CSOPORTELMÉLET

09. 14.

<u>Csoport</u>: elemek halmaza, értelmezett egy kétváltozós művelet (csoportművelet, szorzás)
→ kielégíti a tulajdonságokat → axiómák
→ olyan eljárás, mely 2 elemhez egy 3.-at rendel

<u>Axiómák</u>:

① asszociativitás: ha a, b, c csoportelemek
$(a*b)*c = a*(b*c)$
↳ csoportművelet jele
(kvázicsoport, ahol nincs asszociativitás)

② egységelem létezése: 1-gyel jelöljük, kitüntetett elem $a*1 = 1*a = a$ $\forall$ a-ra

③ inverz létezése: $\forall$ a csoportelemre $\exists$ b elem, melyre $a*b = b*a = 1$
(inverz nélkül félcsoport)

<u>Példák</u>

① <u>Számcsoportok</u>:

$(\mathbb{Z}, +)$ egész számok additív csoportja
végtelen, diszkrét, kommutatív
$(\mathbb{Q}, +)$ végtelen, diszkrét, kommutatív
$(\mathbb{R}, +)$ végtelen, folytonos, kommutatív
$(2\mathbb{Z}, +)$ páros egészek, végtelen, diszk., komm.
NEM $(\mathbb{Z}, \cdot)$ félcsoport
NEM $(\mathbb{Q}, \cdot)$ 0-nak nincs inverze
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ racionális számok multiplikatív csoportja
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

csoport rendje: elemei halmazának számossága

CSOPORTELMÉLET

09.28

Számcsoportok : Abel-csoportok → kommutatív

② <u>Lineáris csoportok</u> (mátrixcsoportok)

$GL(n) = \{$ $n \times n$ -es , nem zérus determinánsú mátrixok $\}$

művelet a mátrixszorzás

általános lineáris csoport

$SL(n) = \{$ $n \times n$ -es , egységnyi determinánsú mátrixok $\}$ → spec. lin. csoport

V: lineáris tér (véges dimenziós)

$\{e_1, \dots, e_n\}$ egy bázisa

A egy lineáris operátor V-n

$$x = \sum_i x_i e_i$$

$$Ax = \sum_i x_i (Ae_i)$$

$$Ae_i = \sum_j A_{ij} e_j$$

$GL(V) = \{ V \to V$ invertálható lineáris operátorok $\}$

$GL(1)$ = skalártest multiplikatív csoportja

$SL(1) = \{1\}$ triviális csoport

③ <u>Permutáció csoportok</u>

X: véges halmaz

X permutációja: $X \to X$ bijektív leképezés

bijekciónak létezik inverze, amellyel komponálva az identikus leképezést kapjuk

Sym (X) : X feletti szimmetrikus csoport

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\phi \in Sym(X)$ $\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \phi(x_1) & \dots & \phi(x_n) \end{pmatrix}$$

$X = \{1, 2, 3\}$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

⇒ identitikus leképezés = egység permutáció

$$\phi \circ \phi \; (1) = 1, \quad (2) = 2, \quad (3) = 3$$

permutáció ciklikus felbontása

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \{1,2\} \quad \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_n \\ x_k & \dots & x_1 & & & \end{pmatrix}$$

$Y \subset X$ stabil részhalmaza ϕ-nek, ha $\phi(Y) \subset Y$

minimális stabil részhalmaz = ciklus

ciklusok particionálják X-et, azaz vagy megegyeznek v. diszjunktak és uniójuk X

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$$

$\phi_i = X \to X$ leképezés $x \mapsto \begin{cases} \phi(x), & \text{ha } x \in X_i \\ x, & \text{ha } x \notin X_i \end{cases}$

$\phi = \prod_{i=1}^{r} \phi_i$ ϕ_i-k felcserélhetők, ciklikus permutációk

↓

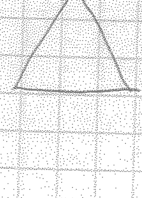
ciklikus felbontás

ϕ permutáció páratlan, ha páratlan számú páros ciklusa van, egyébként páros
(elemszám páros)

páros permutációk szorzata páros

$\mathrm{Alt}(X)$ = alternáló csoport = {páros permutációk $X \to X$}

④ Geometriai szimmetriacsoportok



szabályos háromszög

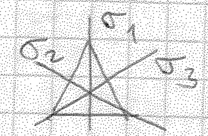
sík olyan mozgásai, amelyeknél a háromszög képe megegyezik az eredetivel

eltolások nem lehetnek, mert középpont fix csak középpont körüli forgatásokat

középponton átmenő tengelyekre vonatkozó forgatások

120°-os forgatás v. 120° egész számú többszöröse

tükrözés négyzete az identikus transzformáció, ezért a csúcspontok valamelyikét fixen kell hogy hagyjuk



$$D_3 = \{1, \underbrace{C}_{120°}, \underbrace{C^2}_{240°}, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{tükrözések}}\}$$

forgatás

$$C^{-1} = C^2 \qquad (C^2)^{-1} = C \qquad \sigma_i^{-1} = \sigma_i$$

D_3 = harmadfokú diéder csoport

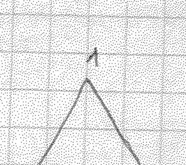
szabályos n-szög szimmetriacsoportja D_n

→ n db forgás és n db tükrözés ⇒ 2n elemű

→ nem kommutatív

Szorzótábla (Cayley)

sor / oszlop	1	C	C^2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	C	C^2	σ_1	σ_2	σ_3
C	C	C^2	1	$C\sigma_1 = \sigma_3$	σ_1	σ_2
C^2	C^2	1	C	σ_2	σ_3	$C^2\sigma_3 = \sigma_1$
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	C	C^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C^2	1	C
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C	C^2	1



csúcspont csúcspontba képződik → minden szimmetria permutálja a csúcspontokat

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

kommutativitás → nem kommutatív, mert a tábla nem szimmetrikus

Homomorfizmus: olyan leképezés két csoport között, mely művelettartó

G, H csoportok

$\phi: G \to H \qquad \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$

$\phi(1_G) = 1_H$

$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

Izomorfizmus: bijektív homomorfizmus
Ha két csoport között létezik izomorfizmus, akkor a két csoportot izomorfnak nevezzük.
Izomorf csoportok absztrakt értelemben azonosnak tekinthetők

$D_3 \cong \mathrm{Sym}(\text{csúcspontok})$

Automorfizmus: csoport önmagára való leképezése (izomorfizmus és homomorfizmus) **10.05.**
automorfizmusok is egy csoportot alkotnak $\mathrm{Aut}(G)$

Részcsoport: csoportelemek egy részhalmaza, mely ~~tudja~~ maga is csoportot alkot.

$D_3 = \{1, C, C^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

	1	C	C^2 ...
1	1	C	C^2
C	C	C^2	1
C^2	C^2	1	C
⋮			

$H < G$

1. $x, y \in H \to xy \in H$
2. $1 \in H$
3. $x \in H \to x^{-1} \in H$

$\Big\}\ x, y \in H \to xy^{-1} \in H$

Részcsoportok metszete mindig részcsoport

CSOPORTELMÉLET

10. 05.

$X \subseteq G$ csoportelemek részhalmaza (komplexus)

$\langle X \rangle = \bigcap\limits_{\substack{H<G \\ X\subseteq H}} H$ legkisebb részcsoportja G-nek, melynek X részhalmaza

X által generált részcsoport

X a részcsoport generátorrendszere

Mindig van két részcsoport: maga a csoport és az egység elem $\{1_G\}$ triviális részcsoport

Részcsoportok uniója általában nem részcsoport

H és K részcsoportja G-nek

$$H \vee K = \langle H \cup K \rangle$$

Részcsoport háló → részcsoportok összesége rendezéssel

Rendezés részcsoportok között

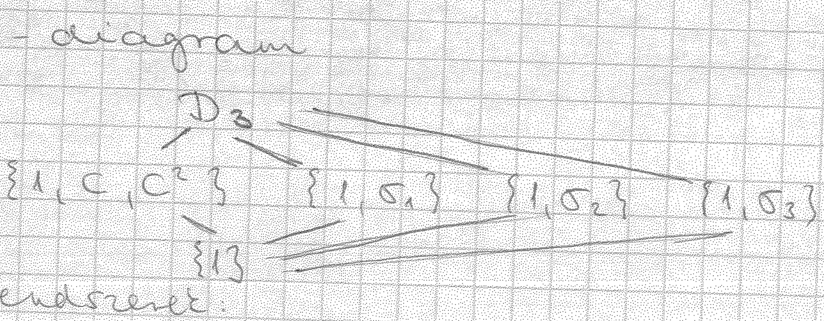
$H, K < G$ $H < K$

D_3 részcsoport hálója

$D_3, \{1\}, \{1, C, C^2\}, \{1, \sigma_1\}, \{1, \sigma_2\}, \{1, \sigma_3\}$.

minimális és maximális elem a részcsoport hálóban

Hasse-diagram



generátorrendszerek:

$\{1\} = \langle 1 \rangle$

$\{1, \sigma_1\} = \langle \sigma_1 \rangle$ $\{1, \sigma_2\} = \langle \sigma_2 \rangle$ $\{1, \sigma_3\} = \langle \sigma_3 \rangle$

$\{1, C, C^2\} = \langle C \rangle = \langle C^2 \rangle$ nem egyértelmű

$D_3 = \langle C, \sigma_1 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \dots$ legalább 2 elem

ciklikus csoport = egy elemű halmaz generálja.

