itt is meg kell engedni $\mathcal{L}(x,y)$ skalárszorzót $\mathcal{L}(x,y): G \times G \to \mathbb{C}$

$$D: G \to GL(V)$$

$$D(xy) = \mathcal{L}(x,y)\, D(x)\, D(y)$$

ua. <u>projektív ábrázolás</u>

$\mathcal{L}$: kociklus

megszorítások $\mathcal{L}$-ra

1.) $D(1) := id_V$

Generated by CamScanner from intsig.com

$D(x) = \alpha(x, 1) \cdot D(x)$

$\alpha(x,1) = 1$

és $\alpha(1, y) = 1$ normálási feltétel

2.) $D(x(yz)) = \alpha(x, yz) D(x) D(yz) =$

$\alpha(y, z) D(y) D(z)$

$= \alpha(x, yz) \alpha(y, z) D(x) D(y) D(z) =$

$D((xy)z) = \alpha(xy, z) D(xy) D(z) =$

$= \alpha(xy, z) \alpha(x, y) D(x) D(y) D(z)$

$\alpha(x, yz) \alpha(y, z) = \alpha(xy, z) \alpha(x, y)$

kociklus-egyenlet

projektív ábrázolások ekvivalenciakérdése

$D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$

α_1 és α_2 kociklussal.

ekvivalens, ha $\exists$ bijektív $A : V_1 \to V_2$,

hogy $\lambda(g) A D_1(g) = D_2(g) A \quad \forall g \in G$-re.

skalárfaktor (és $\lambda : G \to \mathbb{C}$)

$D : G \to GL(V)$ és $\tilde{D} : G \to GL(V)$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$x \longmapsto \lambda(x)\,D(x)$$

$$\tilde{D}(xy) = \lambda(xy)\,D(xy) = \lambda(xy)\,\alpha(x,y)\,D(x)\,D(y) =$$

$$= \underbrace{\alpha(x,y)\,\lambda(xy)}\;\frac{\tilde{D}(x)}{\lambda(x)}\;\frac{\tilde{D}(y)}{\lambda(y)}$$

D-alg. kociklusa

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\alpha}(x,y) = \alpha(x,y)\,\frac{\lambda(xy)}{\lambda(x)\,\lambda(y)}$$

kohomológok

kociklusok kohomológia-osztályai $\longleftrightarrow$ projektív ábrázolások

Csoportok többsége esetén kohomológia-osztályok véges halmazt alkotnak:

$$M(G) = H^2(G) \quad \text{Schur-multiplikátor}$$

Vegyük $\tilde{\alpha}(x,y) = \alpha_1(x,y)\,\alpha_2(x,y)$ fv.-t.
kociklusok pontonkénti szorzata kociklus.
$\tilde{\alpha}(x,y)$ kielégíti 2_1-t.

$$\Downarrow$$

α kociklusok ezzel a szorzással csoportot alkotnak (komm.).

$$\Downarrow$$

α Schur-multiplikátor is egy véges Abel-csop.

Generated by CamScanner from intsig.com

9. ea.
11. 15.

Univerzális fedőcsoport

$\hat{G}$ a G univ. fedőcsop.-ja $\hat{G}$, ha

1.) Van olyan $N \overset{?}{\lhd} Z(\hat{G})$, amelyre $N \cong H^2(G)$
abel-csop.

2.) $\hat{G}/N \cong G$

Ekkor egy-egyértelmű megfeleltetés létezik G projektív ábrázolásai, és $\hat{G}$ közönséges ábrázolásai között.

$SO(3)$ forgáscsop.: Schur-multiplikátora két-elemű, univerzális fedőcsoportja $SU(2)$.

közönséges ábrázolások : ábrázolások tenzor-szorzata

összetett rendszer állapottere az alrendszerek állapotterének tenzorszorzata

lin. terek tenzorszorzata

V lin. tér $\mathbb{C}$ felett

lin. funkcionál $\phi : V \to \mathbb{C}$

$$\phi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \phi(v_1) + \beta \phi(v_2)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; $v_1, v_2 \in V$

Generated by CamScanner from intsig.com

lin. funkcionálok tere a V duálisa, V^*

$(V^*)^* = V \qquad x \in V$

$$\tau_x : V^* \to \mathbb{C}$$
$$\phi \mapsto \phi(x)$$

⇓

Duális téren $D^v(g)\phi : V \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \phi(D(g)^{-1}x)$

$D^v(g) : V^* \to V^*$

$D^{-1}: G \to GL(V^*)$ homomorfizmus

⇓

duális v. kontragrediens ábrázolás

Bilineáris funkcionálok

$b: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ leképezések, melyek mindkét változójukban lineárisak

⇓

$B(V_1, V_2)$ bilin. funkc. összessége lin. teret alkotnak!

