Csoport axiómák, homomorfizmus, izomorfizmus, alcsoportok, generátor rendszerek, ciklikus csop. struktúrája: (group axioms, homomorphism, isomorphism, subgroups, system of generators, structure of cyclic groups)

1. tétel

Csoport: megfelelő kétváltozós művelettel ellátott elemek halmaza
↳ csoportművelet, szorzás

⇝ kielégítő a csoporttulajdonságokat → axiómák

kétváltozós művelet: két elemhez egy jól definiált harmadik elemet rendel ugyanazon elemkészletből, melyből az első kettő is származott.

Csoport: Csoportnak nevezzük egy G halmazt, ha adva van rajta egy $*$ kétváltozós művelet, amely kielégíti

Axiómák: - asszociativitás: a, b, c csoportelemek: $(a * b) * c = a * (b * c)$
↑ csoport művelet jele

(ahol nincs asszociativitás, az a kvázicsoport)

(- kommutativitás: $ab = ba$ (?))

- egységelem létezése: 1-gyel jelöljük, kitüntetett elem $a * 1_G = 1_G * a = a$

- inverz: $\forall a$ csoportelemre $\exists\ a^{-1}$ elem, melyre $a * b = b * a = 1_G$
$x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1_G$

(inverz nélkül félcsoport)

Csoport: elemek halmaza, ellátva egy megfelelő asszociatív és egységelemes művelettel, úgy, hogy minden csoportbeli elemre létezik egy $x^{-1} \in G$, amellyel $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1_G$

Egy $\phi: G \to H$ leképezés homomorfizmus, ha művelettartó, azaz teljesül $\forall\ x, y \in G$ esetén a $\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ azonosság

Homomorfizmus ~ két csoport közötti művelettartó leképezés

G, H csoportok: $\phi: G \to H$ $\quad \phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$

$\phi(1_G) = 1_H$

csoportok összehasonlítására szolgál

$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

Ha $\phi: G \to H$ egy bijektív leképezés két csoport között, amely teljesíti a $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ relációt.

Izomorfizmus ~ bijektív homomorfizmus

két csoport, G és H izomorfak, ha létezik közöttük izomorfizmus ($\phi: G \to H$), ekkor ezt $G \cong H$-val jelöljük. Reflexív ($G \cong G$) és szimmetrikus ($H \cong G \Leftrightarrow G \cong H$) és tranzitív ($G \cong H$ és $H \cong K$ következménye: $G \cong K$)

Az izomorf csoportokat algebrailag nem lehet megkülönböztetni (csoportelmélet szempontjából azonosak)

~ G izomorf H-val ($G \cong H$) ha $\exists\ \phi: G \to H$ izomorfizmus

Automorfizmus: csoport önmagára való leképezése

~ csoport önmagával való izomorfizmusa ($\alpha: G \to G$ izomorfizmust automorfizmusnak nevezzük)

~ ezen leképezések is csoportot alkotnak ~ Aut(G)

- ez az automorfizmus csoport, ahol a művelet a leképezések kompozíciója

Csoport rendje: csoport számossága $|G|$ ~ benne levő elemek számossága

~ az izomorf csoportok rendje megegyezik a bijekció miatt

Ábel-csoport: a szorzatképzés kommutatív

Részcsoportok: Egy G csoport elemeinek egy H részhalmaza, mely maga is csoportot alkot. A származását $H<G$-vel jelöljük. A H csoport két elemének szorzata és inverzük is H-beli.

A G csoport egy nemüres H részhalmazát részcsoportnak nevezzük, jelben $H<G$, ha minden $x,y\in H$-ra teljesül $xy^{-1}\in H$

A részcsoport maga is csoport, részcsoport részcsoportja is részcsoport.

$K<H$ és $H<G \rightarrow K<G$

Egy H részhalmaz részcsoport, amennyiben csoportot alkot a csoportműveletre nézve.

~ Minden csoportnak van részcsoportja ~ önmaga és a triviális részcsoport.

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ x,y\in H \rightarrow xy\in H \\ 2,\ 1\in H \\ 3,\ x\in H \rightarrow x^{-1}\in H \end{array}\right\} x,y\in H \rightarrow xy^{-1}\in H$$

Részcsoportok metszete is részcsoport.

A részcsoportok halmaza teljes részbent/hálót alkot, azaz egy olyan részben rendezett halmazt alkot melyben minden S részcsoport halmaz rendelkezik egy infimummal ($\bigcap_{H\in S} H$ metszet) és egy supremuma (minden részcsoport metszete, tartalmazza S részcsoportjait)

$X\subseteq G$ csoportelemek részhalmaza (G-ben)

$\langle X\rangle = \bigcap_{\substack{H<G\\ X\subseteq H}} H$ Legkisebb részcsoportja G-nek, melynek X részhalmaza

~ X által generált részcsoport

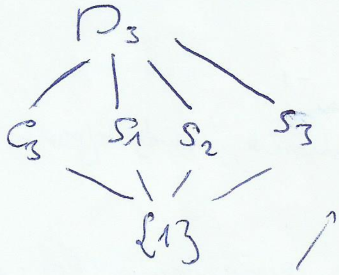
~ részcsoportok uniója általában nem részcsoport

~ H és K részcsoportja G-nek ~ $H\vee K = \langle H\cup K\rangle$

~ részcsoport háló ~ részcsoportok összessége rendezéssel

~ rendezés részcsoportok között $H,K<G$ $H<K$

D_3 részcsoport hálója:



$S_i = \{1,\sigma_i\} = \langle\sigma_i\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

$C_3 = \{1, C, C^2\} = \langle C\rangle \cong \mathbb{Z}_3$

Def: Legyen $X\subseteq G$ egy tetszőleges részhalmaz, és tekintsük G azon részcsoportjainak összességét, amelyek tartalmazzák X-et. Ezen részcsoportok metszete maga is részcsoport ...

generátorrendszerek:

$\{1\} = \langle 1\rangle$

$\{1,\sigma_1\} = \langle\sigma_1\rangle$ $\{1,\sigma_2\} = \langle\sigma_2\rangle$ $\{1,\sigma_3\} = \langle\sigma_3\rangle$

$\{1, C, C^2\} = \langle C\rangle = \langle C^2\rangle$ nem egyértelmű

$D_3 = \langle C,\sigma_1\rangle = \langle\sigma_1,\sigma_2\rangle = ..$ legalább 2 elem

~~Általános csoportok struktúrája~~:

Részcsoportok tetszőleges rendszerének metszete maga is részcsoport:

Def: Legyen $X\subseteq G$ egy tetszőleges részhalmaz, és tekintsük G azon részcsoportjainak összességét, amelyek tartalmazzák X-et. Ezen részcsoportok metszete maga is részcsoport, amelyet $\langle X\rangle$-el jelölünk és az X elemei által generált részcsoportnak nevezzük.

$$\langle X\rangle = \bigcap_{X\in H<G} H$$

Amennyiben $H=\langle X\rangle$, akkor az X halmazt a H részcsoport generátorrendszerének nevezzük.

a csoport részcsoportjainak ~~összessége~~ hálót alkot, vagyis egy olyan ~~halmazt~~ rendezett halmazt a tartalmazási relációra nézve, amelyben bármely véges zárt részhalmaznak van minimuma – a részcsoportok metszete – és maximuma – a részcsoportok uniója által generált részcsoport. Ezért lehet beszélni egy csoport részcsoporthálójáról

Ciklikus részcsoportok

olyan részcsoportok, amelyeket egyetlen elem generál, azaz $\langle x\rangle$ alakúak valamely $x\in G$-re.
Míg minden elem generál egy ciklikus részcsoportot, addig előfordulhat, hogy több elem is ugyanazon részcsoportot generálja, vagyis a képzelet nem egyértelmű.

Az $x\in G$ elem generálta $\langle x\rangle$ ciklikus részcsoport ~~elemét~~ rendjét (elemszámát) nevezzük az elem rendjének is. Ez utóbbi úgy is definiálható, mint az a legkisebb $n\in\mathbb{N}^+$, melyre $x^n=1$. Ha x véges n-ed rendű elem, akkor az általa generált részcsoport

$$\langle x\rangle = \{1, x, x^2, \dots x^{n-1}\}$$

az ~~adott~~ izomorf $\mathbb{Z}_n$-nel, az egész számok mod n additív csoportjával

Ha x rendje végtelen, akkor $\langle x\rangle$ az x elem összes egész kitevős hatványából áll és izomorf $\mathbb{Z}$-vel, az egész számok additív csoportjával. Egy csoport akkor ciklikus, ha önmagának ciklikus részcsoportja, azaz egy elemmel generálható

csoportelem hatványai: $x\in G$ rekurzív módon definiálva: $x^{n+1}=xx^n$

$x^{-3}=x^{-1}x^{-2}$, $x^{-2}=x^{-1}x^{-2}$, x^{-1} ..

a exponensek összegére $\rightsquigarrow$ $x^nx^m=x^{n+m}$

Következmény: a $\phi_x:\mathbb{Z}\to G$, $n\to x^n$ leképezés homomorfizmus minden $x\in G$ esetén,

azaz $\phi_x(m+g)=\phi_x(m)\phi_x(g)$

mivel a ciklikus ~~rész~~részcsoport (~~x~~ által generált, $\langle x\rangle$) x minden hatványát tartalmazza: $\phi_x(\mathbb{Z})=\{x^n \mid n\in\mathbb{Z}\}=\langle x\rangle$
(H ciklikus generátora)

– ha $H<G$ ciklikus, azaz $H=\langle x\rangle$ egy $x\in G$-re, akkor

- x minden hatványa különböző, $x^n\neq x^m$, $n\neq m$ esetén, mely esetben ϕ_x bijektív és H izomorf az egészek additív csoportjával $H\cong\mathbb{Z}$ vagy
- x egy hatványa az identitás lesz (legkisebb $N>0$ hogy $x^N=1_G$ az x rendje, $N\in\mathbb{N}$), melyből következik hogy ϕ_x konstans modulo N „maradékos" osztályon $\rightsquigarrow$ H izomorf a véges $\mathbb{Z}_n$ csoporttal (mod N) maradék osztályokon.

az összeadás kommutatív $\rightsquigarrow$ a ciklikus csoportok Ábel csoportok

~végesen generált Ábel csoportok meghatározhatók ~~csak~~ ciklikus csoportokból
1, ciklikus csoport rendje véges vagy megszámlálható
2, két cikl. csoport akkor izomorf, ha rendjük egyenlő. 3.

2. mellékosztály, Lagrange tétel, Normális részcsoport, Faktorcsoportok

Mellékosztályok:

Adott $H<G$, xH részhalmazait tekintjük, ahol x végigfut G elemein. Az olyan részhalmazokat nevezzük H bal oldali mellékosztályainak, vagy coset-jeinek, összességüket G/H-val jelöljük. Részcsoport def.-ből ~ a két coset vagy megegyezik, vagy diszjunkt, a cosetek G partícióját alkotják. Maga a H részcsoport is egy coset, az ún. triviális coset. H részcs. cosetek száma ~ H indexe G-ben ~ $[G:H]$-val jelölve (ez flen attól h. bal vagy jobb coseteket nézünk)

def.-ből ~ minden egyes coset számossága = H rendje $\Rightarrow$ Lagrange.-tétel

coset ~ elemek halmaza $H<G$ részhalmazból:

$$xH = \{xh \mid h\in H\}$$ valamely $x\in G$-re
$$Hx = \{hx \mid h\in H\}$$

Ha csak G nem Ábel csoport, akkor a bal és jobb oldali cosetek különbözőek

A $H<G$ normális, $H\triangleleft G$-vel jelölve, ha $\forall x\in G$ esetén $xH=Hx$.

A coset terek $G/H = \{xH \mid x\in G\}$ és $H/G = \{Hx \mid x\in G\}$ a H bal és jobb oldali cosetjeinek gyűjteménye.

Bijektív leképezés van G/H és H/G között, ezért elegendő a bal oldali cosetet vizsgálni.