Ciklikus csoportok struktúra tétele:

$$G = \langle x \rangle = \{ \dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^{2}, \dots \}$$

$$x^{n} = x^{n-1} \cdot x$$

$$x^{0} = 1$$

ha végtelen, akkor x hatványai mind különbözőek

$$x^{k} x^{n} = x^{k+n}$$

létezik egy $\Phi : (\mathbb{Z}, +) \to G$ izomorfizmus

$$k \mapsto x^{k}$$

végtelen ciklikus csoport $\cong$ egészek additív csoportja

ha G véges, akkor létezik N pozitív egész

$$x^{N} = 1$$

$$x^{k} x^{n} = x^{k+n}$$

ekkor G izomorf $(\mathbb{Z}_N, +)$ modulo N maradékosztályok

Csoportelem rendje = általa generált ciklikus részcsoport rendje

Komplexus szorzás:

$$X, Y \subseteq G$$

$$XY = \{ xy \mid x \in X, y \in Y \}$$

$H < G$, $x \in G$, $\{x\}H = \{ xy \mid y \in H \}$ baloldali mellékosztály

$Hx = \{ yx \mid y \in H \}$ jobboldali mellékosztály

általában $xH \neq Hx$

Részcsoport (baloldali) mellékosztályai particionálják a csoportot

=2 mellékosztály vagy megegyezik vagy disjunkt és az uniójuk kiadja az egész csoportot

tfh. $x, y \in G$ és $xH \cap yH \neq \emptyset$

$\exists z \quad z = xh_1 = yh_2 \Rightarrow h_1 = (x^{-1}y)h_2 \Rightarrow$

$h_1, h_2 \in H$

$H \ni \underbrace{h_1 h_2^{-1}}_{h} = x^{-1} y \Rightarrow y = xh \Rightarrow y \in xH$

$yh^{-1} = x \Rightarrow x \in yH$

$yH = \{ (xh)g \mid g \in H \} = \{ x(\underbrace{hg}_{\hat{g}}) \mid g \in H \} = \{ x\hat{g} \mid \hat{g} \in H \} = xH$

Baloldali mellékosztályok halmaza G/H coset-tér

Részcsoport indexe = különböző mellékosztályainak számossága, jel: $[G:H]$

<u>Lagrange-tétel</u>: Ha G véges csoport és $H < G$, akkor $|G| = [G:H]|H|$

$[G:H] = |G/H| = |G|/|H|$

D_3 hatelemű $\rightarrow$ részcsoport 1, 2, 3, 6 elemű lehet

$G = \ddot{\bigcup}_{i=1} x_i H \qquad n = [G:H]$

$x_i H = \{ x_i h \mid h \in H \}$

$|x_i H| = |H|$

Ha G prímrendű csoport, akkor minden részcsoportja vagy triviális vagy G, <u>és</u> a csoport ciklikus

$x \in G$ legyen nem triviális

$\langle x \rangle$

Ciklikus csoport mindig kommutatív

Pl: D_3, $H = \{1, C, C^2\}$

H mellékosztályai G-ben?

$|G| = 6$, $|H| = 3 \rightarrow [G:H] = 2$

1) triviális mellékosztály $1 \cdot H = H = \{1, C, C^2\}$

2) nem triviális $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_1 H = \sigma_2 H = \sigma_3 H$

Normális részcsoportok:

$N \leq G$ normális részcsoport $N \triangleleft G$, ha $xN = Nx$ $\forall x \in G$

Az egész csoport és a triviális részcsoport mindig normális részcsoport.

Egyszerű csoport: nincs valódi normális részcsoportja

Véges egyszerű csoportok osztályozása:

- prímrendű ciklikus csoportok → kommutatív egyszerű csoportok
- alternáló csoportok → (nem-kommutatív) egyszerű csoportok
- véges Lie-csoportok

+ 26 db szporadikus csoport ennyi egyszerű csoport

$X, Y \subseteq G$ $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ komplexus szorzat

$(xH)(yH)$ komplexus akkor és csak akkor mellékosztály, ha H normális részcsoport

$H \triangleleft G \Rightarrow xH = Hx$ $yH = Hy$ $\Rightarrow yh = \tilde{h}y$

$(xH)(yH) = \{xhyg \mid h,g \in H\} = \{xy(y^{-1}hy)g \mid h, g \in H\} = *$

$\forall h \in H$-ra $\exists$ $\tilde{h} \in H$, hogy $yh = \tilde{h}y$

$\Rightarrow y^{-1}hy \in H$, ha $h \in H$

$* = \{(xy)(\tilde{h}g) \mid \tilde{h}, g \in H\} = \{(xy)k \mid k \in H\} = (xy)H$

Ha $H \triangleleft G$, akkor a komplexusszorzás egy asszociatív kétváltozós művelet a H mellékosztályain, aminek van egységeleme a H triviális mellékosztály, és léteznek inverzek $(xH)^{-1} = (x^{-1})H$

Mellékosztályok csoportja: G/H faktorcsoport

Faktorcsoport rendje: $|G/H| = [G:H]$

Kongruencia-relációk:

csoportstruktúrával kompatibilis ekvivalencia-reláció

$x_1 \equiv y_1$ és $x_2 \equiv y_2$ akkor ~~[illegible]~~ kompatibilis, ha $x_1 x_2 \equiv y_1 y_2$

Tekintsük $H \triangleleft G$ baloldali mellékosztályait

kongruencia: x és $y \in G$ akkor ekvivalens, ha $y \in xH$

$y_1 \in x_1 H$, $y_2 \in x_2 H$ $\rightarrow$ $y_1 y_2 = (x_1 h_1)(x_2 h_2) = (x_1 x_2)\underbrace{(x_2^{-1} h_1 x_2)}_{a}h_2$, $a \in H$

Ha $\equiv$ egy kongruencia, akkor tekintsük

$H = \{ x \in G \mid x \equiv 1 \}$ $\quad H \triangleleft G$

$yH = \{ yx \mid x \equiv 1 \} = \{ x \in G \mid x \equiv y \}$

$Hy = \{ xy \mid x \equiv 1 \} = \{ x \in G \mid x \equiv y \}$ normális részcsoport

minden kongruencia egy-egyértelműen meghatároz egy normális részcsoportot és fordítva.

Abel-csoport minden részcsoportja normális részcsoport.

$N \triangleleft G$

faktorcsoportba

$\pi_N : G \rightarrow G/N$

$x \mapsto xN$ szürjektív leképezés

műveletttartó leképezés vagyis homomorfizmus

$x, y \in G$

$\pi_N(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi_N(x)\pi_N(y)$

neve: ~~[illegible]~~ természetes homomorfizmus

π_G: a triviális csoportba képez

$\pi_{\{1\}}$: lényegében az identikus leképezés

G és H csoportok, $\phi : G \rightarrow H$ homomorfizmus ~~[illegible]~~

homomorfizmus képe: $\phi(G) = \{ \phi(x) \mid x \in G \}$ részcsoportja H-nak: $\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(x \cdot y)$

$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

homomorfizmus magja:

$$\ker\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = 1_H\}$$

$x, y \in \ker\Phi$ $\quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) = 1$

$x\ker\Phi = \{xg \mid \phi(g) = 1\} = \{(xgx^{-1})x \mid \Phi(g) = 1\} = \{\tilde{g}x \mid \phi(\tilde{g}) = 1\}$

$\Phi(xgx^{-1}) = \Phi(x)\Phi(g)\Phi(x^{-1})$ $\quad = (\ker\Phi)x$

$\ker\phi$ normális részcsoportja G-nek

$N \triangleleft G$ esetén $\pi_N(G) = G/N = G/\ker\pi_N$

$\ker\pi_N = N$

Homomorfizmus tétel: ha $\phi: G \to H$ homomorfizmus, akkor $\phi(G) \cong G/\ker\Phi$ (izomorfizmus).