$V_1 \otimes V_2$ <u>tenzorszorzat</u> $= B(V_1, V_2)^*$

V_1 bázisa $\{e_1, \dots, e_m\}$

V_2 bázisa $\{f_1, \dots, f_n\}$

$e_i \otimes f_j : B(V_1, V_2) \to \mathbb{C}$

$b \mapsto b(e_i, f_j)$

Generated by CamScanner from intsig.com

$e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2$

az így definiált elemek a tenzorszorzat egy bázisát alkotják

$\Downarrow$

$\dim (V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2$

bázis számossága

$D_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ és $D_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ ábrázolások tenzorszorzata:

$$D_1 \otimes D_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$g \longmapsto (D_1 \otimes D_2)(g)$$

elég megadni, hogy

$$(D_1 \otimes D_2)(g)\, e_i \otimes f_j \overset{\text{def.}}{=} D_1(g)\, e_i \otimes D_2(g) f_j$$

Tenzorszorzat kommutatív és asszociatív művelet, amely disztributív a direkt összegre.

$$D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1$$

fizikában nem mindig teljesül! (egzotikus gerjesztések)

Generated by CamScanner from intsig.com

10. ea.
11. 22.

Tenzorszorzat:

$D_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ $\quad D_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$

$D_1 \otimes D_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2$

$\beta \longmapsto \beta(e_i, f_j)$

$(D_1 \otimes D_2)(g) : \quad e_i \otimes f_j \longmapsto D_1(g) e_i \otimes D_2(g) f_j$

$$\left[(D_1 \otimes D_2)(g)\right]^{e_\alpha \otimes f_\beta}_{e_i \otimes f_j} = \left[D_1(g)\right]^{\alpha}_{i} \left[D_2(g)\right]^{\beta}_{j}$$

mátrixok Kronecker-szorzata

Tenzorszorzat műveleti tulajdonságai:

$D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1$; $D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) = D_1 \otimes D_2 \oplus D_1 \otimes D_3$

$D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) = (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$

$1\!\!1 \otimes D \cong D \otimes 1\!\!1 \cong D$, ahol $1\!\!1 : g \longmapsto 1$ egységábrázolás

$D_1 = \bigoplus_i n_i I_i$ $\quad I_i$: irreducibilis ábrázolások

$D_2 = \bigoplus_i m_i I_i$

$$D_1 \otimes D_2 \cong \bigoplus_{ij} n_i m_j \underbrace{I_i \otimes I_j}_{\bigoplus_k N_{ij}^k I_k}$$

addd csoport fúziós együtthatói

Clebsch-Gordan-sor

Generated by CamScanner from intsig.com

tulajdonságok

c_{ij} - ben szimmetrikus

$I_i, I_j = \mathbb{1}$ - re $\quad N_{ij}^{k} = \delta_{ij}$

Adott csoport ábrázolásainak ekvivalencia-oszt.

direkt összeg és tenzorszorzat művelettel

<u>fúziós gyűrű</u> (B. - gyűrű megfelelője !)

$D: G \longrightarrow GL(V)$ ábrázolás $\quad D \otimes D : G \longrightarrow GL(V \otimes V)$

általában reducibilis !

$$\tau : \quad V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$$

$$e_i \otimes e_j \longmapsto e_j \otimes e_i$$

felcserélő operátor

$\tau^2 = id_{V \otimes V} \Rightarrow$ sajátértékek : ± 1

$$\Downarrow$$

$$V \otimes V = \underbrace{S^2 V}_{+1} \oplus \underbrace{\Lambda^2 V}_{-1} \quad \text{s. é.}$$

V szimm. négyzete

V antiszimm. négyzete

$(D \otimes D)(g) \Rightarrow (D \otimes D)(g) \circ \tau : e_i \otimes e_j \longmapsto D(g)e_j \otimes D(g)e_i$

$\tau \circ (D \otimes D)(g) : e_i \otimes e_j \longmapsto D(g)e_j \otimes D(g)e_i$

$\mathcal{I}$ $\forall$ ábr. operátorral felcserélő lin. op.