Egy $H<G$ részcs. $[G:H]$ indexe a számossága a coset tereknek:

$$[G:H] = [G/H] = [H/G]$$

Poincaré-tétel: véges sok ~~kett~~ véges indexű részcsoport metszete is véges indexű

köv: véges indexű részcs.-k alhálót alkotnak a teljes részcs. hálóban.

~ a cosetek felosztják a csoportot, minden csoportelemhez egyetlen coset tartozik, és minden cosetnek azonos a számossága

Következmények: 1, $x\equiv_H y$ $x^{-1}y\in H$ ekvivalencia reláció, melynek ekvivalencia osztályai pontosan H cosetjei

2, Lagrange-tétel

3, prím rendű csoportok ciklikusak

Lagrange-tétel: Véges rendű G csoport tetszőleges $H<G$ részcsoportjára
$$|G| = |H|[G:H]$$ ~ $|H|$ osztója $|G|$-nek.

↳ köv.: minden prím rendű csoport ciklikus konjugálás: Def: Ha $x, y \in G$ akkor az $x^y := y^{-1}xy$ elemet az x elem y általi konjugáltjának nevezzük. Adott $y \in G$ esetén az $x \to x^y$ leképezés a G csoportnak egy automorfizmusát adja, az ilyen alakú leképezéseket belső automorfizmusnak nevezzük.

↳ def köv: részcsop → részcsop, $H<G$-re $H^x = \{y^x \mid y \in H\}$ is részcs.
↳ H konjugált részcs.-a

Def: Az $N<G$ részcsoportot normálisnak nevezzük, ($N \lhd G$) ha minden $x \in G$-re $N^x = N$, vagyis megegyezik minden konjugáltja

drága $N \lhd G$ ha $xN = Nx$ minden $x \in G$-re

~ mind G, mind a triviális részcsoport normális. Egy olyan csoportot, amelynek nincs más normális részcsoportja, egyszerűnek hívunk.

~ Ábel csoport → minden ~~részcs~~csoport normális. ~ véges Ábel csoport egyszerű, ha ciklikus prím renddel.
↳ ~ minden prímrendű csoport egyszerű
~ egyszerű csoportok ~ elemi építőkövek ~ általánosabb csoportok építhetők
↳ ált. tételek redukálhatók egyszerű csoportokra

Véges egyszerű csoportok:
1, a ciklikus $\mathbb{Z}_p$ csoport prím renddel
2, az alternáló csoport A_n ∀ $n>4$-re
3, a véges Lie csoportok
4, 26 sporadikus csoport

- normális csoportok metszete is normális ~ normális csoportok által alkotnak a részcsoport hálóban

- kongruenciareláció ~ általános jelentőségű algebrai fogalom
~ olyan ekvivalenciareláció, mely kompatibilis az algebrai struktúrával

$$\left.\begin{matrix} x_1 \equiv y_1 \\ x_2 \equiv y_2 \end{matrix}\right\} x_1x_2 \equiv y_1y_2$$
kong. rel.

normális részcsoport osztályai egy kongruencia ekvivalenciaosztályait alkotják, míg a normális részcsoport nem más, mint az egységelem ekvivalenciaosztálya.

~ a kongruencia osztálya az identitásnak $\{x \in G \mid x = 1_G\}$ egy normál részcsoport.

Faktor csoport:
csoport szorzás kiterjesztése $X, Y \subseteq G$ csoportelemekre
$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$
részhalmazokra történő asszociatív operáció, önmaga csak szinguletonokra létezik
cosetek szorzata ~ általában cosetek uniója
~ normális részcsoportra ~ egy coset lesz a szorzat

Köv: A normális részcsoportok cosetei ~~rész~~csoportot alkotnak (triviális coset az identitás), ez a faktorcsoport G/N $[G:N]$ renddel

Megj: Általában 2 indexű részcsoportok normálisak, és a hozzájuk tartozó faktorcsoport izomorf $\mathbb{Z}_2$-re
$(xN)(yN) = (xy)N \quad \forall x, y \in G$ és $N \lhd G$

$\overline{w_N}: G \to G/N$
$x \to x^N$ szürjektív homomorfizmus, a természetes homomorfizmus

Első izomorfizmus tétel: Ha $N \triangleleft G$ és $H < G$ akkor $N \triangleleft NH < G$ és $N \cap H \triangleleft H$
ezenfelül $H/(N \cap H) \cong NH/N$

Második ~ : Ha $K, N \triangleleft G$ akkor $N/K \triangleleft G/K$ és $(G/K)/(N/K) \cong G/N$

Korrespondenciatétel: G/N faktorcsoport ~~összes~~ részcsoportja H/N alakúak, ahol $H < G$ egy részcsoportja a G N normál részcsoportot tartalmazó csoportnak

~ A normális részcsoport hálója ~~tökéletesen~~ a G/N faktorcsoportnak teljesen meg van határozva a ~~G~~ részcsoport hálója alapján.

Általában: absztrakt csoport elmélete tulajdonságai a G/N-nek meghatározhatók G és $N \triangleleft G$ tulajdonságainak ismeretében.

8. Tétel

Homomorfizmus tétel, szabad csoport, Nielsen–Schreier tétel, csoportok ábrázolása

Homomorfizmus tétel: Legyen $\phi: G \to H$ egy homomorfizmus. Ekkor a $\ker\phi\ \{x \in G \mid \phi(x) = 1\}$ halmaz, amit a ϕ homomorfizmus magjának nevezünk, egy normális részcsoportja G-nek, $\ker\phi \triangleleft G$ és fennáll a $\phi(G) \cong G/\ker\phi$ izomorfizmus, ahol $\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ a homomorfizmus képe.

ebből a tételből azonnal következik, hogy egy csoport homomorf képei pont a faktorcsoportjai, ez indokolja ez utóbbi fogalom jelentőségét.

Homomorfizmus és korrespondenciatételek:
↳ Legyen H homomorf képe G-nek és legyen $N \triangleleft G$ a homomorfizmus magja. Ekkor egy-egyértelmű megfeleltetés van a H részcsoportjai és G azon részcsoportjai között, amelyek tartalmazzák a homomorfizmus magját és hasonló állítás érvényes a részcsoportokra is.

~ Ezek alapján a faktorcsoportok részcsoporthálója egyszerű módon származtatható a csoport részcsoporthálójából.

Szabad csoportok: Egy F csoport szabad, ha létezik szabadon generáló rendszere $(X \subseteq F)$, vagyis egy olyan halmaz, melyre minden $\phi: X \to G$ leképezés, azzal a megszorítással, hogy leképezés ugyanabba a G-be képez, az egyedi homomorfizmus $\phi^b: F \to G$

Minden X halmazra létezik egy F_X csoport, melyet X feletti szabad csoportnak nevezünk, X szabadon generáló rendszerrel és $F_X \cong F_Y$ különösen ha $|X| = |Y|$

KÖV: Minden egyes számosság értékéhez pontosan egy szabad csoport izomorfizmus tartozik, és bármely két szabadon generáló rendszere az F szabad csoportnak ugyanolyan számosságú, $rk(F)$ melyet a rangjának hívunk
(rang?)

Nielson–Schreier tétel: Szabad csoport minden részcsoportja szabad. Ha $H < F$ és F szabad, akkor $\text{rank}\, H - 1 = [F : H](\text{rank}\, F - 1)$.

Köv: N_X ~~konkretizáltkat~~ leírható egy szabad generált halmaz konkretizálásával. (határtalan véges csoportokra, amikor $\ker i^b_X$ végtelen rankú)

Normális lezárt (normal closure): Legyen G egy csoport, $X \subseteq G$. Az X részhalmaz $NC_G(X)$ normális lezárása a G legkisebb normális csoportja, amely még tartalmazza az X részhalmazt, azaz az összes X-et tartalmazó részcsoport metszete

$$NC_G(X) = \bigcap_{X \subseteq N \triangleleft G} N.$$

Def: Adott generált rendszer generátorrendszere: $X \subseteq G$, $R(G, X)$ a megfelelő relátorrészcsoport $R(G,X)$ és $R \subseteq F_X$ olyan részhalmaz, amelyre $NC_{F_X}(R) = R(G, X)$.

Ekkor az $\langle X \mid R \rangle$ párt a G csoport egy prezentációjának nevezzük, az R elemeit pedig a prezentáció relátorainak.

A $\langle X \mid R \rangle$ prezentációja G-nek egy X generátorrendszerből és egy relátorhalmazból áll fel. Ha X és R is véges, akkor G végesen prezentált.

~ Generátor- és Relátorhalmaz számossága ~~egy~~ tetszőleges lehet, de ha ez a kettő szám véges, akkor véges prezentációról beszélhetünk.

~ Egy csoport végesen prezentált, ha létezik véges prezentációja

~ Bármely csoport homomorf képe egy szabad csoportnak:

Biz: Ha $X \subseteq G$ generálja G-t, akkor a beágyazó leképezés

$$i_X : X \to G$$
$$x \to x$$

egyedi szürjektív homomorfizmussá válik: $i^b_X : F_X \to G$

~ azaz bármely G csoport megkapható faktorcsoportként F_X/N_X ahol a generátorrendszer X bármely lehet, ahol $N_X = \ker i^b_X$ (X bármely választásra)

Dehn's word problem: (szóprobléma) Adott véges $\langle X \mid R \rangle$ prezentáció G csoportban, véges lépésben eldönteni, hogy két $w_1, w_2 \in F_X$ ugyanazon coset-be tartoznak-e, mely $\bar{R}$ normális lezártjából való, azaz ugyanazon G-beli elemnek felelnek-e meg

algoritmus adása arra, hogy mikor prezentálja egy adott szó a csoport egységelemét.

Izomorfia probléma: véges lépésben eldönteni, hogy két véges prezentáció $\langle X_1 \mid R_1 \rangle$ és $\langle X_2 \mid R_2 \rangle$ ~~egyenlő~~ izomorf csoportokat felelnek-e meg, azaz $F_{X_1}/\bar{R}_1 \cong F_{X_2}/\bar{R}_2$

6. tétel

Direkt szorzat struktúrája, Frobenius – Stickelberg-tétel

Direkt szorzat:
Egy G_1 és G_2 csoport direkt szorzata $G_1 \times G_2$, melynek elemei az (x_1, x_2) rendezett párok ahol $x_1 \in G_1$ és $x_2 \in G_2$ és a komponens szerinti szorzás: ~~$x_1 y_1$~~ $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$

$G_1 \times G_2$ csoport rendje $|G_1 \times G_2| = |G_1||G_2|$ és az inverzelem $(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$

A direkt szorzat kommutatív és asszociatív (izomorfizmusig)

$$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1 \quad \text{és} \quad G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$$

Könyv:
Legyen G és H két csoport, és tekintsük alaphalmazaik Descartes szorzatát, vagyis az (x, y) alakú rendezett párok halmazát, ahol $x \in G$ és $y \in H$. Ez a halmaz csoportot alkot, a G és a H csoportok $G \times H$ direkt szorzatát, az alábbi műveletre nézve:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

Direkt sz. fontos tul.: tartalmaz két normális részcsoportot $\hat{G} = \{(x, 1) \mid x \in G\}$ -t és $\hat{H} = \{(1, y) \mid y \in H\}$-t, amelyek metszete a triviális részcsoport, együttesen generálják a direkt szorzatot, elemeik kommutálnak egymással továbbá $\hat{G} \cong G$ és $\hat{H} \cong H$.

- Ha egy csoport tartalmaz két normális ~~részcsoport~~ részcsoportot amelyek elemei kommutálnak, metszetük a triv. részcsoport és együttesen generálják a csoportot, akkor a csoport izomorf a két normális részcsoport direkt szorzatával.

Köv: Bármely csoport amely rendelkezik a fentiekkel („könyv" előttiekkel), melynek két normális részcsoportja van, izomorf ezek direkt szorzatával.

Megj: $\hat{G}_i \cong G_i$ és $(G_1 \times G_2)/\hat{G}_i \cong G_{3-i}$ $i = 1, 2$

Ábel csoportok direkt szorzata is Ábel csoport.