minden homomorf kép izomorf egy faktorcsoporttal

Korrespondencia tétel: Homomorf kép részcsoportjai egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a homomorfizmus magját tartalmazó részcsoportokkal (igaz normális esetben is)

$\Phi: G \to H$

$K < \phi(G) \longleftrightarrow \ker\Phi < \tilde{K} < G$

Pl: D_3 $\quad H = \{1, C, C^2\}$ normális részcsoport
2 az index

$D_3 = H \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$\sigma_1 H = H\sigma_1$

két mellékosztály: H és $\sigma_1 H$ komplexus szorzás

	H	$\sigma_1 H$
H	H	$\sigma_1 H$
$\sigma_1 H$	$\sigma_1 H$	H

$D_3/H \to$ faktorcsoport két elemű $\to$ 2 prím $\Rightarrow$ ciklikus

$D_3/H \cong (\mathbb{Z}_2, +)$

	0	1
0	0	1
1	1	0

π_H: $\left.\begin{matrix}1\\C\\C^2\end{matrix}\right\} \to H$ $\quad \left.\begin{matrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{matrix}\right\} \to \sigma_1 H$

CSOPORTELMÉLET

10.19

Konjugált osztályok

$x, y \in G$, x-nek y általi konjugáltja $x^y = y^{-1}xy$

$X, Y \subseteq G$ $\quad X^Y = \{x^y \mid x \in X, y \in Y\}$

$x^G = \{x^y \mid y \in G\}$ $\quad x$ konjugált osztálya

$x \in x^G$

konjugált osztályok particionálják G-t

két elem egymás konjugáltja, ha ugyanabba az osztályba tartoznak

konjugált elemek rendje megegyezik

$1^G = \{1\}$ triviális osztály $\quad 1^y = y^{-1}1y = 1$

D_3 esetén: $C_1 = \{1\}$

$C_2 = \{c, c^{-1}\}$ $\quad c^{\sigma_1} = \sigma_1^{-1} c \sigma_1 = c^{-1}$

$C_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

konjugált osztály elemszáma osztja a csoport rendjét

$x, y \in G$ $\quad x^y = x$?

$y^{-1}xy = x$ azaz $xy = yx$ felcserélhető elemek

$|x^G| = ?$ $\quad x^{y_1} = x^{y_2}$?

$y_1^{-1} x y_1 = y_2^{-1} x y_2$

$(y_2 y_1^{-1})x = x(y_2 y_1^{-1})$

$x \in G$ centralizátora: $C_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$

$X \subseteq G$ $\quad$ –"– $\quad$: $C_G(X) = \{y \in G \mid xy = yx \ \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$

$C_G(x)$ részcsoportja G-nek: $y^{-1}x = xy^{-1}$

$x(y_1y_2) = (y_1y_2)x$

$x^{y_1} = x^{y_2} \Longleftrightarrow (y_2 y_1^{-1}) \in C_G(x)$

$|x^G| = [G : C_G(x)]$

Véges csoport esetén $|x^G| = \dfrac{|G|}{|C_G(x)|}$

$X \subseteq G$ $\quad C_G(X)$ is részcsoport

G csoport centruma $Z(G) = C_G(G)$ = minden elemmel felcserélhető elemek = centrális elemek

$Z(G) \lhd G$ (normális részcsoport)

$x \in Z(G)$ $\quad x^G = \{y^{-1}xy \mid y \in G\} = \{x\}$

centrális elemek önmagukban alkotnak egy konjugált osztályt

Abel-csoportban a szorzás kommutatív, ezért a centrum megegyezik az egész csoporttal

$\Rightarrow$ minden elem önmaga alkot egy konjugált osztályt

<u>Kommutátor részcsoport</u>:

$x, y \in G$ $\quad [x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}(x^y)$

$[x,y]$: x és y kommutátora

$[y,x] = y^{-1}x^{-1}yx$

$[x,y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx$

$[x,y] = 1$, ha $x^{-1}y^{-1}xy = 1 \rightarrow xy = yx$ $\quad$ x és y kommutál

$\{[x,y] \mid x,y \in G\}$ általában csak részhalmaza G-nek

tekintsük ezen halmaz által generált részcsoportot

$\rightarrow$ a G kommutátor (derivált) részcsoport

$G' = \langle \{[x,y] \mid x,y \in G\} \rangle$ normális részcsoport

G/G' kommutatív csoport

ha $N \lhd G$ és G/N kommutatív, akkor $G' < N$

pl. $D_3' = \{1, c, c^{-1}\}$

$G' = \{1\}$ esetén G kommutatív

Direkt szorzat

G és H két csoport

elemeik halmazának Descartes-szorzata

$G \times H = \{(x,y) \mid x \in G,\ y \in H\}$

$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2,\ y_1y_2)$ kétváltozós művelet

asszociatív művelet, létezik egységelem $(1_G, 1_H)$

létezik inverz $(x^{-1},y^{-1})(x,y) = (x,y)(x^{-1},y^{-1}) = (1_G, 1_H)$

$$(x,y)^{-1} = (x^{-1},y^{-1})$$

G és H direkt szorzata egy csoport ezzel a kétváltozós művelettel

Direkt szorzat, mint "művelet":

- $G_1 \cong G_2$ és $H_1 \cong H_2 \Rightarrow G_1 \times H_1 \cong G_2 \times H_2$
- $G \times H \cong H \times G$
- $G \times (H \times K) \cong (G \times H) \times K$
- $|G \times H| = |G||H|$

$G \times H$ direkt szorzat esetén

$\hat{G} = \{(x, 1_H) \mid x \in G\}$ $\quad$ $\hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$

részcsoportjai a direkt szorzatnak

① $\hat{G}, \hat{H} \triangleleft G \times H$ és $\hat{G} \cong G$, $\hat{H} \cong H$

$(x,1) \in \hat{G}$ $\quad (x,1)^{(g,h)} = (g,h)^{-1}(x,1)(g,h) = (g^{-1}xg,\ h^{-1}1h) =$

$= (x^g, 1)$

$N \triangleleft G$, ha $\forall x \in G$ $\quad Nx = xN$

$x^{-1}Nx = N$

$= \{h^x \mid h \in N\}$

$\phi: \hat{G} \to G$ $\quad (x,1) \mapsto x$ izomorfia

② $G \times H / \hat{G} \cong H$ és $G \times H / \hat{H} \cong G$

③ $\hat{G} \cap \hat{H}$ a triviális részcsoport

$\hat{G} \cap \hat{H} = \{(1_G, 1_H)\}$

④ $\hat{G}$ és $\hat{H}$ együttesen generálja a direkt szorzatot

$(x, y) = (x, 1_H)(1_G, y)$

⑤ $\hat{G}$ és $\hat{H}$ elemei páronként felcserélhetőek

$(x, 1_H)(1_G, y) = (x, y) = (1_G, y)(x, 1_H)$

Fordítva: ha egy csoportban van két normális részcsoport, melyek metszete triviális, együttesen generálják az egész csoportot, elemeik páronként felcserélnek, akkor a csoport izomorf ezek direkt szorzatával.

Direkt szorzat nem feltétlenül kommutatív, de közel van hozzá.