Generated by CamScanner from intsig.com

$\Rightarrow$ χ minden sajátvektorát $(D\otimes D)(g)$ ua. sajátértékű sajátvektorba transzformálja

S^2V és Λ^2V invariáns alterei $D\otimes D$ - nek

$(D\otimes D)(g)$ megszorítva az értelmezési tartományt S^2V - re, egy $S^2V \longrightarrow S^2V$ lin. op. - t fogok kapni.

Ezáltal egy $S^2D : G \to GL(S^2V)$ ábrázolást kapunk. (szimm. négyzet)

$D\otimes D = S^2D \oplus \Lambda^2D$ direkt összeg.

szimmetrizált négyzetek

Pauli - elv: két megkülönböztethetetlen alrendszerből álló összetett r. Hilbert tere az egyes alrendszerek H. - tereinek vagy a szimmetrizált, vagy az antiszimmetrikus négyzete.

↓ bozonok ↓ fermionok

$H < G$ részcsop. $D : G \to GL(V)$

$D_H : H \to GL(V)$

$x \mapsto D(x)$

Generated by CamScanner from intsig.com

Megszorítás tulajdonságai

① $k < H < G : (D_H)_k \cong D_k$

② $(D_1 \cdot D_2)_H = (D_1)_H \oplus (D_2)_H$

$(D_1 \otimes D_2)_H = (D_1)_H \otimes (D_2)_H$

$D = \bigoplus_i n_i I_i \Rightarrow (D)_H = \bigoplus_i n_i (I_i)_H$

$(I_i)_H = \bigoplus_\alpha B_i{}^\alpha E_\alpha \leftarrow H$ részcsop. α irred. ábr. - ai

nemneg. egészek multiplicitások

elágazási szabályok

<u>Invariánselmélet alaptétele</u>: ha G egy végesen generált csoport, akkor tetszőleges N egész számra $\exists$ G elemeinek olyan véges G_N részhalmaza, hogy a G csop. két n dimenziós $D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ ábrázolása akkor és csak akkor ekviv., ha

$\mathrm{Tr}\, D_1(g) = \mathrm{Tr}\, D_2(g) \quad \forall\, G \in G_N$ - re.

Ha G véges, akkor kell ábrázoldsi op. ekviv. esetén az ábr. op. spurjai megegyezzenek

injat-ia?

Generated by CamScanner from intsig.com

10. ea
11. 22.

Ábrázolási karakter: Elfáradtam.

$$D: G \to GL(V)$$
$$g \mapsto D(g)$$

$$\chi_D: G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \mathrm{Tr}\, D(g)$$
$$\Downarrow$$

Két ábrázolás akkor és csak akkor ekvív., ha a karakterek megegyeznek.

$D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$

- $(D_1 \oplus D_2)(g) = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array}\right)$ $\quad V_1 \oplus V_2$

$$\mathrm{Tr}\left[(D_1 \oplus D_2)(g)\right] = \mathrm{Tr}\, D_1(g) + \mathrm{Tr}\, D_2(g)$$

$$\underline{\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}}$$

- $(D_1 \otimes D_2)(g): e_i \otimes f_j \longmapsto D_1(g) e_i \otimes D_2(g) f_j$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\sum [D(g)]_i^{\alpha} e_\alpha \otimes \sum_\beta [D(g)]_j^{\beta} f_\beta$$

$$\sum_{\alpha,\beta} [D_1(g)]_i^{\alpha} [D(g)]_j^{\beta} e_\alpha \otimes f_\beta$$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$\mathrm{Tr}\left((D_1 \otimes D_2)(g)\right) = \sum_{i,j} [D_1(g)]^i_i \, [D_2(g)]^j_j =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(D_1(g)\right) \cdot \mathrm{Tr}\left(D_2(g)\right)$$

$$\underline{\chi_{D_1 \otimes D_2} = \chi_{D_1} \cdot \chi_{D_2}}$$

$$\chi_{D^*}(g) = \chi_D(g^{-1})$$

$$\chi_{(D_H)} = (\chi_D)_H$$

Ábrázolási karakterek tulajdonságai:

① $\chi_D(1) = \mathrm{Tr}\left(D(1)\right) = \dim D$ pozitív egész

② $\chi_D(g^h) = \mathrm{Tr}\left(D(h^{-1} g h)\right) = \mathrm{Tr}\left(D(g) D(h) D(h^{-1})\right) =$

$= \mathrm{Tr}\left(D(g) D(h h^{-1})\right) = \mathrm{Tr}\left(D(g)\right) = \chi_D(g)$

Az ábr. karakter osztályfv., egymással konjugált elemeken azonos értéket vesz föl.