Frobenius – Stickelberg-tétel:

könyv.: Minden véges Ábel csoport $\overset{\text{előáll}}{\text{'}}$prímhatványszerű ciklikus csoportok direkt szorzata$\overset{\text{ként}}{\text{'}}$ és a felbontás lényegében egyértelmű

Végesen generált végtelen esetben végtelen ciklikus faktorok, melyek izomorfak $(\mathbb{Z}, +)$-al, is előfordulhatnak.

Természetes projekció (szürjektív homomorfizmus)

$$\pi_i: G_1 \times G_2 \to G_i$$
$$(x_1, x_2) \to x_i$$

Strukturális karakterizáció:

$$\hat{G}_1 = \ker(\pi_2) = \{(x_1, 1) \mid x_1 \in G_1\} \text{ and } \hat{G}_2 = \ker(\pi_1) = \{(1, x_2) \mid x_2 \in G_2\}$$

normális részcsoportjai a direkt szorzatnak, úgy, hogy

1, triviális metszetük van: $\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 = \{(1, 1)\}$

2, az elemeik páronként kommutálnak $(x_1, 1)(1, x_2) = (x_1, x_2) = (1, x_2)(x_1, 1)$

3 a teljes szorzatot generálják. $\hat{G}_1 \hat{G}_2 = G_1 \times G_2$

pl: (n,m) jelölje a legnagyobb közös osztót, $[n,m]$ a legkisebb közös többszöröst n,m egészek esetében, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{[n,m]} \times \mathbb{Z}_{(n,m)}$ és $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ relatív prímek esetén

<u>5. tétel:</u> Derivált sorok, feloldható halmazok, Jordan – Hölder tétel, konjugált osztályok

<u>Def:</u> Az $x,y \in G$ csoportelemek kommutátora az $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ csoportelem.

<u>Deriv. részcs.</u> $[x,y] = 1$ csak akkor, ha $xy = yx$ azaz ha x és y kommutál

két csoportelem akkor felcserélhető, ha kommutátoruk az egységelem

- A csoportelemek kommutátorai által generált G' részcsoportot nevezzük G kommutátor részcsoportjának (~~tag derived subgroup~~) $G' = (\langle [x,y] \mid x,y \in G \rangle)$
- Ez mindig normális részcsoport, $G' \triangleleft G$ és azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy egy G/N faktorcsoport valamely $N \triangleleft G$-re akkor és csak akkor Ábeli, ha $G' < N$, más szóval a korrespondencia-tétel értelmében G/G' a G maximális Ábeli homomorf képe.
- Egy csoport akkor és csak akkor Ábeli, ha derivált részcsoportja triviális.
- A G csoport tökéletes, ha $G' = G$

kommutátor részcsoport egy lánc első eleme ~ bevezethetjük az alábbi rekurzió alapján a <u>derivált láncot</u>: a lánc nulladik tagja maga a csoport, minden további tag az előző kommutátor részcsoportja

↳ a k-adik tagot nevezzük G k-adik derivált részcsoportjának és $G^{(k)}$-val jelöljük

$\rightarrow G_0 = G \triangleright G_1 = G_0' \triangleright G_2 = G_1' \triangleright \ldots$

az szubnormális abban az értelemben, hogy minden tag az előző tagban véve normális, $G_i \triangleleft G_{i-1}$, a G_{i-1} derivált részcsoportja.

<u>Feloldható csoport:</u> Amennyiben valamely véges k-ra $G^{(k)}$ a triviális részcsoport, akkor a G csoportot feloldhatónak nevezzük.

~ $G_n = \{1\}$ véges n lépés után.

~ ezt a fogalmat Galois vezette be

↳ fontos ~ polinom gyökei akkor fejezhetők ki gyökvonások és az alapműveletek segítségével, ha a polinom ún. Galois csoportja feloldható.

<u>Feit – Thompson – tétel</u>: Páratlan rendű csoport mindig feloldható

A G csoport részcsoportjainak egy $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \ldots \triangleright G_r = \{1\}$ sorozatát szubnormál láncnak hívjuk, ha $G_{i+1} \triangleleft G_i$ minden $i < r$ esetén.

~ A derivált lánc is szubnormál.

~ Ha teljesül, hogy G_i / G_{i+1} egyszerű csoport minden i-re, akkor a szubnormál láncot kompozícióláncnak nevezzük, a faktorcsoportokat pedig a lánc kompozíció faktorainak

~ egész számok additív csoportja ~ nincs nincs kompozícióllánca

~ minden véges csoport viszont rendelkezik kompozícióllánccal.

Jordan–Hölder-tétel: Ha egy csoportnak van kompozíciólánca, akkor bármelyik két kompozíciólánca azonos hosszúságú és kompozíciófaktoraik a sorrendtől eltekintve megegyeznek.

Konjugált osztályok:

Minden $z \in G$ a ~~...~~ $l_z: G \to G$, $x \to zxz^{-1}$ leképezés automorfizmus $l_z \in Aut(G)$, melyet belső automorfizmusnak nevezünk.

Biz: $l_z(xy) = z(xy)z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1}) = l_z(x)l_z(y)$

~~...~~ $l_y(x) = x$ ha x és y kommutálnak (és $l_x(y) = y$) azaz

$$G_Q(x) = \{y \in G \mid l_y(x) = x\}$$

és $l_y = id_G$ pontosan akkor ha $y \in Z(G)$

Egy csoportelem $x \in G$ konjugált osztálya x^G (ill. H^G) az x képeiből áll, minden belső automorfizmus esetén

$$x^G = \{l_y(x) \mid y \in G\}$$

$$H^G = \{l_y(H) \mid y \in G\}$$

A konjugált osztályok (részcsoportok) felosztják a csoportot (a részcsoport halmazát): a G csoport partícióját adják halmaz elemeivel

konjugált csoportelemek vagy diszjunktak vagy egybeesnek (egybeesnek)

triviális osztály az egységelem által alkotott konjugált osztály

Részcsoport akkor normális, ha konjugált osztályok uniója

~~Egy csoportelem~~

Abel csoport ~ minden elem egymaga alkot konjugált osztályt.

~ Egymással konjugált elemek hasonlóak ~ pl. rendjük megegyezik.

~ Egy csoportelem centrális, (egy részcsoport normális) ha ez az egyetlen eleme a konjugált osztályának.

~ Az $Inn: G \to Aut(G)$, $z \to l_z$ leképezés homomorfizmus, melynek kernelje megegyezik G $Z(G)$ centrumával

Biz: $(l_x \circ l_y)(z) = l_x(yzy^{-1}) = x(yzy^{-1})x^{-1} = (xy)z(xy)^{-1} = l_{xy}(z)$

Az $Inn(G)$ izomorf $G/Z(G)$-vel a homomorfizmus tétel alapján, normális $Aut(G)$-ben és az $Out(G) = Aut(G) \setminus Inn(G)$ faktorcsoport a G külső automorfizmusainak csoportjának nevezik.

A konjugált osztályok számossága: $|x^G| = [G : C_G(x)]$

$$|H^G| = [G : N_G(H)]$$

ahol $N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\}$ a $H < G$ normalizátora, azaz G legbővebb részcsoportja melyben H normális

6. tétel: Csoporthatások, orbitok, tranzitív dekompozíció, orbit-stabilizátor tétel, tranzitív hatások osztályozása

Csoporthatás: Egy G csoport hatása egy X strukturált halmazra (akár geometriai, algebrai) homomorfizmus, $\alpha: G \to Aut(X)$ G-ből $Aut(X)$-be. (automorfizmus csoportba)

– G hatása X-re minden $g \in G$-hez egy struktúratartó önleképezést (self map) $\alpha_g: X \to X$ olyan módon, hogy $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$

Megj: $g \in G$-re g^x jelölje $\alpha_g(x)$-et $x \in X$-re α_g alatt. Ezzel

$$g(hx) = (gh)x$$

minden $g, h \in G$ és $x \in X$-re.

pl: Bármely G csoport egy saját elemhalmazára hat, minden $s \in G$-re a (bal illetve jobb) transzlációk hatására: $\lambda_g: G \to G$, $x \to gx$ és $\varrho_g: G \to G$, $x \to xg^{-1}$

A megfelelő hatásokat bal és jobb reguláris hatásai G-nek.

~ $\alpha_0: G \to Aut(X)$ permutációs hatás — X egy véges halmaz
lineáris reprezentáció — lineáris tér
folytonos hatás
projektív reprezentáció

Megj: X egy részének lehetősége egy-egy típusú csoporthatásból egy másikba vezet. Egy hatás, $\alpha: G \to Aut(X)$ (bármilyen típusú) felfogható, mint egy olyan az X strukturálatlan halmazon

A $\alpha: G \to Aut(X)$ és $\beta: G \to Aut(Y)$ hatások ekvivalensek, ha létezik bijektív leképezés $\mu: X \to Y$ úgy, hogy $\mu \circ \alpha_g = \beta_g \circ \mu$ minden $g \in G$-re. (ezen leképezést ekvivariánsnak is nevezzük)

~ le lehet bontani a csoporthatásokat egyszerűbbekre
adott hatás: $\alpha: G \to Aut(X)$ G X-en, $Y \subseteq X$ részhalmaz stabil, ha $\alpha_g(Y) \subseteq Y$ minden $g \in G$

~ minden stabil részhalmazon $Y \subseteq X$ az $\alpha: G \to Aut(X)$ hatás egy $\alpha^Y: G \to Aut(Y)$ hatást indukál, minden α_g Y részhalmazra történő szorításával

Orbit: Legyen adva a G csoportnak egy hatása X halmazon, és legyen $x \in X$. Az x pont pályájának (orbitjának) nevezzük a

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

részhalmazát X-nek. Két különböző pont pályája vagy megegyezik, vagy diszjunkt, ezzel a pályák egy partícióját adják X-nek. Amennyiben X egyetlen pályából áll, X-et tranzitívnak nevezzük.
↳ bármely pont megkapható bármelyikből a megfelelő csoportelemmel

~ az orbit a minimális nem-üres stabil halmaz (olyan melynek egyetlen nem-üres stabil részhalmaza önmaga)

~ ugyanazon orbithoz való tartozás ~ ekvivalencia reláció.

$x, y \in X$ ugyanazon orbithoz tartoznak, ha $y = gx$ egy $g \in G$-re.

Diszjunkt halmazokon ~~adott~~ (X, Y) ~~adott~~ $\alpha: G \to Aut(X)$ és $\beta: G \to Aut(Y)$ hatások, az összegük $\alpha \oplus \beta$ G hatása $X \cup Y$-on úgy, hogy $(\alpha \oplus \beta)_g: x \to \begin{cases} \alpha_g(x) & \text{ha } x \in X \\ \beta_g(x) & \text{ha } x \in Y \end{cases}$

Az összeg ekvivalenciaosztálya az összeadandók ekvivalenciaosztályaiból határozható meg

~ Az összeg kommutatív és asszociatív operáció az ekvivalencia osztályokban

$$\alpha \oplus \beta \cong \beta \oplus \alpha \quad \text{és} \quad (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma \cong \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$$

de nincs egységelem.

Tranzitív felbontás: Bármely hatás ekvivalens tranzitív hatások összegével.

$$\alpha = \bigoplus_i n_i \tau_i$$

ahol τ_i jelöli a nem ekvivalens tranzitív hatásait G-nek és n_i-k a nem-negatív egész együtthatók.

A tranzitív ~~h~~hatások egyszerűek ~ atomi építőkövei a strukturált halmazoknak.

~ a hatások osztályozása redukálható a tranzitív hatások osztályozására

$g \in G$ csoportelem fixpont-halmaza $Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$

$x \in X$ stabilizátora a $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ részcsoport.