Végtelen rendű ciklikus csoport $(\mathbb{Z}, +)$

n-edrendű —"— $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n \cdot m}$$

ha n és m relatív prím

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_4$$

$N = \prod_i p_i^{e_i} \qquad \mathbb{Z}_N \cong \bigtimes_i \mathbb{Z}_{p_i^{e_i}}$

minden véges ciklikus csoport prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzata

<u>Frobenius - Stickelberger tétel</u>: minden véges Abel-csoport előáll prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzataként

Végesen generált végtelen esetben végtelen ciklusok is előfordulhatnak

11.02

Lie-csoportok elmélete

Kontinuum számosságú csoportok:
Csoportelemek jellemzése valós paraméterekkel
pl. eltolások esetén transzlációs vektor
3 komponense, forgatás esetén 3 szög
minimális paraméterek száma a csoport dimenziója
Csoportelemek halmaza egy sokaság: minden
pontnak létezik egy euklideszi tér nyílt
részhalmazával homeomorf környezete.
paraméterek összessége: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
ehhez tartozó csoportelem: $g(\vec{\alpha})$

$$g(\vec{\alpha})\, g(\vec{\beta}) = g(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) \qquad \Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$g(\vec{\alpha})^{-1} = g(\Psi(\vec{\alpha})) \qquad \Psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

asszociativitás:

$$\left(g(\vec{\alpha})\, g(\vec{\beta})\right) g(\vec{\gamma}) = g(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))\, g(\vec{\gamma}) = g\left(\Phi(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \vec{\gamma})\right)$$

$$g(\vec{\alpha})\left(g(\vec{\beta})\, g(\vec{\gamma})\right) = g(\vec{\alpha})\, g(\Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma})) = g\left(\Phi(\vec{\alpha}, \Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma}))\right)$$

$$\Phi(\vec{\alpha}, \Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma})) = \Phi(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \vec{\gamma})$$

válasszuk a paraméterezést úgy, hogy
$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ az egységelem paramétervektora

$$g(\vec{0})\, g(\vec{\alpha}) = g(\vec{\alpha})\, g(\vec{0}) = g(\vec{\alpha})$$

$$\Phi(\vec{0}, \vec{\alpha}) = \Phi(\vec{\alpha}, \vec{0}) = \vec{\alpha}$$

inverz $\quad g(\Psi(\vec{\alpha}))\, g(\vec{\alpha}) = g\left(\Phi(\Psi(\vec{\alpha}), \vec{\alpha})\right) = g(\vec{0})$

$$\Phi(\Psi(\vec{\alpha}), \vec{\alpha}) = \vec{0} = \Phi(\vec{\alpha}, \Psi(\vec{\alpha}))$$

Lie-csoport: Φ és Ψ konvergens Taylor-sorba fejthető az egységelem egy megfelelő környezetében

Példák:

1) Valós számok additív csoportja $(\mathbb{R},+)$

$g(\alpha)=\alpha \qquad g(\alpha)g(\beta)=\alpha+\beta=g(\alpha+\beta)$

$$\Phi(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$$

$\Psi(\alpha)=-\alpha$

1 dimenziós Lie-csoport, kommutatív

2) Eltolások összessége 3 dimenziós térben

$g(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)=g(\vec{\alpha})$

$g(\vec{\alpha})\,\vec{r}=\vec{\alpha}+\vec{r} \qquad g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta})\,\vec{r}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{r}=g(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\,\vec{r}$

$\Phi(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

$\Psi(\vec{\alpha})=-\vec{\alpha}$

3 dimenziós kommutatív Lie-csoport

$(\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$ Descartes-szorzattal izomorf

3) Egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja: $U(1)$

$$U(1)=\{e^{i\alpha}\mid \alpha\in \cancel{[0,2\pi)}\ (-\pi,\pi)\}$$

$g(\alpha)=e^{i\alpha} \qquad g(\alpha)g(\alpha)=e^{i\alpha}e^{i\beta}=g(\alpha+\beta)$

$\Phi(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$ ha $|\alpha+\beta|<\pi$

$\Psi(\alpha)=-\alpha$

lokálisan izomorf csoportok → egységelem környezetében, $U(1)$ és $(\mathbb{R},+)$ lokálisan izomorfak

globális tulajdonságok különbözhetnek
topológiai

↳ kompaktság: határolatos és zárt a halmaz, akkor kompakt ⇒ $U(1)$ kompakt, $(\mathbb{R},+)$ nem

↳ összefüggőség: bármely két pontja között létezik folytonos görbe

⇒ $U(1)$ és $(\mathbb{R},+)$ is összefüggő

↳ egyszeres összefüggőség: bármely zárt görbe folytonosan összehúzható egy pontra
$(\mathbb{R},+)$ igen, $U(1)$ nem

4) Forgáscsoport: rögzített ponton átmenő tengelyek körüli 3 dimenziós forgatások
3 szöggel paraméterezhető
3 dimenziós, nem kommutatív Lie-csoport
kompakt, összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő
forgatás $A\vec{r}$ hossza nem változik
$AA^+ = A^+A = 1$

3×3 ortogonális mátrix $O(3)$
$O(3) \rightarrow$ forgatások + tükrözések
$\Rightarrow$ nem összefüggő
$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det A = 1\}$ forgáscsoport

5) $SU(2)$ csoport:
$SU(2)$ = 2×2-es, egységnyi determinánsú, unitér mátrixok
$A^+A = AA^+ = 1 \Rightarrow |\det A| = 1$
lokálisan izomorf a forgáscsoporttal
kompakt, összefüggő, egyszeresen összefüggő

6) Poincaré-csoport:
Minkowski-tér összes, az ívelemet invariánsnak hagyó transzformációja
fizikai téridő szimmetriacsoportja
↳ eltolások 4 dimenzióban (4 param.)
↳ forgatások → 6 param → térbeli 3 forgatás, Lorentz-boostok (3)

↳ tükrözések (nem folytonos paraméterek)
10 dimenziós Lie-csoport
(nem kommutatív)
nem összefüggő, nem kompakt

<u>Kanonikus paraméterezés</u>: minden Lie-csoportra ∃ 11.09.
$(\mathbb{R},+)$ $\Phi(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$

$$\Phi_k(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \alpha_k + \beta_k + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_k^{ij}\alpha_i\beta_j + \text{magasabb rendű tagok}$$

↓
struktúra állandók
↓
ebből az egész Taylor sorfejtés adott, minden tag meghatározható

c_k^{ij} - k úgy transzformálódnak, mint egy tenzor
① Antiszimmetria $c_k^{ij} = -c_k^{ji}$
② Jacobi-azonosság: $\sum_k \left(c_i^{jk}c_k^{lm} + c_i^{lk}c_k^{mj} + c_i^{mk}c_k^{jl}\right) = 0$
Ezeket kielégítő mennyiségek mindig egy Lie-csoport struktúra-állandói.
Tekintsünk egy n-dimenziós lineáris teret, amelynek $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ egy bázisa. Vezessünk be egy kétváltozós műveletet:

$$[X^i, X^j] = \sum_k c_k^{ij} X^k$$

↓
struktúra állandók

kommutátor $\left[\sum_l A_l X^l, \sum_m B_m X^m\right] = \sum_{l,m,k} c_k^{lm} A_l B_m X^k$
antiszimmetria: $[A,B] = -[B,A]$
Jacobi-azonosság: $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$
↝ lesz a Lie-algebra
Lie-algebra ismerete ≅ struktúra állandók ismerete
egyértelműen jellemzi a csoport lokális szerkezetét
lokális izomorfia erejéig meghatározó
<u>Infinitezimális generátorok</u>:

CSOPORTELMÉLET

11.09

Lie-transzformáció csoportokra: geometriai objektumot koordináta-transzformáció

pontok koordinátái $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$g(\vec{\alpha})\vec{x} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ $\quad x'_i$ függ $\vec{x}$ és $\vec{\alpha}$-tól

$g(\vec{\alpha})$ leképezések egy Lie-csoportot alkotnak

$\vec{\alpha} = \vec{0}$ az egységelem paramétervektora

$g(\vec{0}) \quad x'_i(\vec{x}, \vec{0}) = x_i$

Tekintsük $x'_i(\vec{x}, \vec{\alpha})$ $\vec{0}$ körüli Taylor-sorát:

$$x'_i(\vec{x}, \vec{\alpha}) = x_i + \sum_k B_i^k \alpha_k + \text{magasabb rendű tagok}$$

$B_i^k(\vec{x})$

$F(x_1, \dots, x_n)$, F egy tetszőleges fv-e a koordinátáknak

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F\left(x_1 + \sum_k B_1^k \alpha_k + \dots, \dots, x_n + \sum_k B_n^k \alpha_k + \dots\right) =$$

$$\approx F(x_1, \dots, x_n) + \sum_k \alpha_k F^k + \dots$$

$$F^k \to \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} B_i^k\right)$$

$\downarrow$ F-re ható elsőrendű parciális differenciáloperátor

Infinitezimális generátorok: $\mathcal{L}_k := \sum_i B_i^k(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\mathcal{L}_k \circ \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i \circ \mathcal{L}_k$ elsőrendű diff. operátor az $\mathcal{L}_j$-k lineáris kombinációja

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \sum_k c_k^{ij} \mathcal{L}_k$$

↳ Lie-csoport struktúra állandói

Egyenes eltolások:

$$g(\alpha)x = x + \alpha$$

$$F(\alpha + x) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \dots$$

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$$

Síkbeli forgatások:

$$g(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix}$$

$$F\left(\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y\right) =$$

$$\cong F(x-\alpha y, \alpha x + y) \cong F(x,y) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(-y) + \frac{\partial F}{\partial y}x\right)\alpha + \dots$$

$$\mathcal{L} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Egy infitezimális generátor esetén a Lie-algebra triviális

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$ transzlációinvariáns integrál

$\int_G f(g)\,dg = \int_G f(gh)\,dg \quad \forall h \in G$ transzlációinvariáns mérték

$= \int_G f(hg)\,dg$

általában nem létezik ilyen

Ha mégis (pl. kompakt csoportok), akkor Haar-mérték

Általában: ciklikus részcsoportok (egy adott elem hatványai)

Lie-csoportok esetén: <u>egyparaméteres alcsoportok</u>

$g: \mathbb{R} \to G$ $(\mathbb{R},+)$ homomorf képei a csoportban

$g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta)$ az egységet kis környezetében

Egy-egyértelmű (kapcsolat) megfeleltetés van az egyparaméteres alcsoportok és a Lie-algebra egydimenziós alterei között.