Véges csoport esetén $\chi_D(g^{-1}) = \chi_D(g)^*$.

$\exists$ olyan N, hogy $g^N = 1$ $\quad D(g^N) = id \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sel.-k egységgyökök $\quad = D(g)^N \Rightarrow$

$\Rightarrow D(g^{-1})$ sel.-i ezek komplex konjugáltjai

$|\chi_D(g)| \leq \dim D$

alig tudok figyelni

Generated by CamScanner from intsig.com

11. ea.
12.06.

Karaktertábla

$$D = \bigoplus_i n_i I_i$$

$$\chi_D = \sum_i n_i \chi_i$$

	$\{1\}$	C_2	...	C_r
1	1	1	...	1
I_2	$\dim I_i$			
⋮	⋮		$\chi_i(C_j)$	
I_r	$\dim I_1$			

konj. osztályok

↑ irred. ábrázolások

véges csoportban a konj. osztályok száma megegyezik az irred. ábr. sz.-val

↑ egységelem spurja
nemneg. egész szám

pl. D_3 karaktertáblája

	$\{1\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{C, C^{-1}\}$
1	1	1	1
1^x	1	−1	1
2	2	0	−1

kiszámítás nem triv. eljárás

nitka, hogy ezek mind egész számok

Generated by CamScanner from intsig.com

de pl. szimm. csop.-ok ilyenek

($\mathcal{D}_3$ izomorf 3 elemű h. perm.):

oszlopok négyzetösszege:

6 2 3 · konj. oszt. elemsz.

állandó

$\sum |\ |^2$ · konj. oszt. számossága =

= a csoport rendje

$$\sum_i |\chi_i(C_j)|^2 \cdot |C_j| = |G|$$

két-két oszlop komplex skalárszorzata 0!

tz oszlopok „ortogonálisak" egymásra.

$$\sum_i \chi_i(C_j)\,\overline{\chi_i(C_k)} = \delta_{jk}\,\underbrace{\frac{|G|}{|C_j|}}_{|C_j| =} \ominus$$

$$|x^G| = [G : C(x)] \overset{\text{Lagr.}}{=} \frac{|G|}{|C(x)|}$$

centralizátor indexe

⊖ tetszőleges elem centralizátorának rendje

„második" ortogonalitási relációk

$$MM^+ = \text{diag}(\ )$$

Generated by CamScanner from intsig.com

11. ea.
12. 06.

első ortogonalitási relációk

sorokként nézzük a karaktertáblát

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \overline{\chi_j}(g) = \delta_{ij}$$

pl. D_3-ra

$\frac{1}{6}\left(|1|^2 \cdot 1 + |1|^2 \cdot 3 + |1|^2 \cdot 2\right) = 1$ $\quad i=1,\ j=1$-re

$\frac{1}{6}\left(1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2\right) = 0$ $\quad i=1,\ j=2$

Osztályfv.-ek:

$f: G \to \mathbb{C}$

$f(xy) = f(x)$

lin. teret alkotnak + skalárszorz. $\Rightarrow$ H.-té

f, g osztályfv.-ek skalárszorzata

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\, \bar{g}(x)$$

teljesülnek a szokásos tulajdonságok

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$$

irreducibilis ábrázolások karakterei ortonormált bázist alkotnak az osztályfv.-ek terén

Generated by CamScanner from intsig.com

$$\sum_i |\chi_i(1)|^2 = |G| = \sum_i (\dim I_i)^2$$

$\chi_i(1)$: i. ábr. dim.!