~ ugyanazon orbit pontjainak stabilizátorai konjugáltak $G_{gx} = g G_x g^{-1}$

Orbit - stabilizátor - tétel: Legyen adva a G csoportnak egy hatása az X halmazon és legyen $x \in X$. Ekkor az x pont Gx orbitján G tranzitívan hat és ez a hatás ekvivalens a G/G_x halmazon a fentiekben definiált hatással, többek között $|Gx| = [G : G_x]$. Következésképp a tranzitív hatás foka osztja a csoport rendjét.

fontos köv: osztályozhatjuk egy rögzített G csoport összes tranzitív hatását, hiszen ezek egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a csoport véges indexű részcsoportjainak konjugált osztályaival. Viszont ezáltal az összes hatás osztályozható, mert tetszőleges hatás előáll tranzitív hatásokból.

Köv.: Legyen X, Y két diszjunkt véges halmaz, és legyen adva G csoportnak két, $\Phi : G \to Aut(X)$ és $\Psi : G \to Aut(Y)$ hatása. Ekkor létezik az $X \cup Y$ halmazon egy ekvivalencia erejéig egyértelmű $\Phi \oplus \Psi : G \to Aut(X \cup Y)$ összeghatás ahol

$$\Phi \oplus \Psi(g) : x \to \begin{cases} \Phi(g)x & \text{ha } x \in X \\ \Psi(g)x & \text{ha } x \in Y \end{cases}$$

~ tetszőleges hatás felbomlik az egyes pályákon értelmezett tranzitív hatások összegére

→ elegendő a tranzitív hatások ismerete az osztályozáshoz

O-S tétel ~ bármely $x \in X$ a $\Phi_x : G/G_x \to Gx$, $gG_x \to gx$ leképezés egy-egyértelmű megfeleltetést biztosít a G_x stabilizátor bal oldali cosetjei és az orbit pontjai között $Gx \subseteq X$

$$|Gx| = [G : G_x]$$

minden tranzitív ~~dicső~~ hatás ekvivalens egy coset hatással

Bijektív megfeleltetés a konjugált osztályai és a tranzitív osztályok ekvivalenciaosztályai között.
részcsoportok

~~2. Gyo~~ 7. tétel Csoport ábrázolások, invariáns ~~altér~~ terek, irreducibilitás, Schur lemma

A G csoport lineáris ábrázolása egy $D: G \to GL(V)$ homomorfizmus, ahol V egy lineáris tér. Az ábrázolás $\dim D$ dimenziója a V lineáris tér dimenziója. Az ábrázolás magja a D homomorfizmus magja, és az ábrázolás hű, amennyiben magja triviális.

~ jelölje V a lineáris teret, F pedig a skalár teret. Az általános lineáris ~~tér~~ csoport (general linear) $GL(V) = \{A : V \to V \mid \det A \neq 0\}$

V felett tartalmazza az összes invertálható operátort V-ről, az operátorszorzással.

Ha V nem véges dimenziós (n) akkor minden $B = \{e_1 \dots e_n\}$ bázisválasztáshoz létezik egy $T_B : GL(V) \to GL_n(F)$ izomorfizmus. $A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} T_B(A)_{ij} e_j$

Ha $B' = \{e_1' \dots e_n'\}$ egy másik bázisa V-nek, akkor $T_{B'}(A) = C^{-1} T_B(A) C$

ahol $e_i' = \sum_j C_{ij} e_j$

Egy $W \subseteq V$ részhalmaza a V lineáris térnek (F skalármezővel) egy lineáris ~~altér~~ altér ha $x+y \in W$ és $\alpha x \in W$ ha $x, y \in W$ és $\alpha \in F$. A $W \subseteq V$ altér (lineáris) nemtriviális ha különbözik a zéró altértől és a teljes altértől, azaz $0 < \dim W < \dim V$

A $W \subseteq V$ lineáris altér $x + W = \{x + y \mid y \in W\}$ ($x \in V$) transzlációi lineáris teret alkotnak, a V/W faktortere, összeadással és szorzással a következő módon definiálva:

$$(x+W) + (y+W) = (x+y) + W$$
$$\alpha(x+W) = \alpha x + W \qquad x, y \in V \text{ és } \alpha \in F$$

Akármilyen B_W ~~[illegible]~~ bázist ($W \subseteq V$ lineáris altérbeli) kiegészíthető egy $B_V \supseteq B_W$ bázissá (a gész téré) és ~~minden~~ minden különböző térbeli elem (B_V / B_W) a faktor-tér egy bázisvektorának felel meg.

Köv: $\dim (V/W) = \dim V - \dim W$

Invariáns altér: Egy $W \subseteq V$ lineáris altér invariáns altere a $G \subset GL(V)$ lineáris csoportnak, ha minden csoportelem önmagába képzi le, azaz $gx \in W$ minden $g \in G$ és $x \in W$-re.

~ A nulla és a teljes altér mindig invariánsak.

Adott $W \subseteq V$ invariáns altér ($G < GL(W)$ belü) a ~~megszorítása~~

$$g_W : W \to W$$
$$x \to gx \qquad \text{megszorítása}$$

a W csoportelemeinek és a faktorvált operátoraiknak

$$g/W : V/W \to V/W$$
$$x + W \to gx + W$$

jól definiált lin op.-ok, lineáris csoportokat alkotnak a redukciója $G_W = \{g_W \mid g \in G\} < GL(W)$

és a faktorát $G/W = \{g/W \mid g \in G\} < GL(V/W)$

a G lineáris csoportnak.

A delt B_W bázis W-n, és B_V tetszőleges kiegészítése (kiegészítése) V-re, a reprezentálás mátrixai:

$$T_{B_V}(g) = \begin{pmatrix} T_{B_W}(g) & T(g) \\ 0 & T_{B_V/B_W}(g) \end{pmatrix}$$

olyan $T(g)$-re mely kielégíti a $T(gh) = T_{B_W}(g)\,T(h) + T(g)\,T_{B_V/B_W}(h)$ egyenletet minden g és $h \in G$ esetére (felső Δ mátrixok)

Irreduc:
Egy lineáris csoport reducibilis, ha van nemtriviális invariáns altere, máskülönben irreducibilis.

Schur lemma: Bármely operátor mely kommutál egy irreducibilis lineáris csoport elemeivel, többszöröse az identitás operátornak.

Unitér operátor: U a Hilbert téren, lineáris operátor mely megtartja a belső szorzatot

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x,y \in H$$

Antiunitér az az operátor, mely antilineáris:

$$A(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} Ax + \bar{\beta} Ay \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C} \text{ és } x,y \in H$$

és kielégíti az $\langle Ax, Ay\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

unitér operátorok szorzata szintúgy unitér lesz.
| $\to$ csoportot alkotnak $U(H)$
diagonalizálhatók a komplex egységgömbre $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$

antiunitér operátorok szorzata unitér, és bármely lehető egy unitér op.-ban tér el.
$\sim$ antiunitér op.-ok $U(H)$ egy cosetjét alkotják

Lin. repr. újra: A reprezentáció képe minden lineáris csoport, mely pontosan akkor izomorf G-vel, ha a reprezentáció hű.

A skalártest és a D dimenziója megegyezik a V reprezentációs térével $\sim$ $\dim D = \dim V$.

Minden V-beli $B = \{e_1 \dots e_n\}$ bázisválasztásra a lineáris reprezentáció $D: G \to GL(V)$ meghatároz egy n-edrendű mtx. reprezentációt $D_B: G \to GL_n(\mathbb{F})$ a $D_B = T_B \circ D$ szabályon keresztül ahol $T_B: GL(V) \to GL_n(\mathbb{F})$ a B-hez asszociált izomorfizmus

Pl: 1, Bármely G csoportra és V lineáris térre az

$$1_V: \begin{aligned} G &\to GL(V) \\ g &\to \mathrm{id}_V \end{aligned}$$

leképezés a G V feletti triviális reprezentációja

2, Egy G lineáris csoportra $G < GL(V)$ a kanonikus leképezés (inclusion map)

$$D_G: \begin{aligned} G &\to GL(V) \\ g &\to g \end{aligned}$$

g egy reprezentációja, a definiáló reprezentáció

A G Hilbert téren történő unitér reprezentációja homomorfizmus: $U: G \to U(H)$ az unitér operátorok halmazába, azaz egy lineáris reprezentáció, amelyben minden reprezentáló operátor unitér, így

$$\langle U(g)x, U(g)y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \text{ és } g \in G$$

Az unitérizálható reprezentáció $D: G \to GL(V)$ olyan, melyhez létezik pozitív definit skalárszorzat V-n, melyre minden ábrázoló operátor unitér.

~ a véges és kompakt csoportok minden reprezentációja unitérizálható.

A $D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$ reprezentációk (lineárisan) ekvivalensek, $D_1 \simeq D_2$-vel jelölve, ha létezik invertálható lineáris leképezés $A: V_1 \to V_2$ úgy, hogy

$D_2(g)A = AD_1(g)$ minden $g \in G$-re.

Lineáris ekvivalencia reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
↳ az ilyen reprezentációk praktikusan egy formák.

A $D: G \to GL(V)$ ábrázolás irreducibilis, ha képe reducibilis lineáris csoport, máskülönben irreducibilis.

~ az 1D-s ábrázolások mindig irreducibilisek

~ A Wigner tétel alapján, mivel a kvantumos rendszerek szimmetriái a mennyiségek és a Hamilton kommutátorára vezethetők vissza, ezért az energiaszintek degenerációja ~~Schur lemmájára vezethető vissza.~~ ~~Következik szimmetriákra vezethető vissza.~~
tükrözi a szimmetriák Schur lemmája alapján.

Lényeg:
~ Ábrázoláshoz: D lin. ábr. $\forall g \in G$ csoportelemhez hozzárendelve V lin. tér egy $D(g)$ invertálható op.-át úgy, hogy

1, $D(1) = I$ a V téren ható identitás op.

2, $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$ $\forall g \in G$

3, $D(gh) = D(g)D(h)$ $\forall g, h \in G$-re ahol a jobb oldalon a megfelelő lin. op.-ok szorzata áll.

Minden csoportnak van ún. egységábrázolása, amikor V dimenziója 1 és minden cs.elemhez az egységop.-t rendeljük. Amennyiben D egy ábrázolás a V-n és $A \in GL(V)$ egy invertálható op., akkor $\tilde{D}(g) = A^{-1}D(g)A$ szintén ábrázolást definiál
~ az így kapott ~~másik~~ ábrázolásokat D-vel ekvivalensnek nevezzük.

Def: Egy $D: G \to GL(V)$ ábrázolást reducibilisnek nevezünk, ha létezik invariáns altere, vagyis olyan $U < V$ lin. altér, amelyet minden ábrázoló op. önmagába képez. Ellenkező esetben az ábrázolás irreducibilis. ~ Teljesen ~~irreducibilis~~ reducibilis, ha előáll irreducibilis ábrázolások direkt összegeként ~ reducib. akkor, ha alkalmas bázisban az ábrázoló op.-k alakja

$$\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ C(g) & D(g) \end{pmatrix}$$

Schur lemma: A G csoportnak egy $D: G \to GL(V)$ ábrázolása akkor és csak akkor reducibilis, ha $\forall A: V \to V$ lineáris operátor amely felcserélhető az összes ábrázoló op.-al, azaz $AD(g) = D(g)A$ ~ $A = \lambda I$ alakban áll elő.