Egyszerű Lie-csoportok osztályozhatók

11.16

<u>Forgáscsoport</u> (3 dimenziós térben)

Rögzített ponton átmenő tengelyek körüli forgatások

minden forgatás lineáris koordináta transzformáció

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ A: 3×3-as ortogonális mátrix determinánsa pozitív

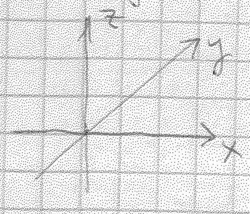
SO(3) (3×3 as egységnyi determinánsú, ortogonális mátrixok)

3 dimenziós csoport, 3 független paraméter

kompakt, összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő

Tetszőleges forgatás előáll 3 egymásra me-

merőleges tengely körüli forgatás ~~.......~~ szorzataként:



x körüli forgatással a tengely
~~beforgatható az xz síkba~~
y körüli forgatással z-vel párhuzamos tengely

infitezimális generátorokhoz elegendő az x, y, z tengely körüli forgatásokat nézni

x tengely körül:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x' = x \;,\quad y' = \cos(\alpha)\cdot y - \sin(\alpha)\, z \;,\quad z' = \sin(\alpha) y + \cos(\alpha) z$$

$$\qquad\qquad \simeq y - \alpha z \qquad\qquad\qquad \simeq \alpha y + z$$

$$F(x', y', z') = F(x, y - \alpha z, z + \alpha y) \simeq F(x, y, z) + \alpha\left(-z\frac{\partial F}{\partial y} + y\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\mathcal{L}_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{L}_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathcal{L}_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ egységvektor irányába mutató tengely esetén $\mathcal{L}_{\vec{n}} = n_x \mathcal{L}_x + n_y \mathcal{L}_y + n_z \mathcal{L}_z$

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] F(x,y,z) = \mathcal{L}_x(\mathcal{L}_y F) - \mathcal{L}_y(\mathcal{L}_x F) =$$

$$= \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}\right) =$$

$$= y\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \cancel{z\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}} - \cancel{x\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}\right) - z\left(\cancel{z\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}} - \cancel{x\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}}\right) -$$

$$- \cancel{z}\left(\cancel{y\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}} - \cancel{z\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}\right) + x\left(\cancel{y\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}} - \frac{\partial F}{\partial y} - \cancel{z\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}}\right) =$$

$$= y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = -\mathcal{L}_z F$$

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] = -\mathcal{L}_z \;,\quad [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_z] = \mathcal{L}_y \;,\quad [\mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z] = -\mathcal{L}_x$$

pl. $C_z^{xy} = -1$ struktúra állandók, Lie-algebra meghatározva

Forgáscsoportra invariáns fv-ek:

Infinitezimális forgatásokra is invariánsak

$F(x,y,z) = F(x',y',z) = F(x,y,z) + \alpha \mathcal{L}_x F \Rightarrow \mathcal{L}_x F = 0$

x körüli α szögű $\qquad \mathcal{L}_y F = \mathcal{L}_z F = 0$

$F(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2) \to$ egyváltozós fv.

minden invariáns ilyen alakú

Mik a sajátértékei $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z$-nek a négyzetesen integrálható fv-ek terén? →

Minden sajátérték tisztán képzetes

$J_k = -i\mathcal{L}_k$ önadjungált bázis

$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$ (kvantummechanikai imp. mom.)

Szimmetriatranszformációk infinitezimális generátorai a megmaradó mennyiség operátora

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ → nincs benne a Lie algebrában ez az operátor

$[J_k, J^2] = 0$

Legyen A asszociatív algebra: lineáris tér egy kétváltozós asszociatív és disztributív művelettel. A elemein definiáljuk az $[a,b] = ab - ba$ kommutátor műveletet. Ez teljesíti az antikommutativitást és a Jacobi azonosságot. Lie(A) az A elemeinek összessége ezzel a kommutátorral. Minden Lie algebra származtatható ilyen asszociatív algebrából, amelyek egymással izomorfak.

Adott L Lie-algebra fedőalgebrája olyan A asszociatív algebra, amelyre $L \cong \mathrm{Lie}(A)$

Infinitezimális generátorok polinomjai a fedőalgebra elemei

Casimir-operátor: fedőalgebra azon elemei, melyek kommutátora a Lie-algebra összes elemével zérus. pl. J^2

Forgáscsoport minden Casimir-operátora J^2 polinomja

Lokálisan izomorf Lie-csoportok Lie-algebrái megegyeznek.

Hogyan osztályozhatók az egymással lokálisan izomorf Lie-algebrák?

Kompakt, összefüggő egymással lokálisan izomorf csoportokat tekintünk. Pontosan egy egyszeresen összefüggő van közöttük (izomorfia erejéig) → jel: G_u

minden lokálisan izomorf csoport izomorf G_u/Z-vel, ahol $Z < Z(G_u)$ (=centrális részcsoportok szerinti faktorcsoport a többi)

$Z(G_u)$ véges részcsoportja G_u-nak

Univerzális fedőcsoport (lokális izomorfiaosztályé)

SU(2) a forgáscsoport esetén az univerzális fedőcsoport → 2x2-es egységnyi determinánsú unitér mátrixok

$Z(SU(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

két csoport ebben a lokális izomorfiaosztályban

$SU(2)$ és $SU(2)/Z \cong SO(3)$

$AA^+ = 1 \quad \det A = 1$

egységmátrixhoz "közeli" mátrix alakja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon G$$

G ← konst. mátrix

ε: kicsi param. $\in \mathbb{R}$

$$\det A = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} G \qquad \Rightarrow ① \operatorname{Tr} G = 0$$

spurtalan

$$A^+ = 1 + \varepsilon G^+$$

$$1 = (1+\varepsilon G)(1+\varepsilon G^+) = 1 + \varepsilon (G + G^+) + \dots \Rightarrow ② \; G^+ = -G$$

antiönadjungált

Minden ilyen (1, 2) mátrix a Pauli-mátrixok képzetes együtthatójú kombinációja

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$J_i \to \frac{1}{2i}\sigma_i$ azonosítható $\Rightarrow$ két csoport lokálisan izomorf

Ábrázoláselmélet

11.23.

G csoport V lineáris tér feletti ábrázolása $D: G \to GL(V)$ homomorfizmus (minden csoportelemhez hozzárendelünk egy műveletartó, invertálható, lineáris operátort)

$$D(xy) = D(x)D(y)$$
$$D(1) = id_V$$
$$D(x^{-1}) = D(x)^{-1}$$

Véges dimenziós lineáris teret jellemzi a dimenziója és az alaptest. $\dim D = \dim V$

Ábrázolás képe a $GL(V)$ részcsoportja $\{D(g) \mid g \in G\}$,

ábrázolás magja $\ker D = \{g \in G \mid D(g) = id_V\}$

$D(g) \cong G/\ker D$

Hű ábrázolás, ha $\ker D = \{1\}$

Példák: ① Legyen G csoport tetszőleges, V tetszőleges

$$D: G \to GL(V)$$
$$x \mapsto id_V$$

triviális ábrázolás (nincs információ)

② $G = GL(V)$ definiáló ábrázolás

$$D: GL(V) \to GL(V)$$
$$x \mapsto x$$

③ V egy n dimenziós lineáris tér

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázissal

$G = S_n$ az n-edfokú szimmetrikus csoport

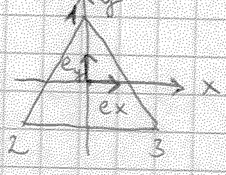
$D: S_n \to GL(V)$ $\quad x \in S_n \quad D(x): V \to V$

$x \mapsto D(x) \qquad e_i \mapsto e_{x(i)}$

$$D(xy)e_i = e_{(xy)(i)} = e_{x(y(i))} = D(x)\big(D(y)e_i\big) = \big(D(x)D(y)\big)e_i$$

S_n permutációs ábrázolása

(4) $G = D_3$



$\sigma_1 e_x = -e_x$

$\sigma_1 e_y = e_y$ $\qquad D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 e_x = \cos(60°)e_x + \sin(60°)e_y$

$\sigma_2 e_y = \cos(-30°)e_x + \sin(-30°)e_y$

$$D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

V_1 és V_2 lineáris terek izomorfak, ha $\exists$ $A: V_1 \to V_2$ invertálható lineáris leképezés.