(Véges csoport esetén.) Burnside-tétel

Alapvető kérdés: irreducibilis dekompozíció

$$D = \bigoplus_i n_i I_i \qquad \chi_D = \sum_i n_i \chi_i$$

$$\langle \chi_D, \chi_j \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = n_j$$

$\Downarrow$

ismerem a karaktertáblát $\Rightarrow$

a multiplicitások könnyen kiszámolhatók

Fizikás szabályok számolása:

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}{}^k I_k$$

$$\chi_{I_i \otimes I_j} = \chi_i \chi_j = \sum_k N_{ij}{}^k \chi_k$$

$$\langle \chi_i \chi_j, \chi_k \rangle = \left\langle \sum_e N_{ij}{}^e \chi_e, \chi_k \right\rangle =$$

$$= \sum_e N_{ij}{}^e \underbrace{\langle \chi_e, \chi_k \rangle}_{\delta_{ek}} =$$

$$= N_{ij}{}^k$$

$$N_{ij}{}^k = \langle \chi_i \chi_j, \chi_k \rangle$$

Generated by CamScanner from intsig.com

Elágazási szabályok meghatározása

11. ea.
12. 06.

$H < G$; G irred. $I_1 \dots I_r$

H irred. $E_1 \dots E_q$

$$(I_i)_H = \bigoplus_\alpha B_i^\alpha E_\alpha$$

$$(\chi_i)_H = \sum_\alpha B_i^\alpha \chi_{E_\alpha}$$

$\mathrm{Tr}\, I_i(x)$

a spur nem valid. csak az értelm. tart.

$$\langle (\chi_i)_H, \chi_{E_\beta} \rangle =$$

$$= \sum_\alpha B_i^\alpha \langle \chi_{E_\alpha}, \chi_{E_\beta} \rangle = B_{i\beta}$$

$$\frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \chi_i(x) \overline{\chi_{E_\beta}}(x) = B_{i\beta}$$

Szimmetrizált négyzetek kérdése

$$D \otimes D = S^2 D \oplus \Lambda^2 D \qquad \chi_{D \otimes D} = \chi_D^2$$

$\rightsquigarrow$ két irr. alteő

szimm.

antiszimm.

$$\chi_{S^2 D} = \frac{1}{2}\left(\chi_D^2(g) + \chi_D(g^2)\right)$$

$$\chi_{\Lambda^2 D} = \frac{1}{2}\left(\chi_D^2(g) - \chi_D(g^2)\right)$$

Generated by CamScanner from intsig.com

Ábrázolási operátorok mátrixelemei általában komplex számok

két fontos részhalmaz:

racionális

valós

Mikor tudunk olyan bázist választani, hogy minden mátrixelem valós legyen?

valós ábrázolás

karaktere csak valós értékeket vehet fel

irreducibilis ábrázolások esetén

$D \otimes D^*$ ← kanonikus

általában nem irreducibilis

de mindig tartalmazza az egységábrázolást

$$\chi_{D\otimes D^*} = \chi_D(g)\cdot\chi_{D^*}(g) = |\chi_D(g)|^2$$

$$D \otimes D^* = \bigoplus_i n_i F_i$$

mekkora 1 multiplicitása?

$$\langle \chi_{D\otimes D^*} , \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} |\chi_D(x)|^2 =$$

$$= \langle \chi_D, \chi_D \rangle = 1$$

D irred. volt

Generated by CamScanner from intsig.com

11. ea.
12. 06.

Tfh. χ_D valós értékű $\Rightarrow$ χ_{D^*} is. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\chi_D = \chi_{D^*}$ $\Rightarrow$ ekvivalens $D \overset{*}{\cong} D$

$\Downarrow$

$D \otimes D$ 1 multiplicitással tartalmazza az egységelemdarabot, és ez vagy a szimmetrizáltban, vagy az antiszimmetrizáltban fordul elő.

D akkor valós, ha S^2D tartalmazza 1-et. Ellenkező esetben pszeudovalós.

$\Downarrow$

valós
pszeudovalós
komplex

Frobenius-Schur-indikátor

$$\gamma_i = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi_i(x^2) = \begin{cases} +1 & \text{valós} \\ -1 & \text{pszeudovalós} \\ 0 & \text{komplex} \end{cases}$$

$$\langle \chi_{S^2D}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left\{ \frac{1}{2} \left(\chi_D(x)^2 + \chi_D(x^2) \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{x \in G} \underbrace{\chi_D(x) \overline{\chi_{D^*}(x)}}_{\frac{1}{2} \cdot \langle \chi_D, \chi_{D^*} \rangle} + \frac{1}{2|G|} \sum_{x \in G} \chi_D(x^2) =$$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu_D = \begin{cases} 1 & 1 \in S^2 D \Rightarrow \nu_D = 1 \\ 0 & 1 \in \Lambda^2 D \Rightarrow \nu_D = -1 \end{cases}$$

konnyen számolható!

Generated by CamScanner from intsig.com