8. tétel Ábrázolások direkt összege, Maschke és Peter–Weyl tételek, elágazási szabályok

Def: Direkt összeg: Legyen $D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ két ábrázolása a G csoportnak. A $D_1 \oplus D_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ direkt összegük

$$(D_1 \oplus D_2)(g) = D_1(g) \oplus D_2(g)$$

ahol a jobb oldalon a megfelelő lin. operátorok direkt összege áll. Az ábrázolási operátorok mátrixainak egyszerűsítésével a direkt összeg az alábbi blokk diagonális mtx.: $(D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$

A lineáris operátorok direkt összegének tulajdonságaiból ~~követ.~~ következik, hogy az ábrázolások direkt összege kommutatív és asszociatív, de nincs egységeleme. ~~Különösen jelentősek azok az ábrázolások, amelyek nem állnak elő két ábrázolás direkt összegeként, ezekkel kapcsolatosak az alábbi fogalmak.~~

~ A rendezett párok $D_1 \oplus D_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}$ halmaza lineáris teret alkot a

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

komponensenkénti műveletekkel, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V_{1,2}$, $\lambda \in \mathbb{F}$

ha B_0 jelöli a bázist V_0-ban, akkor $V_1 \oplus V_2$ bázisa:

$$B_1 \oplus B_2 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in B_1\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \in B_2\}$$

így $\dim(D_1 \oplus D_2) = \dim D_1 + \dim D_2$ (a dimenziók adódnak)

$A_1 : V_1 \to W_1$ $\in GL(V_1)$ és $A_2 : V_2 \to W_2$ $\in GL(V_2)$ lin. operátorok direkt összege

$$A_1 \oplus A_2 : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$$

$$(x_1; x_2) \to (A_1 x_1, A_2 x_2)$$

Az $A_1 \oplus A_2$ mátrixa a $B_1 \oplus B_2$ ~~mtx~~ bázisra nézve blokkdiagonális. (fenti alak)

Adott reprezentációk: $D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ a leképezés

$$D_1 \oplus D_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$$

$$g \to D_1(g) \oplus D_2(g)$$

Direkt összeg ekvivalenciaosztálya csak az összeadandók ekvivalenciaosztályától függ, dimenziója a dimenziók összege, továbbá

$$D_1 \oplus D_2 \cong D_2 \oplus D_1$$

$$D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$$

Teljesen reducibilis ábrázolás ~ előáll irreducibilisek direkt összegeként

~ Pl.: minden triviális ábrázolás teljesen reducibilis, mert felbontható 1D-s triviális ábrázolások direkt összegére.

A $V_1 = \{(x_1 = 0) \mid x_1 \in V_1\}$ és $V_2 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in V_2\}$ alterek invariáns alterei $D_1 \oplus D_2$-nek, a $(D_1 \oplus D_2) \simeq D_V$ redukciónál

Minden teljesen reducibilis reprezentációnak ($D: G \to GL(V)$) van egy irreducibilis dekompozíciója: $D = \bigoplus_{i \in Irr} n_i\, i$

ahol $n_i \in \mathbb{Z}_+$ az $i \in Irr(G)$ irreducibilis ábrázolás multiplicitása.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_+$ értékű fv.-ek $Irr(G)$-n $\leftrightarrow$ teljesen reducibilis ábrázolások

Minden unitér (unitarizálható) ábrázolás teljesen reducibilis

Maschke-tétel: Egy G véges csoport minden (komplex) ábrázolása teljesen reducibilis

$\sim$ Ha minden ábrázolás teljesen reducibilis, ~~akkor~~ az irreducibilis ábrázolások pont azok, amelyek nem állnak elő két ábrázolás direkt összegeként.

Peter-Weyl-tétel: Kompakt Lie-csoport minden ábrázolása teljesen reducibilis.

Elágazási szabályok: $D: G \to GL(V)$ ábrázolás megszorítása egy $H < G$ részcsoportra a

$$res_H D : H \to GL(V)$$
$$h \to D(h)$$ ábrázolása a H részcsoportnak.

A megszorítás tranzitív, azaz $K < H < G$ esetén

$$res_K(res_H D) = res_K D$$

és kompatibilis a direkt összeg és a tenzorszorzat művelettel

$$res_H(D_1 \oplus D_2) = res_H D_1 \oplus res_H D_2$$
$$res_H(D_1 \otimes D_2) = res_H D_1 \otimes res_H D_2$$

Teljesen reducibilis ábrázolások esetén elegendő az irreducibilis komponensek megszorítását ismerni.

$\sim$ $i \in Irr(G)$ irreducibilisek $res_H i$ megszorításainak tranzitív dekompozíciója (ha létezik, pl. ha H véges) $\quad res_H i = \bigoplus_{p \in Irr(H)} B_i^p\, p$

B_i^p nemnegatív egész multiplicitások

Véges csoportok, illetve kompakt Lie-csoportok esetén elágazási szabályok teljes mértékben jellemzik a megszorítást

Könyv: Ha adva van egy $D: G \to GL(V)$ ábrázolás és egy $H < G$ részcsoport, akkor az ábrázolás megszorítása H részcsoportra megint csak homomorfizmus, vagyis a H részcsoport egy ábrázolása lesz. Megszorítás $\sim$ direkt összeg illetve tenzorszorzat megszorítása is direkt összeg ill. tenzorszorzat lesz (a megszorítások összege ill. szorzata) $\sim$ az egyes tényezők megszorításainak...

$\sim$ ezért elegendő az irreducibilis ábrázolások megszorításait ismerni

$-$ elágazási szabályok $\sim$ tetszőleges ábrázolás megszorításának meghatározása

$\sim$ ez fontos például alkalmazásokban a szimmetriasértés jelenségének tárgyalásakor.

9. tétel: Ábrázolások karakterei, ortogonalitási reláció, Burnside-tétel, irreducibilis elemek.

Ábrázolás karakterei:

ism: Ábrázolás: A G csoport (lineáris) ábrázolása egy $D: G \to GL(V)$ homomorfizmus, ahol V egy lineáris tér. Az ábrázolás dimenziója a V lineáris tér dimenziója. Az ábrázolás magja a D homomorfizmus magja és az ábrázolás hű, amennyiben magja triviális

avagy

G csoport ábrázolása a V lineáris téren egy $D: G \to GL(V)$ homomorfizmus G-ből a V összes lineáris operátorából álló $GL(V) = \{A: V \to V \mid \det A \neq 0\}$ általános lineáris csoportba.

Skalárok teste az ábrázolás alapteste (komplexekké, ha $\neq \mathbb{C}$) V dimenziója az ábrázolás dimenziója.

Invariánselmélet alaptétele: egy G végesen generált csoport esetén minden n pozitív egészre létezik a G elemeinek egy olyan véges G_n halmaza, hogy az n dimenziós $D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$ ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha a G_n-be tartozó elemek ábrázolási operátorainak nyomai megegyeznek, azaz minden $g \in G_n$-re

$$Tr(D_1(g)) = Tr(D_2(g))$$

G_n megadása nem egyértelmű, és csak kivételes esetekben ismert, de véges G esetén minden n-re választható $G_n = G$

köv:

Legyen G egy végesen generált csoport és n pozitív egész szám. Ekkor létezik G elemeinek egy olyan G_n véges részhalmaza hogy a csoport két n dimenziós ábrázolása akkor és csak akkor ekvivalens, ha a G_n-beli elemekhez rendelt ábrázolási operátorok spurjai megegyeznek a két ábrázolásban

Frobenius-féle megfogalmazás:

Def: Egy G véges csoport $D: G \to GL(V)$ ábrázolásának $\chi_D: G \to \mathbb{C}$ karaktere

$$\chi_D(g) = Tr(D(g))$$

$\chi_D(1) = \dim V$ éppen az ábrázolás dimenziója

~ két ábrázolás csak akkor ekvivalens, ha karaktereik megegyeznek

Ekvivalenciaosztály (egyértelmű) numerikus jellemzése

~ karakter másik fontos tulajdonsága, hogy $\chi_D(g^h) = \chi_D(g) \quad \forall h \in G$

mert ~ homomorfizmussal eredően

$$Tr(D(g^h)) = Tr(D(h^{-1})D(g)D(h)) = Tr(D(hh^{-1})D(g)) = Tr(D(g))$$

más szóval a karakter osztályfüggvény, vagyis konstans G konjugált osztályain.

Kontragrediens karaktere: $\chi_{D^\vee}(g) = \chi_D(g^{-1})$

Direkt összeg és tenzorszorzat karaktere:

$$\chi_{D_1 \oplus D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g)$$

$$\chi_{D_1 \otimes D_2}(g) = \chi_{D_1}(g)\,\chi_{D_2}(g)$$

ábrázolás karakterek az irreducibilisek nemnegatív egész együtthatós kombinációja

$$D = \bigoplus_{i \in Irr(G)} n_i\, i \quad \text{karaktere} \quad \chi_D = \sum_{i \in Irr(G)} n_i \chi_i$$

$$\chi_D(g^{-1}) = \overline{\chi_D(g)}$$

$$|\chi_D(g)| \leq \chi_D(1) = \dim D$$

$D_1 \ldots D_r$ a G véges csoport inekvivalens irreducibilis ábrázolásainak összessége, χ_i jelölő D_i karakterét ~ irreducibilis karakter

↳ ezek száma megegyezik a csoport konjugált osztályainak r számával

↳ bázist alkotnak az osztály fv.-ek terében

→ az ábrázolás karakterek pont azok az osztály fv.-ek, melyek előállíthatók az irreducibilis karakterek nemnegatív egész eh.-s lin. komb.-ként.

~ szokás egy adott G csoport irreducibilis elemeit egybegyűjteni ún. karaktertáblájába

~ $r \times r$-es táblázat, sorait G irreducibilis karaktereivel indexelik, oszlopai G konjugált osztályainak felelnek meg

<u>Burnside-tétel</u>: Az irreducibilis ábrázolás dimenzióinak négyzetösszege megegyezik a csoport rendjével, azaz $\sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2 = |G|$.

Osztály fv.-ek skalárszorzata: $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}$

<u>Ortogonalitási reláció</u>: $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}$

köv: 1, Irreducibilis karakterek ONB-t alkotnak az osztály fv.-ek terében

~ inekvivalens irreducibilisek száma = konjugált osztályok száma

2, Irreducibilis dekompozíció: $D = \bigoplus_{i \in Irr(G)} n_i\, i$ irreducibilis felbontásban szereplő multiplicitások

$$n_i = \langle \chi_D, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_D(g) \overline{\chi_i(g)}$$

Általánosított ortogonalitás: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \chi_j(g^{-1}h) = \delta_{ij} \frac{\chi_j(h)}{\chi_j(1)}$

Következmény: $P_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, D(g)$

operátorok ortogonális projektorok $P_i P_j = P_j \delta_{ij}$

$P_i V \subseteq V$ homogén invariáns altér, azaz minden irreducibilis komponense ekvivalens i-vel

<u>Másodfajú ortogonalitás</u>: $\frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{i \in Irr(G)} \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } g \text{ és } h \text{ egymás konjugáltja} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

↳ köv. ~ Burnside-tétel

Fúziós együtthatók: $N_{ij}^{p} = \langle \chi_{i\otimes j}, \chi_p \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_i(g)\,\chi_j(g)\,\overline{\chi_p(g)}$

Véges csoport karaktertáblája:

	$C_1=\{1\}$	...	C_j	...
1	$\chi_1(1)=1$	...	1	...
⋮	⋮	...	...	...
i	$\chi_i(1)=\dim i$	...	$\chi_i(C_j)$	...
⋮	⋮	...	...	

első sor ⇝ egységábrázolás
első oszlop ⇝ dimenziók oszlopa
Oszlopok ortogonálisak,
sorok súlyozva ortonormáltak

O_3 karaktertáblája

	$C_1=\{1\}$	$C_2=\{c,c^{-1}\}$	$C_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$
1	1	1	1
1^*	1	1	-1
2	2	-1	0

O_3 fúziós szabályai

	1	1^*	2
1	1	1^*	2
1^*	1^*	1	2
2	2	2	$1\oplus 1^*\oplus 2$

Galois-kapcsolat: G normál részcsoportjai és $Irr(G)$ részhalmazai

egy $I \subseteq Irr(G)$ részhalmaznak az

$$\mathcal{R}(I) = \bigcap_{i\in I} \{x\in G \mid \chi_i(x)=\chi_i(1)\} \triangleleft G$$

normális részcsoport, míg egy $N \triangleleft G$ normális részcsoportnak

az $\mathcal{I}(N) = \{i \in Irr(G) \mid \ker i < N\} = \{i\in Irr(G) \mid \chi_i(x)=\chi_i(1)\ \forall x\in N\}$

részhalmaz felel meg.