$D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$ ábrázolások ekvivalensek, ha $\exists$ $A: V_1 \to V_2$ invertálható lineáris operátor: $AD_1(x) = D_2(x)A$ $\forall x \in G$-re.

alaptestek és dimenziók szükségszerűen megegyeznek

Speciálisan $D_1: G \to GL(V)$ és $D_2: G \to GL(V)$ ábrázolások ekvivalensek, ha $\exists$ $A \in GL(V)$, hogy $D_1(x) = A^{-1}D_2(x)A$ $\forall x \in G$-re.

Kontragrediens ábrázolás:

$D: G \to GL(V)$ $\qquad D^*: G \to GL(V^*)$

$x \mapsto D(x)$ $\qquad x \mapsto D^*(x)$

V^* a V duálisa (lineáris funkcionálok tere)

$D^*(x): \varphi \mapsto \varphi \circ D(x^{-1})$

ábrázolási mátrixok $D^*(x) = \big(D(x^{-1})\big)^T$

Direkt összeg:

V_1 és V_2 két lineáris tér $\rightarrow$ $V_1 \oplus V_2 = \{(x,y) \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$D_1 : G \rightarrow GL(V_1)$, $D_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ ábrázolások direkt összege $D_1 \oplus D_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$

$$x \mapsto D_1(x) \oplus D_2(x)$$

$$D_1(x) \oplus D_2(x)\big((a,b)\big) = \big(D_1(x)a,\ D_2(x)b\big)$$

$$\dim(D_1 \oplus D_2) = \dim D_1 + \dim D_2$$

Direkt összeg ekvivalenciaosztálya csak az összeadandók ekvivalenciaosztályától függ.

Direkt összeg asszociatív és kommutatív művelet

$$D_1 \oplus D_2 \cong D_2 \oplus D_1$$

$$D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$$

Invariáns altér:

$D : G \rightarrow GL(V)$ ábrázolás invariáns altere egy olyan $W \subseteq V$ lineáris altér, amelyet minden ábrázolási operátor önmagába képez.

$$D(x)\,W \subseteq W \quad \forall x \in G\text{-re}$$

Ábrázolási operátorok értelmezési tartománya leszűkíthető W-re: $D_W(x) : W \rightarrow W$ $\quad D_W : G \rightarrow GL(W)$ (invariáns

$$x \mapsto D_W(x)$$

ábrázolás)

Mindig invariáns V és $\{0\}$.

Reducibilis ábrázolás, ha létezik nem-triviális invariáns altér. Ellenkező esetben irreducibilis ábrázolás.

Reducibilitás függ a skalárok testétől

Továbbiakban komplex ábrázolásokat vizsgálunk

Maschke tétele: véges csoport minden véges dimenziós komplex ábrázolása előáll irreducibilis ábrázolások direkt összegeként sorrendtől eltekintve egyértelműen.

Peter-Weyl tétele: kompakt Lie-csoportokra is igaz a fenti állítás.

Teljesen reducibilis ábrázolás = irreducibilisek direkt összege

Projektív ábrázolások:

kvantumelméletben a (tiszta) állapotok a Hilbert-tér egydimenziós alterei

szimmetriákat realizáló operátorok csak skalárszorzó erejéig adottak.

$x, y \in G$ (szimmetriacsoport)

$$D(x)D(y) = \alpha(x,y)D(xy)$$

$$\underset{\text{ábrázolás kociklusa}}{\alpha : G \times G \to \mathbb{C}}$$

$D: G \to GL(V)$ leképezés $\downarrow$ projektív ábrázolás

11.30.

$D: G \to GL(V)$

két ábrázolás között az ekvivalencia reláció

$$\left.\begin{array}{l} D_1 : G \to GL(V_1) \\ D_2 : G \to GL(V_2) \end{array}\right\} \text{ekvivalensek} \qquad \begin{array}{l} A: V_1 \to V_2 \text{ bijektív} \\ AD_1(g) = D_2(g)A \quad \forall g \in G \end{array}$$

$W \subseteq V$ invariáns, ha $D(g)W \subseteq W$

Komplex számtest felett véges (kompakt Lie) csoport minden ábrázolása irreducibilisek direkt szorzata

Az irreducibilis ábrázolások alapján osztályozhatók.

Shur lemma: ha $D: G \to GL(V)$ irreducibilis és $A: V \to V$ olyan, hogy $AD(g) = D(g)A$ $\forall g \in G$-re, akkor

$A = \alpha \cdot id \quad \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$ ha egy operátor minden elemmel felcserélhető, akkor az egységop. számszorosa

pl: Wigner - Eckhart tétel

Projektív ábrázolás: olyan leképezés $D: G \to GL(V)$

$D(g)D(h) = \alpha(g,h)D(g,h) \qquad \alpha: G \times G \to \mathbb{C}$ kociklus

$D: G \to GL(V)$ - ből kör $\to D(1) =$ számszor$\cdot id$

normáljuk ehhez: $D(1) = id_V$

kociklusra (α)-ra adódó feltételek:

1) $\underset{id_V}{D(1)}D(h) = \alpha(1,h)D(h) \qquad \alpha(1,h) = 1$

hasonlóan $\alpha(g,1) = 1$ $\quad \forall h, g \in G$

2) $\underline{D(g_1)D(g_2)D(g_3)} \quad g_1, g_2, g_3 \in G$

lineáris operátorok szorzata asszociatív

$[D(g_1)D(g_2)]D(g_3) = D(g_1)[D(g_2)D(g_3)]$

① $= \alpha(g_1, g_2)D(g_1, g_2)D(g_3) = \alpha(g_1, g_2)\alpha(g_1g_2, g_3)D(g_1 * g_2 * g_3)$

② $= \alpha(g_1, g_3)\alpha(g_2g_3, g_1)D(g_1 * g_2 * g_3)$

$\alpha(g_1, g_2)\alpha(g_1g_2, g_3) \overset{!}{=} \alpha(g_2, g_3)\alpha(g_2g_3, g_1)$

$\to$ kociklus egyenlet

ilyen kociklusokhoz tudunk projektív ábrázolást rendelni

$D_1: G \to GL(V_1)$
$D_2: G \to GL(V_2)$ projektív ekvivalens, ha $A: V_1 \to V_2$ bijektív és $\lambda: G \to \mathbb{C} \quad \lambda(g)AD_1(g) = D_2(g)A$

$\uparrow$ általánosítható

nézzük meg, hogy a kociklusok tényleg jellemzik őket $\to$ $D: G \to GL(V)$ és $\tilde{D}: G \to GL(V)$ projektív ábrázolásokat, ahol $\tilde{D}(g) = \lambda(g)D(g)$, adott $\lambda: G \to \mathbb{C}$ komplex értékű fv. esetén

$$D(g)D(h) = \alpha(g,h)D(gh)$$

$$\tilde{D}(g)\tilde{D}(h) = \tilde{\alpha}(g,h)\tilde{D}(gh) = \tilde{\alpha}(g,h)\lambda(gh)D(gh)$$

"

$$\lambda(g)D(g)\lambda(h)D(h) = \lambda(g)\lambda(h)\alpha(g,h)D(gh)$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}(g,h)\lambda(gh) = \lambda(g)\lambda(h)\alpha(gh)$$

$$\tilde{\alpha} = \underbrace{\frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}}\alpha(gh)$$

ez az együttható $\Rightarrow$ kohomológ kociklusok, ha $\exists$ olyan λ amire ez teljesül

$H^2(G)$: kociklusok kohomológ osztályainak halmaza $\equiv$ Schur-multiplikátor

véges kompakt Lie-csoportokra véges halmaz

$\rightarrow$ nem csak halmaz, hanem Abel csoport a kociklusok pontonkénti szorzására

megfelelő csoportosztályok esetén $\forall$ G csoporthoz található olyan $\hat{G}$ csoport (G univerzális fedőcsoportja)

1) $Z(\hat{G}) \cong H^2(G)$

2) $\hat{G}/Z(\hat{G}) \cong G$

3) egy-egy értelmű megfeleltetés áll fenn G projektív és $\hat{G}$ közönséges ábrázolásai között

pl: kompakt Lie csoportok:

lokális izomorfia osztályban található egyetlen egyszeresen összefüggő csoport univerzális fedőcsoportja a többieknek