$G' = \{x\in G \mid \chi_i(x)=1 \text{ ha } \dim i = 1\}$ derivált részcsoport

$Z(G) = \{x \in G \mid |\chi_i(x)| = \chi_i(1)\}$ centrum

Irreduc. dekompozíció: Minden teljesen reducibilis reprezentációnak ($D: G\to GL(V)$) van egy irreducibilis dekompozíciója: $D = \bigoplus_{i\in Irr(G)} n_i\, i$

$n_i \in \mathbb{Z}_+$ az $i \in Irr(G)$ irreducibilis ábrázolás multiplicitása

10. Előadás

Ábrázolások tenzorszorzata, fúziós szabályok, szimmetrizált négyzetek, Frobenius-Schur indikátor

Tenzorszorzat:

Egy bilineáris funkcionál a V_1 és V_2 lineáris tereken (közös $\mathbb{F}$ skalártest) egy olyan leképezés, mely mindkét változójában külön-külön lineáris ($b: V_1\times V_2 \to \mathbb{F}$)

$$b(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2) = \alpha\, b(x_1,x_2) + \beta\, b(y_1,x_1)$$

$$b(x_1, \alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha\, b(x_1,x_2) + \beta\, b(x_1,y_2)$$

$\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{F}$ és $x_i, y_i \in V_i$ $(i=1,2)$

A $\mathcal{B}(V_1,V_2)$ halmaz a bilineáris funkcionálok tere a pontonkénti műveletekkel

$$b_1+b_2 : V_1\times V_2 \to \mathbb{F}$$
$$(v,w)\to b_1(v,w)+b_2(v,w)$$

és
$$\lambda b : V_1\times V_2\to \mathbb{F}$$
$$(v,w)\to \lambda b(v,w)$$

$\lambda\in\mathbb{F}$ és $b_1,b_2\in\mathcal{B}(V_1,V_2)$

A diadikus szorzat $v_1\otimes v_2$ $v_1\in V_1$ és $v_2\in V_2$ esetén a

$$v_1\otimes v_2 : \mathcal{B}(V_1,V_2)\to\mathbb{F}$$
$$b\to b(v_1,v_2) \quad \text{lineáris funkcionál}$$

A diadikus szorzat kifeszítő a ~~...~~ bilineáris funkcionálok terének duálisát, melyet a tenzorszorzatnak nevezünk, $V_1\otimes V_2$-vel jelöljük, V_1 és V_2 lin. terekre

$$V_1\otimes V_2 = \mathcal{B}(V_1,V_2)^\vee$$

~~{ $v_1\in V_1$ és $v_2\in V_2$ ~ vektorok diadikus (tenzor-) szorzata~~

~~$v_1\otimes v_2 : \mathcal{B}(V_1,V_2)\to\mathbb{C}$~~

adott B_i bázis V_i $(i=1,2)$-n, az ~~...~~ $\{e\otimes f \mid e\in B_1, f\in B_2\}$ halmaz a diadikus szorzatoknak egy bázis, mégpedig a tenzorszorzat bázisa, $V_1\otimes V_2$-é

Köv: $\dim(V_1\otimes V_2)=\dim V_1 \dim V_2$

Megj: Általában $V_1\otimes V_2$ minden eleme lineárkombinációja a diadikus szorzatoknak, addig dl magukat nem mondj azok.

Lin. operátor tenzorszorzata: $A_1 : V_1\to W_1$ és $A_2: V_2\to W_2$ ezek lin. operátor, mely

$A_1\otimes A_2 : V_1\otimes V_2 \to W_1\otimes W_2$ és a diadikus szorzatot $(v_1\otimes v_2)$ az

$A_1v_1\otimes A_2v_2$-be képez (jól definiált, mert a diadikus szorzat kifeszítő a tenzorszorzat terét)

Adott $A_i\in GL(V_i)$ op.-ok és B_i V_i $(i=1,2)$ bázisok a tenzorszorzat mátrixa $A_1\otimes A_2\in GL(V_1\otimes V_2)$ a ~~bázis~~ szorzatbázisra (figyelemmel $\{e\otimes f \mid e\in B_1, f\in B_2\}$ a

Kronecker-szorzata a mátrixoknak $\left(T_{B_1}(A_1)\text{ és } T_{B_2}(A_2)\right)$ a következő mátrixelemekkel

$$\left[T_{B_1}(A_1)\times T_{B_2}(A_2)\right]_{(ip)(jq)} = \left[T_{B_1}(A_1)\right]_{ij}\left[T_{B_2}(A_2)\right]_{pq}$$

A tenzorszorzat nyoma: $\mathrm{Tr}(A_1\otimes A_2)=\mathrm{Tr}(A_1)\,\mathrm{Tr}(A_2)$

$D_1 : G\to GL(V_1)$ és $D_2 : G\to GL(V_2)$ ábrázolások tenzorszorzata:

$$D_1\otimes D_2 : G\to GL(V_1\otimes V_2)$$
$$g\to D_1(g)\otimes D_2(g)$$

A tenzorszorzat kompatibilis a lineáris ekvivalenciával, azaz a szorzat osztálya a faktorjainak osztályaiból határozható meg.

Továbbá kommutatív: $D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1$ és $D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$

és disztributív a direkt összegre nézve:

$$D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \oplus (D_1 \otimes D_3)$$

Tenzorszorzat egységeleme az $1\!\!1$ egység ábrázolás (egydimenziós triviális ábrázolás)

$$1\!\!1 \otimes D \cong D \otimes 1\!\!1 \cong D$$

két irreducibilis tenzorszorzata legfeljebb egyszer tartalmazza az egység ábrázolást (amikor egymás kontragradiensei)

$$N_{1ij}^{\ } = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = i^{\vee} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Fúziós gyűrű: ábrázolások ekvivalenciaosztályon direkt összeg és tenzorszorzat műveletekkel (valójában nem is gyűrű, mivel az ábrázolásoknak nincsen additív inverzeik)

dim multiplikativitása miatt 1D-s ábrázolások tenzorszorzata szintén 1D-s

↳ az 1D-s ábrázolások egy G_{ab} Ábel-csoportot alkotnak a tenzorszorzás műveletével, amelynek egységeleme az egység ábrázolás, a inverz = kontragradiens.

G_{ab} izomorf a G' kommutátor részcsoport szerinti G/G' faktorcsoporttal

1D-s ábrázolás tenzorszorzata irreducibilissel szintén irreducibilis

<u>Fúziós szabályok</u>: Ha minden ábrázolás teljesen reducibilis, (pl. véges kompakt csoportok) akkor a disztributivitás miatt elég ismerni az irreducibilisek tenzorszorzatainak

$$i \otimes j = \bigoplus_{p \in Irr(G)} N_{pij}\, p \qquad \text{irreducibilis dekompozícióit, a}$$

fúziós szabályokat.

$\mathbb{C}$ felett minden irreducibilis reprezentációja egy Ábel-csoportnak 1D-s, ezért

$Irr(G) = G_{ab} \cong G$ (Pontryagin dualitás) véges G-re.

<u>Szimmetrizációs negyzetek</u>: Bármely V lin. térre az $\mathcal{R}: V \otimes V \to V \otimes V$ fonatoló operátor, mely permutálja a elyadókus szorzat faktorait,

$$\mathcal{R}\,(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

involutív, (azaz négyzete az identitás) ezért s.é.-i ± 1-ek.

Köv: a spektrális felbontás: $V \otimes V = \Lambda_+^2 V \oplus \Lambda_-^2 V$ az $\mathcal{R}$ sajátalterekbe (szimmetrikus és antiszimm tenzorok)

Ha $B = \{b_1, \dots b_n\}$ egy bázisa V-nek, akkor

$$\Lambda_+^2 B = \{ b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i \mid 1 \le i \le j \le n \}$$
$$\Lambda_-^2 B = \{ b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i \mid 1 \le i < j \le n \}$$

természetes bázisai $\Lambda_\pm^2 V$-nek, ezért $\dim \Lambda_\pm^2 = \frac{n(n \pm 1)}{2}$

Egy $D: G \to GL(V)$ ábrázolás önmagával képzett $D \otimes D$ tenzorszorzatának minden ábrázolási operátora kommutál R-rel, ezért mind $\Lambda_+^2 V$, mind $\Lambda_-^2 V$ invariáns altere $D \otimes D$-nek ~ léteznek a $\Lambda_\pm^2 D$ redukált ábrázolások, a D szimmetrizált, illetve antiszimmetrizált négyzetei.

Szimmetrizált négyzetek karaktere: $\chi_{\Lambda_\pm^2 D}(g) = \dfrac{\chi_D(g)^2 \pm \chi_D(g^2)}{2}$ ~ kiszámolható Tr-rel

jelentőség ~ megkülönböztethetetlen állapotok ~ Pauli-elv

Általánosságban bármely n-edik tenzorhatványra $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$ létezik egy fonatoperátor $R_{ij}: V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ $(1 \le i \le j \le n)$ melyek felcserélik az i-edik és j-edik faktorokat a diadikus szorzatnak.

$$R_{ij}(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_j \otimes \dots \otimes v_n) = v_1 \otimes \dots \otimes v_j \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_n$$

Az n-edik szimmetrikus hatványa V-nek az $\Lambda_+^n V$ altér ($\subseteq V^{\otimes n}$) mely az összes fonatokra invariáns vektorokból áll, és az n-edik antiszimm. hatványa az $\Lambda_-^n V$ altér, mely minden fonatokra egy -1-es szorzóval reagál.

Egy $A \in GL(V)$-re és egy pozitív n-re jelöljük $\Lambda_\pm^n A$-val az $A^{\otimes n}$ operátor redukcióját $\Lambda_\pm^n V$ alterre. A szimmetrikus hatványok nyomait generáló függvény:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Tr(\Lambda_\pm^n A) z^n = \det(id_V \pm zA)^{\pm 1} \quad \text{Molien-formula}$$

A $D: G \to GL(V)$ ~~leképezéssel~~ $\Lambda_\pm^n D: G \to GL(\Lambda_\pm^n V)$

$g \to \Lambda_\pm^n D(g)$

leképezések a G $\Lambda_\pm^n D$ ábrázolásait definiálják, a D n-edik antisz. hatványait.

Frobenius – Schur indikátor

Egy komplex számok feletti $D: G \to GL(V)$ ábrázolás valós, ha létezik egy $B = \{b_1, \dots b_n\}$ bázisa V-nek, hogy minden mátrixeleme az ábrázolóoperátoroknak valós.

Minden valós reprezentáció önkonjugált (~ ekvivalens kontragrediensével) de nem minden önkonjugált ábrázolás valós ~ azon önkonjugált ábrázolás mely nem valós a pszeudo-valós.

Egy irreducibilis ábrázolás $i \in Irr(G)$ önkonjugált ha tenzornégyzete $(i \otimes i)$ tartalmazza az identitást, $N_{1ii} = 1$ multiplicitással.

Egy $i \in Irr(G)$ irreducibilis ábrázolás valós vagy pszeudo-valós aszerint, hogy $\Lambda_+^2 i$ szimmetrizált vagy $\Lambda_-^2 i$ antiszimmetrizált négyzete tartalmazza ~~az~~ egységábrázolást (1 multiplicitással) és komplex, ha $i \otimes i$ egyáltalán nem tartalmazza az egységábrázolást.

köv: $\nu_i = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^2)$ egy irreducibilis ábrázolásra: $i \in Irr(G)$

Frobenius – Schur indikátor

$$\nu_i = \begin{cases} +1 & \text{ha } i \text{ valós} \\ 0 & \text{ha } i \text{ nem önkonjugált} \\ -1 & \text{ha } i \text{ pszeudo valós} \end{cases}$$

valós ~ ha $\exists$ olyan bázisa az ábrázolási térnek, amelyre vonatkoztatott minden mátrixelem valós

pszeudo-valós ~ ha ekvivalens kontragredienssel, de nem valós

komplex ~ ha nem ekvivalens kontragredienssel (~ karaktere nem kizárólag valós értékeket vesz fel)

11. tétel Projektív reprezentációk, kociklusok, fedőcsoportok

~ Mivel a tiszta állapotai a kvantumos rendszereknek ~~...~~ 1D-s altereknek felelnek meg a Hilbert-térben, ezért a szimmetriát ábrázoló operátorok csak skalárszorzó erejéig vannak meghatározva

Projektív ábrázolás: olyan $D: G \to GL(V)$ leképezés, amelyre $D(1) = \mathbb{1}$ és létezik olyan $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^\times$ kétváltozós fv., hogy

$$D(g)D(h) = \alpha(g,h)D(gh)$$

$\forall g,h \in G$ esetén (α a projektív ábrázolás kociklusa)

Operátorok szorzása asszociatív

$$D(g_1)(D(g_2)D(g_3)) = \alpha(g_2,g_3)D(g_1)D(g_2g_3) = \alpha(g_1,g_2g_3)\alpha(g_2,g_3)D(g_1g_2g_3)$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$(D(g_1)D(g_2))D(g_3) = \alpha(g_1,g_2)D(g_2g_3)D(g_3) = \alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3)D(g_1g_2g_3)$$

$\forall g_1,g_2,g_3 \in G$-re

Kociklus egyenlet: $\alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3) = \alpha(g_1,g_2g_3)\alpha(g_2,g_3)$

~ amit ezt kielégíti az a kociklus

normálási feltétel: $\alpha(g,1) = \alpha(1,g) = 1$ mert $D(1) = id_V$

Kociklusok pontonkénti szorzata is kociklus ~ kociklusok egy $Z^2(G)$ Abel-csoportot alkotnak, melynek egységeleme a triviális kociklus (minden értéke +1)

Az $\alpha_1, \alpha_2 \in Z^2(G)$ kociklusok kohomológok, melyet $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ jelöl, ha létezik olyan $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ fv., hogy $\dfrac{\alpha_2(g,h)}{\alpha_1(g,h)} = \dfrac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}$ $\forall g,h \in G$.

A kohomológia egy kongruencia reláció a kociklusok $Z^2(G)$ Abel csoportján (azaz egy ekvivalencia reláció kompatibilis a csoportstruktúrával), így az ekvivalenciaosztályok szintén csoportot alkotnak, ez a kohomológia-osztályok $H^2(G)$ csoportja (másodrendű kohomológia csoport = Schur-multiplikátor)

Véges vagy kompakt csoport Schur-multiplikátora véges. (pl. 2D-s Conform csoportra végtelen)

~ Magasabb kohomológia osztályok hasonlóan definiálhatók, a 2 kociklus n-kociklusra való cseréjével ($n \in \mathbb{N}^+$) (azaz skalárértékű fv.-ek G^n-en amelyek kielégítik a megfelelő kociklus egyenletet)

A hagyományos (szokásos / rendes) (ordinary) ábrázolások a projektív ábrázolások triviális kociklussal.

$D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ projektív ábrázolások ekvivalensek, ha $\exists$ olyan invertálható lineáris $A : V_1 \to V_2$ leképezés, és $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ fv. (skalárfaktor) hogy $\forall g$-re

$$D_2(g)A = \lambda(g)AD_1(g)$$

Ekvivalens projektív ábrázolások kociklusa kohomológok.

$$\alpha_2(g,h)D_2(gh)A = D_2(g)D_2(h)A = \lambda(h)D_2(g)AD_1(h) = \lambda(g)\lambda(h)AD_1(g)D_1(h) =$$

$$= \lambda(g)\lambda(h)\alpha_1(g,h)AD_1(gh) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}\alpha_1(gh)D_2(gh)A$$

~ minden kohomológiaosztályra az elmélet analóg ahhoz amit rendes ábrázolásainál láthattunk, így az invariáns altér, reducibilitás, ~~direkt összeg~~ stb. ok

1, projektívek direkt összege csak akkor létezik, ha a kociklusok egyenlők (szuperszelekciós szabály)

2, a tenzorszorzat kociklusa a kiindulási kociklusok szorzata

3, az n-edik szimm. hatvány kociklusa az ábrázolás kociklusának n-edik hatványa

$\hat{G}$-t a G fedőcsoportjának nevezzük, ha létezik centrális részcsoportja $A < Z(\hat{G})$, mely izomorf a $H^2(G)$ Schur multiplikátorral, úgy, hogy a megfelelő faktorcsoport izomorf G-vel

$$H^2(G) \cong A \quad \text{és} \quad \hat{G}/A \cong G$$

$\hat{G}$ univerzális fedőcsoportja G-nek, ha egy-egyértelmű leképezés áll fenn $\hat{G}$ közönséges ábrázolásai és G projektív ábrázolásai között

Schur: minden véges csoport rendelkezik fedőcsoporttal, de több nem-izomorf is létezhet

A fedőcsoportok izomorfizmus osztálya egyedülálló meghatározott, ha $G = G'$

rendes ábrázolásai $\hat{G}$-nek ~ projektív ábrázolásai G-nek

(irreducibilisek irreducibilisnek felelnek meg)

Pl: 1, $SO(3)$ univerzális fedőcsoportja $\hat{SO}(3) = SU(2)$, mivel így $Z(SU(2)) = \mathbb{Z}_2 = H^2(SO(3))$

~ tenzor és spinor ábrázolások

közönséges ~ egész spinű

nem-triviális kociklus ~ feles spinű

2, $\hat{T} \cong SL(2, \mathbb{Z}_3)$ binary tetrahedral group

3, $\hat{I} \cong SL(2, \mathbb{Z}_5)$ binary icosahedral

4, Lie csoportokra a G fedőcsoport az egyedüli ~~egyszerűen~~ egyszeresen összefüggő $\hat{G}$ csoport, mely lokálisan izomorf G-vel (ez univerzális)

12. tétel Lie csoportok, Lie algebrák, Lie tétel, univerzális fedő csoport

Topologikus csoport: olyan csoport, amely egyben topologikus tér is és topológiája kompatibilis a csoport struktúrával, azaz a

$$\lambda_G : G \times G \to G \quad (g,h) \to gh \qquad \text{valamint} \qquad i_G : G \to G \quad g \to g^{-1}$$

leképezések folytonosak (minden nyílt halmaz inverz képe nyílt)

~ folytonos csoportok ~ véges mennyiségű paraméterekkel ~~...~~ leírhatók fentiek

~ valós paraméterek legkisebb n száma, amely elegendő a csoportelemek megkülönböztethetőséhez a csoport dimenziója, ekkor n-paraméteres a csoport

↳ $A(\alpha)$ ahol $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$

két csop. elem szorzata is egy paraméterezhető, ezért $\exists \phi(\alpha, \beta)$

$$A(\alpha) A(\beta) = A(\phi(\alpha, \beta))$$

hasonló okokból létezik egy $\Psi(\alpha)$ fv. is amelyre

$$A(\alpha)^{-1} = A(\Psi(\alpha))$$

A csoportművelet asszociativitása miatt fenn kell állnia a fv. egyenletnek:

$$\phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma)) = \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma)$$

míg az egységelem és az inverz def.-ja miatt

$$\phi(\vec{0}, \alpha) = \phi(\alpha, \vec{0}) = \alpha$$

$$\phi(\alpha, \Psi(\alpha)) = \phi(\Psi(\alpha), \alpha) = 0$$

Lie.csoport: Egy n-paraméteres csoportot akkor nevezünk Lie-csoportnak, ha mind a ϕ, mind a Ψ leképezések konvergens ~~sorba~~ Taylor-sorba fejthetők $\vec{0}$ körül.

Egy valós Lie-csoport olyan topologikus csoport mely lokálisan euklideszi.

~ le van fedve nyílt W halmazokkal, melyek homeomorfak egy nyílt részcsoporttal ($U \in \mathbb{R}^n$)

n paraméteres folytonos G csoport paraméterezése egy $g: U \to G$ lokális homeomorfizmus ahol $U \subseteq \mathbb{R}^n$ paraméter-tartomány és G között.

~ paraméterek $I \in U$ összessége a $g(I) \in G$ csoportelem paramétervektora

csoport topológiája ⟺ paraméter-tartomány topológiája

G folytonos csoport: kompakt, ha minden nyílt lefedésből kiválasztható egy véges lefedés

összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető folytonos görbével

egyszeresen összefüggő, ha összefüggő, és bármely zárt görbe összehúzható egy pontba

A topologikus csoport olyan csoport mely topologikus térben van, melyben a bal oldali eltolások

$$\lambda_g : G \to G \quad h \to gh \qquad \text{és az inverzós leképezés} \qquad i_G : G \to G \quad g \to g^{-1} \qquad \text{folytonosak}$$

Lokális homeomorfizmus ~ local chart. $\alpha: W \to U \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaza

Legyen olyan $\alpha: W \to U$ az identitás szomszédságában (közelében), a csoport struktúra a μ és az c folytonos leképezések létezésére korlátoknak

$$\mu: U \times U \to U \qquad \text{és} \qquad c = U \to U \qquad (\text{struktúra fv.-ek})$$

$\vec{\mathcal{I}}(gh) = \mu(\vec{\mathcal{I}}(g), \vec{\mathcal{I}}(h))$
$\vec{\mathcal{I}}(g^{-1}) = c(\vec{\mathcal{I}}(g))$

$\mu(\vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta})$ a szorzat paraméterezése, $c(\vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta})$ inverz paraméterezése

csoportszorzás asszociativitása: $\mu(\vec{\mathcal{I}}, \mu(\vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta})) = \mu(\mu(\vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta}), \vec{\gamma})$ $\quad \vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{U}$

$\vec{0}$ konvenció alapján az identitás paraméterezése $g(\vec{0}) = 1_G$

$$\mu(\vec{\mathcal{I}}, \vec{0}) = \mu(\vec{0}, \vec{\mathcal{I}}) = \vec{\mathcal{I}}$$
$$\mu(\vec{\mathcal{I}}, c(\vec{\mathcal{I}})) = \mu(c(\vec{\mathcal{I}}), \vec{\mathcal{I}}) = \vec{0}$$

Gleason - Montgomery - Zippin: A $\mu: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ és $c: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ struktúrafv.-ek analitikusak, origó körüli Taylor sorok pozitív konvergenciasugárral rendelkeznek

pl.: 1, Az additív $(\mathbb{R}, +)$ csoport egy egydimenziós Lie csoport, $\mu(\lambda+\beta)$ és $c(\lambda) = -\lambda$ struktúrafv.-ekkel

2, 3D forgatások tengelyek körül, mely ~~\ldots~~ közös pontja egy 3 paraméteres Lie csoport

3, Az egyszerű csoport $SU(2) = \{ U \in Mat_2(\mathbb{C}) \mid \det U = 1,\ U^+ U = 1 \}$ 3 paraméteres

4, Poincaré-csoport

Lie-csoport: a $\mu: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ és $c: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ leképezések konvergens Taylor-sorba fejthetők az egységelem egy kis környezetében

Lie-homomorfizmus $\phi: G_1 \to G_2$ két G_1 és G_2 Lie csoport között egy folytonos csoport homomorfizmus.
A lokális izomorfizmus egy analitikus leképezés, mely egy bijektív-homomorfizmus ha megszorítjuk az identitás egy megfelelő környezetére.

~ a Lie izomorfizmus erősebb mint a csoport izomorfizmus

~ Lie csoport faktorja önmaga is Lie (rész-) csoport

Egyparaméteres részcsoportja egy G Lie csoportnak folytonos (Lie) homomorfizmus a valós számok additív csoportjából $(\mathbb{R}; +)$ a G-be.

Lokális izomorfizmus: egységelem kis környezetében művelettartó diffeomorfizmus, azaz olyan $\phi: W_1 \to W_2$ diffható leképezés $\vec{0} \in W_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ és $\vec{0} \in W_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ euklideszi részhalmazok között, amelyre $\mu_2(\phi(\vec{\mathcal{I}}), \phi(\vec{\beta})) = \phi(\mu_1(\vec{\mathcal{I}}, \vec{\beta}))$

Univerzális fedőcsoport: Egy adott csoport projektív ábrázolásaiban meghatározásában segít
~~Ez egy olyan $\hat{G}$ centrális bővítése~~ Minden összefüggő G Lie csoportra létezik vele lokálisan izomorf egyszeresen összefüggő $\hat{G}$ univerzális fedőcsoport, amelyre $G \cong \hat{G}/Z$ ahol Z a $\hat{G}$ egy véges centrális részcsoportja.