$SU(2)$, $SO(3)$ láttuk $SO(3) \cong SU(2)/Z(SU(2))$

forgáscsoport univerzális fedőcsoportja

tenzor ábrázolás: $SO(3)$ közönséges ábrázolása

spinábrázolások: $SO(3)$ projektív ábrázolása tenzorszorzat:

V_1 és V_2 lineáris terek feletti bilineáris funkcionál

$\Phi: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ mindkét argumentumában lineáris

$\Phi(a+b,c) = \Phi(a,c) + \Phi(b,c)$ bilineáris funkcionálok duálisa

$\Phi(\lambda a, b) = \lambda \Phi(a,b) = \Phi(a, \lambda b)$ a V_1 és V_2 tenzorszorzata

$\{e_1 \dots e_n\}$ V_1 bázisai
$\{f_1 \dots f_m\}$ V_2 bázisai
a V_1 és V_2 tenzorszorzata

$$e_i \otimes f_j : \Phi \to \Phi(e_i, f_j)$$

tenzorszorzat bázisa $(V_1 \otimes V_2)$ eleme a $V_1 \otimes V_2$-nek

$\{e_i \otimes f_j \mid i = 1 \dots n, \ j = 1 \dots m\}$

$D_1 \otimes D_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$

$g \mapsto D_1(g) \otimes D_2(g)$

$$A \times B : \underset{\in V_1}{e_i} \otimes \underset{\in V_2}{f_j} \mapsto Ae_i \otimes Bf_j$$

$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2$

tenzorszorzat tulajdonságai:

1) szorzat ekvivalencia osztályai a tényezők ekvivalencia osztályaitól függ

2) asszociatív, kommutatív és egységelem

$D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$

$D_2 \otimes D_1 \cong D_1 \otimes D_2$

Δ egységábrázolás $\Rightarrow \Delta \otimes D \cong D \otimes \Delta \cong D$

3) disztributív:

$D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \oplus (D_1 \otimes D_3)$

$\to$ tetszőleges ábrázolás az irreducibilisek segítségével felírható

4) ha D irreducibilis ábrázolás, akkor $D \otimes D^*$ tartalmazza az egységábrázolást

D^* a kontragrediens ábrázolás
→ nincsenek inverz elemei a szorzásnak
Ekvivalencia osztályok $\oplus$-szal és $\otimes$-tel fúziós gyűrűt alkotnak (az inverz elem miatt nem igazi gyűrű)

Ha minden ábrázolás teljesen reducibilis (irreducibilisek direkt összegeként áll elő), irreducibilis ábrázolások: $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \dots$

$$D = \bigoplus_{i=1}^{\dots} n_i \varepsilon_i$$ ← sorrendtől eltekintve egyértelmű

n_i: multiplicitás (százszor előfordulhat egy irreducibilis ábrázolás)

$$D_1 = \bigoplus_{i=1}^{\dots} n_i \varepsilon_i \quad \text{és} \quad D_2 = \bigoplus_i m_i \varepsilon_i$$

$$D_1 \otimes D_2 \cong \bigoplus_{ij} n_i m_j \underbrace{(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)}_{\bigoplus N_{ij}^k \varepsilon_k} = \bigoplus_{ij} n_i m_j \bigoplus_k N_{ij}^k \varepsilon_k =$$

N_{ij}^k: fúziós együtthatók → pozitív egészek

$$= \bigoplus_k \left(\sum_{ij} n_i m_j N_{ij}^k \right) \varepsilon_k$$

↑ Clebsch-Gordan sor

$\sigma: V \otimes V \to V \otimes V$
$a \otimes b \to b \otimes a$

$\sigma^2 = \mathbb{1}$ s.é. ± 1 → szimmetrikus és antiszimm. tenzorok altere

S^2V: $V \otimes V$ $+1$ s.é.-hez tartozó altere
$\Lambda^2 V$: $V \otimes V$ -1 — " —

$V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$

$D: G \to GL(V)$

$D \otimes D: G \to GL(V \otimes V)$
$g \mapsto D(g) \otimes D(g)$

$\sigma(D(g) \otimes D(g)): a \otimes b \mapsto D(g)b \otimes D(g)a$
$(\qquad)\sigma: a \otimes b \to D(g)b \otimes D(g)a$

(σ felcserélhető)

± 1 s.é. $\Rightarrow$ mind a kettő invariáns alteret generál

S^2V és $\Lambda^2 V$ invariáns altere $D\otimes D$-nek

S^2D és $\Lambda^2 D$ ábrázolásokat kapjuk

↳ antiszimmetrizált

↳ szimmetrizált

<u>Ábrázolások elágazási szabályai:</u> 12.07.

$D: G \to GL(V) \qquad H < G$

megszorítás H-ra $\quad D_H: H \to GL(V)$ ábrázolása H-nak

$h \mapsto D(h)$

$(D_1 \oplus D_2)_H = (D_1)_H \oplus (D_2)_H$

$(D_1 \otimes D_2)_H = (D_1)_H \otimes (D_2)_H$

$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i$

↳ irreducibilis ábrázolások

$D_H = \bigoplus_i n_i (I_i)_H \qquad (I_i)_H = \bigoplus_j B_i^j K_j$ → elágazási szabályok $\forall i$

multiplicitások (nemnegatív egész)

H részcsoport irreducibilis ábrázolásai

<u>Invariáns elmélet alaptétele:</u>

Egy végesen generált csoport két n dimenziós ábrázolása akkor és csak akkor ekvivalens, ha az ábrázolási operátorok spurjai megegyeznek a csoportelemek egy véges részhalmazán

$D_1: G \to GL(V_1) \qquad D_2: G \to GL(V_2) \qquad \dim V_1 = \dim V_2$

$D_1 \cong D_2$ ha $\exists\, G_n \subseteq G \quad |G_n| < \infty \;: \mathrm{Tr}\, D_1(g) = \mathrm{Tr}\, D_2(g) \quad \forall g \in G_n$

Ha G véges csoport, akkor vehetjük $G_n = G$-t.

<u>A csoportábrázolás karaktere:</u> $\quad \chi_D: G \to \mathbb{C}$

$g \mapsto \mathrm{Tr}\, D(g)$

$\Rightarrow$ két ábrázolás ekvivalens, ha karaktereik megegyeznek

Az ábrázolás karaktere osztályfv.

12.07

$$\chi_D(h^{-1}gh) = \chi_D(g) \qquad \forall\, g,h \in G$$

$$\mathrm{Tr}\, D(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}\left(D(h^{-1})D(g)D(h)\right) = \mathrm{Tr}\left(D(g)\underbrace{D(h)D(h^{-1})}_{id}\right) = \mathrm{Tr}\, D(g)$$

$$\chi_D(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\left(D(g^{-1})\right) = \mathrm{Tr}\left(D(g)^{-1}\right)$$

$\exists$ n pozitív egész, hogy $g^n = 1$ $\qquad D(g^n) = D(g)^n = id_V$

$\Rightarrow$ minden sajátérték n-dik egységgyök

sajátérték abszolút értéke 1

Ha $|z| = 1$, akkor $\frac{1}{z} = z^*$

$$\chi_D(g^{-1}) = \dots = \chi_D(g)^*$$

$$\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$$

$$\chi_{D_1 \otimes D_2} = \chi_{D_1} \chi_{D_2} \quad \text{(pontonkénti szorzat)}$$

$D = \bigoplus_i n_i I_i$ irreducibilis dekompozíció ismeretével

$\chi_D = \sum_i n_i \chi_{I_i}$ karaktert is tudjuk

tehát az irreducibilis ábrázolásokat és azok karaktereit kell meghatározni

Csoport karaktertáblája: G véges csoport irreducibilis ábrázolásainak karakterei

	C_1	C_2	$\dots$	C_r
I_1	1	1	$\dots$	1
I_2				
$\vdots$	$\dim I_i$	$\chi_{I_i}(C_j)$		
I_n				

$\to$ konjugált osztályok

irreducibilis ábrázolások száma = konjugált osztályok száma

általában $C_1 = \{1\}$ triviális osztály

$I_1 = 1$ egységábrázolás

első sor $1,1,\dots,1$, első oszlop $\dim I_i$

Példa:

D_3	$\{1\}$	$\{C, C^{-1}\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\sum_g \lvert X_{I_i}(g)\rvert^2$
$\underline{1}$	1	1	1	6
$\underline{1}^*$	1	1	-1	6
$\underline{2}$	2	-1	0	6
$\sum_i \lvert X_{I_i}(C_j)\rvert^2$	6	3	2	

Ortogonalitási relációk: (pl: $\overset{\text{irr. ábr.}}{I_i} \to \overset{\text{karaktere}}{X_i}$)

1) $$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} X_i(g)X_j(g)^* = \delta_{ij}$$

2) $$\sum_i X_i(g)X_i(h)^* = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{ha } g \text{ és } h \text{ konjugált} \\ 0 \end{cases}$$

ha $g=h=1$ akkor $\sum_i X_i(1)^2 = \sum_i (\dim I_i)^2 = |G|$ Burnside tétel

Véges Abel-csoportok esetén minden konjugált osztály egyelemű $\Rightarrow$ irreducibilis ábrázolások száma a csoport rendje $\Rightarrow$ minden irreducibilis ábrázolás dimenziója 1

Két osztályfüggvényre $f: G\to\mathbb{C}$, $F: G\to\mathbb{C}$

$$f(h^{-1}gh) = f(g), \quad F(h^{-1}gh) = F(g)$$

$\langle f, F\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)F(g)^*$ skalárszorzat az osztályfüggvények terén.