Lie-algebra: $\mathcal{L}$ lineáris tér kiegészítve egy bilineáris ~nevezett általában lineáris~ szorzással, a Lie-zárójellel (brackettel) $[\,,\,]$
$[c]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ bilineáris és antiszimm.

$$[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a, b] + \mu[b, c] \qquad \forall\, a, b, c \in \mathcal{L} \qquad \lambda, \mu \text{ skalárok}$$
$$[a, \lambda b + \mu c] = \lambda[a, b] + \mu[a, c]$$
$$[a, b] + [b, a] = 0 \quad \text{antiszimm}$$

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$ Jacobi azonosság

művelet bilineáris → elegendő ismerni a báziselemekre

pl: 1, $\mathbb{R}^3$ keresztszorzással Lie-bracket-lehet

2, $Mat_n(\mathbb{R})$ $[A,B]=AB-BA$ kommutátorral

3, impulzusmomentum operátorok QM-ben

Lie morfizmus: művelettartó lineáris leképezés $\phi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ úgy, hogy

$$\phi([a,b])=[\phi(a),\phi(b)]$$

Adott $\mathcal{L}$-ben $B=\{b_1 \dots b_n\}$ bázis, a Lie-bracketjéből

$$[b_i,b_j]=\sum_{k=1}^{n} c_k^{ij} b_k$$

a bázisvektorokat meghatározzák az algebrát.

~~A~~ c_k^{ij} eh.-k a struktúrakonstansai $\mathcal{L}$-nek, ezek kielégítik a

$$c_i^{jk}+c_i^{kj}=0 \quad \text{antiszimm}$$

$$\sum_m \{c_i^{jm}c_m^{ke}+c_i^{km}c_m^{ej}+c_i^{em}c_m^{jk}\}=0 \quad \text{Jacobi azonosság}$$

egyenleteket és karakterizálják a Lie-algebrát izomorfizmusig.

~ Minden Lie-csoportnak létezik olyan (ún. kanonikus) paraméterezése, ~~hogy~~ amelyre $c(\vec{\alpha})=-\vec{\alpha}$ és

$$\mu(\vec{\alpha},\vec{\beta})_i=\alpha_i+\beta_i+\sum_{j,k=1}^{n} c_i^{jk}\alpha_j\beta_k+\text{ magasabb rendű tagok.}$$

Lie csoport Lie algebrája

Az analitikus fv.-ek egy Lie csoporton (G) gyűrűt formálnak (A(G)) elemenkénti összeadás és szorzás operátorokkal

A(G) egy derivációja a $\nabla: A(G) \to A(G)$ leképezés, mely additív

$$\nabla(a+b)=\nabla a+\nabla b$$

eltűnik konstans fv.-ekre és kielégíti a Leibniz szabályt

$$\nabla(ab)=(\nabla a)b+a(\nabla b)$$

A(G) derivációi Lie algebrát formálnak (Der(A(G)) a $[\nabla_1,\nabla_2]=\nabla_1\circ\nabla_2-\nabla_2\circ\nabla_1$ kommutátorral.

$a\in A(G)$ és $g\in G$-re a fv.

$$a^g: G\to\mathbb{R}$$
$$h\to a(g^{-1}h)$$

analitikus, $a^g\in A(G)$ és növekményt ad egy additív leképezésre

$$\lambda_g: A(G)\to A(G)$$
$$a\to a^g$$

melyre $\lambda_{gh}=\lambda_g\circ\lambda_h$

Egy bal invariáns derivált $\nabla\in Der(A(G))$ egy olyan mely kielégíti a $\nabla\circ\lambda_g=\lambda_g\circ\nabla$ $\forall g\in G$-re.

Az összege és kommutátora invariáns deriváltaknak önmaga is invariáns.

~ invariáns deriváltak Lie algebrát alkotnak $Lie(G)$

Lie-tétel: A c_i^{jk} eh.-k a Lie(G) struktúrára állandók (megfelelő bázis forgelemberválasztással) és a magasabbrendű tagok a kvadratikusak által vannak meghatározva.

G lokális struktúráját Lie(G) jellemzi

Lie algebra számolása:

Lie transzformációs csoport: differenciálható bázistranszformációk folytonos csoportja.

$$x_i \rightarrow x_i'(x_1 .. x_m | \vec{\alpha}) \in \mathbb{R}^m \quad \text{ahol } \vec{\alpha} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$$

Infinitezimális generátorok: $(i = 1, .. n)$

$$T_k = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial x_j'}{\partial \alpha_i} \right)_{\vec{\alpha}=0} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

elsőrendű parc. diff.operátorok kommutátoraikkal

$$[T_i, T_j] = T_i \circ T_j - T_j \circ T_i = \sum_{k=1}^{n} c_k^{ij} T_k$$

Lie alg. strukt. konstansai

globális tul.: Lie(G) csak a G struktúráját írja le lokálisan, a globális jellemzőket topológiája kell

globális és lokális jellemzők között nincs kapcsolat

Minden Lie csoportnak van egy kapcsolódó Lie részcsoportja $G_0 < G$

G_0 csak egy G-ben $\Leftrightarrow$ G összefüggő komponense

Minden összefüggő Lie csoport G lokálisan izomorf egy egyértelműen összefüggő $\hat{G}$ Lie csoporttal, mely az univerzális lefedése és van olyan diszkrét centrális részcsoport $Z < Z(\hat{G})$ melyre $G \cong \hat{G}/Z$

$\sim Z$ véges ha G kompakt.

(13. tétel) Forgatáscsoport és Lie algebrája, SU(2)-vel kapcsolat, tenzor és spinor reprezentációi

Haar mérték:

G topológiai csoporton vett invariáns μ mérték Lebesgue mérték, úgy hogy minden $g \in G$-re és minden $U \subseteq G$ mérhető halmazra a $gU = \{gx \mid x \in U\}$ transzlátum is mérhető és $\mu(gU) = \mu(U)$

Haar tétel: minden lokálisan kompakt csoportra léteznek invariáns mértékek,

normalizált Haar mérték: $\mu(G) = 1$

~ alkalmazások szempontjából legfontosabb az SO(3) Lie-csoport

~ tengelyek körüli forgatások csoportja, mely tengelyeknek egy közös pontja van. Mivel a Descartes koordináták lineárisan transzformálódnak, a rotációk ortogonálisak tartják is a centrumtól mért távolságot állandóként, ezért az SO(3)-mal lehet azonosítani ezen csoportot

- Tetszőleges forgatás előállítható három egymásra merőleges tengely körüli forgatás szorzataként

$$O(\vec{\alpha}) = O_x(\alpha_x)\, O_y(\alpha_y)\, O_z(\alpha_z)$$

$$\text{ahol} \quad O_z(\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha x - \sin\alpha y \\ \sin\alpha x + \cos\alpha y \\ z \end{pmatrix}$$

az infinitezimális generátor alakja: $L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$

hasonló megfontolásból $L_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad L_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$

A Lie algebra ~~azon kommutátorok által~~ három L lineárkombinációi által van kifeszítve

~ kiszámítjuk a kommutátorokat
$$[L_x, L_y] = -L_z$$
$$[L_x, L_z] = L_y$$
$$[L_y, L_z] = -L_x$$
struktúraállandók könnyen leolvashatók

tetszőleges $\vec{n}$ irányú tengely körüli forgatások generátora:
$$L_{\vec{n}} = n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z$$

kommutátorok: $[L_{\vec{n}}, L_{\vec{m}}] = L_{\vec{n}\times\vec{m}}$

forgáscsoport Lie-algebrája izomorf a 3D vektorok Lie-algebrájával (vektoriális szorzattal mint $[\,,\,]$-tel)

~ Infinitezimális generátorok anti-hermitikus operátorok az $L^2(\mathbb{R}^3)$ Hilbert-téren
$$\langle f, L_0 g\rangle = \int f(x,y,z)\, L_0\, g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = -\langle L_0 f, g\rangle$$

~ Ezt szokás $J_i = -i\hbar L_0$ alakban írni, ezek önadjungált ~~operátorok~~ generátorok, melyek nem elemei a Lie-algebrának, csak a komplexifikált Lie-algebrának, amelyet a skalárok testének kiterjesztésével kapunk. Ezekkel a Lie-bracketek:
$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hbar\, J_k$$
↳ Levi-Civita tenzor

kommutációs relációi az impulzus mom. operátoroknak

Impulzusmomentum komponensek megmaradó (Noether-tétel)
$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$
ez nem tartozik a Lie algebrába, mert nem lineáris kombináció, csak az univerzális fedőalgebrájának lesz eleme (mivel nem kommutatív polinomo kifejezések vannak a generátorokban)

~ ez kommutál minden generátorral: $[J_i, J^2] = 0$

J^2 egy Casimir-operátor (kvadratikus)

univerzális fedőalgebra azon elemei, melyek az összes generátorral kommutálnak

~ $SO(3)$ minden Casimir operátora J^2 polinomja.

~ definiálják $SU(2)$-t ~ 2×2-es unitér mátrixok csoportja

~ egységelemtől infinitezimális mennyiségben különböző mtx alakja: $U = 1 + i\varepsilon A$ (ahol)

$1 = \det U = 1 + i\varepsilon\, Tr(A)$ ~ $Tr(A) = 0$ míg mivel U unitér:
$$1 = UU^+ = (1 + i\varepsilon A)(1 - i\varepsilon A^+) = 1 + i\varepsilon(A - A^+)$$
~ A önadjungált, azaz hermitikus

2×2-es spúrtalan önadjungált mátrixok terének bázisa ~ Pauli mtx-ok
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

itt megint önadjungált bázisát választottuk az algebrának $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\sigma_i$ mtx-ok kommutálnak megegyeznek $\mathcal{J}_i$-k kommutátoraival

$\Rightarrow$ $SU(2)$ Lie-algebrája megegyezik $SO(3)$ Lie-algebrájával $\Rightarrow$ két csoport lokálisan izomorf

$\sim$ $SU(2)$ egyszeresen összefüggő ellentétben a forgáscsoporttal

Általában: tetszőleges Lie algebrához tartozik egyetlen olyan G_u Lie csoport, amely egyszeresen összefüggő és Lie-algebrája $\mathfrak{g}$ és minden olyan G összefüggő Lie csoport, amelynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$ előáll G_u/Z faktorcsoportként, ahol Z G_u-nak valamely centrális részcsoportja.

$\rightsquigarrow$ G_u a G csoport univerzális fedőcsoportja

$\rightsquigarrow$ $SU(2)$ centruma $\rightsquigarrow$ $Z(SU(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ kételemű

$$\rightsquigarrow SO(3) \cong SU(2)/Z$$

$SU(2)$ a forgáscsoport univerzális fedőcsoportja.

Spinor és tenzor ábrázolások:

$\sim$ véges dimenziós irreducibilis ábrázolásokat egy nemnegatív, egész vagy feles értékű felvevő paraméter jellemzi, az ábrázolás spinje. Egy s spinű ábrázolás dimenziója $2s+1$ és rajta a Casimir op. az $s(s+1)$ értéket veszi fel.

tenzorábrázolások $\rightsquigarrow$ egész spinű ábrázolások, ezek felelnek meg a forgáscsoport valódi ábrázolásainak

$\wedge$ a feles spinűek a nemtriviális kocikluszhoz tartozó projektív ábrázolások

$\sim$ az alacsony spinű ábrázolások elnevezései: $s=0$ skalár, $s=\frac{1}{2}$ spinor, $s=1$ vektor

$\sim$ a 2d-s spinor ábrázolásban az infinitezimális generátorok alakja $\frac{1}{2}\sigma_i$

az N_{pq}^{r} fúziós eh. értéke 1, ha $|p-q| \leq r \leq p+q$ és 0 egyébként

$\hookrightarrow$ ez visszaadja az impulzusmom-ok QM-i szabályát.