Irreducibilis karakterek ortonormált bázist alkotnak.

$$D = \bigoplus_i n_i I_i$$

$$X_D = \sum_i n_i X_i$$

$$\langle X_D, X_j\rangle = \langle \sum_i n_i X_i, X_j\rangle = \sum_i n_i \langle X_i, X_j\rangle = \sum_i n_i \delta_{ij} = n_j$$

Fúziós együtthatók

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}^k I_k \qquad N_{ij}^k = \langle X_{I_i\otimes I_j}, X_k\rangle = \langle X_i X_j, X_k\rangle =$$

$$N_{ij}^k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} X_i(g)X_j(g)X_k(g)^*$$

$H < G \quad (I_i)_H = \bigoplus_\alpha B_i^\alpha E_\alpha$

H irreducibilis ábrázolásai

$\chi_{D_H} = (\chi_D)_H$

$(\chi_i)_H = \sum_\alpha B_i^\alpha \chi_{E_\alpha}$

$B_i^\alpha = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_i(h) \chi_{E_\alpha}(h)^*$

Pl: D_3

$H = \{1, \sigma_1\}$

H	$\{1\}$	$\{\sigma_1\}$
1	1	1
1α	1	-1
$(1)_H$	1	1
$(1^*)_H$	1	-1
$(2)_H$	2	0

$(1)_H = 1$ (mindig)

$(1^*)_H = 1_\alpha$

$(2)_H = 1 \oplus 1_\alpha$

$\langle (1)_H, 1 \rangle = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$\langle (1)_H, 1_\alpha \rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

$\langle (2)_H, 1 \rangle = 1 \qquad \langle (1^*)_H, 1 \rangle = 0$

$\langle (2)_H, 1_\alpha \rangle = 1 \qquad \langle (1^*)_H, 1_\alpha \rangle = 1$

Clebsch-Gordon sor D_3 esetében

$\underline{2} \otimes \underline{2}$ karaktere

$\underline{2}$	2	-1	0
$\underline{2} \otimes \underline{2}$	4	1	0

$\langle (\underline{2} \otimes \underline{2}), \underline{1} \rangle = \frac{1}{6}(4+2+0) = 1$

$\langle (\underline{2} \otimes \underline{2}), \underline{1}^* \rangle = \frac{1}{6}(4+2+0) = 1$

$\langle (\underline{2} \otimes \underline{2}), \underline{2} \rangle = \frac{1}{6}(8-2+0) = 1$

$\underline{2} \otimes \underline{2} = \underline{1} \oplus \underline{1}^* \oplus \underline{2}$

$\otimes$	$\underline{1}$	$\underline{1}^*$	$\underline{2}$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}^*$	$\underline{2}$
$\underline{1}^*$	$\underline{1}^*$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1} \oplus \underline{1}^* \oplus \underline{2}$

$D: G \to GL(V)$ homomorfizmus magja egy normális részcsoport ($\ker D \triangleleft G$)

I_i -k a G irreducibilis ábrázolásai

$\ker I_i = \{ g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1) \} \triangleleft G$

G minden normális részcsoportja ezeknek a magoknak a metszeteként áll elő.

Kommutátor részcsoport: $G' = \langle [x,y] \mid x,y \in G \rangle =$

$$= \bigcap_{\chi_i = 1} \ker \Gamma_i$$

V lineáris tér $\{e_i\}$ bázisa

$$D(g)e_i = \sum_j [D(g)]_{ij} e_j$$

komplex számok (spec. valós számok)

Valós ábrázolás, ha létezik olyan $\{e_i\}$ bázis, amelyben minden ábrázolási mátrixelem valós.

Valós ábrázolás karaktere csak valós értékeket vehet föl.

Komplex: karakter komplex értékű

pszeudovalós ábrázolás: karakter valós értékű, de az ábrázolás nem valós

Irreducibilis ábrázolás esetén Frobenius - Schur - indikátor: $\nu_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^2)$

$\nu_i = 0$ komplex ábrázolás

$\nu_i = 1$ valós –"–

$\nu_i = -1$ pszeudovalós –"–

Ábrázolás csak akkor valós, ha minden irreducibilis komponense valós.

Invariáns elmélet:

$A \in M_n(\mathbb{C})$ ($n \times n$-es komplex mátrix)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$x_i' = \sum_j A_{ij} x_j$$

$f^A(x_1, \dots, x_n) = f(x_1', \dots, x_n')$

Legyen f polinom, azaz az x_i-k szorzatainak lineárkombinációja

f invariáns A-ra, ha $f^A(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

pl: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f^A(x_1, x_2) = f(x_2, -x_1) = f(x_1, x_2)$$

$D: G \to GL(V)$ ábrázolás $\{e_i\}$ bázisra vonatkozó ábrázolási mátrixainak közös invariánsai

$$f^{D(g)} = f \quad \forall g \in G$$

$R^G = \{f \mid f^{D(g)} = f \ \forall g \in G\}$ invariáns gyűrű

zárt az összeadásra és a szorzásra

<u>Szimmetrikus polinomok:</u>

$G = S_n$

$D: G \to GL(V)$ V bázisa $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$D(g)e_i = e_{g(i)}$$

$[D(g)]_{ij} = \delta_{j g(i)}$

R^G elemei a szimmetrikus polinomok

$f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \forall g \in S_n$

$k \geq 0$ esetén

$P_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ hatványösszeget

$x_1 x_2 \dots x_n$ is szimm.

elemi szimmetrikus polinom

$$0 \leq k \leq n \qquad S_k(x_1, \dots, s_n) = \sum_{\substack{I \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \\ |I| = k}} \left(\prod_{w \in I} w\right)$$

Homogén polinom: $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$

(k-ad fokú homogén polinom)

Minden polinom egyértelműen előállítható különböző fokszámú homogén polinomok összegeként.
Invariáns polinomok homogén komponensei is invariánsak
Szimmetrikus polinomok alaptétele:
Tetszőleges n változós szimmetrikus polinom egyértelműen előállítható akár a $p_1, \dots, p_n$ hatványösszegek, akár az $s_1, \dots, s_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_f(p_1, \dots, p_n) = Q_f(s_1, \dots, s_n)$$

$s_i = p_k$-k polinomja
$p_k = s_i$-k -"- } (Newton formulák)

$\{p_1, \dots, p_n\}$ vagy $\{s_1, \dots, s_n\}$ fundamentális invariánsok véges rendszere
fundamentális invariánsok algebrailag függetlenek
nem létezik olyan $R \neq 0$ n változós polinom, hogy
$R(p_1, \dots, p_n) = 0$ legyen
Általában véges csoportok komplex ábrázolásaira létezik a fundamentális invariánsoknak véges halmaza, de ezek általában nem függetlenek
Noether tétele: mindig választható olyan rendszer, melynek elemei $|G|$-nél nem nagyobb fokszámú homogén polinomok
Adott k fokszámú homogén invariánsok száma ?
Sorozat generátorfüggvénye

$$\mathcal{H}_G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

↑ ~~k-ad fokú invariánsok száma~~ ×

* f_k = k-adfokú független homogén invariánsok száma

$f_0 = 1$

$\mathcal{H}_G$ = Hilbert - Poincaré sor

konvergens sor a 0 környezetében

Molien tétele: $$\mathcal{H}_G(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - zD(g))}$$

(1 a konvergenciasugár, mert a sajátértékek 1 abszolút értékű komplex számok, ahol pólus lesz)