Csoporthatások

1 Alapfogalmak

G csoport hatása az X halmazon egy olyan $\boldsymbol{\mu}\colon G\times X\to X$ leképezés, amelyre teljesül

$$\boldsymbol{\mu}(g,\boldsymbol{\mu}(h,x)) = \boldsymbol{\mu}(gh,x)$$

és

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{1}_G,x) = x$$

minden $g,h\in G$ és $x\in X$ esetén.

Multiplikatív jelölés: $\boxed{gx = \boldsymbol{\mu}(g,x)}$ ha $g\in G$ és $x\in X$.

Multiplikatív jelölésmódban a csoporthatás definíciójában szereplő feltételek

$$g(hx) = (gh)x$$

és

$$\mathbf{1}_G x = x$$

Észrevétel. Az egyes $g \in G$ elemekre értelmezett

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_g : X &\to X \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

leképezések bijektívek, és teljesül $\boldsymbol{\mu}_g \circ \boldsymbol{\mu}_h = \boldsymbol{\mu}_{gh}$, azaz

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\mu}} : G &\to \mathsf{Sym}(X) \\ g &\mapsto \boldsymbol{\mu}_g \end{aligned}$$

egy műveletartó leképezés (hatás-homomorfizmus).

Példák:

1. $\boldsymbol{\nu}_X$ triviális hatás, ahol $gx = x$ minden $g \in G$ és $x \in X$-re.
2. G csoport

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_G : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_G : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto hg^{-1} \end{aligned}$$

   bal-, ill. jobbreguláris hatása önmagán.

3. Lineáris csoportok hatása vektorok összességén.
4. Geometriai alakzat szimmetriacsoportjának hatása pontjainak, ill. kitüntetett részalakzatainak (csúcspontok, élek, stb.) halmazain.
5. G csoport $H < G$ részcsoporthoz tartozó

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{G/H} : G \times (G/H) &\to G/H \\ (g, xH) &\mapsto (gx)H \end{aligned}$$

   coset-hatása a (baloldali) mellékosztályok G/H halmazán.

$\boldsymbol{\mu}_1 : G \times X_1 \to X_1$ és $\boldsymbol{\mu}_2 : G \times X_2 \to X_2$ csoporthatások ekvivalensek, jelben $\boldsymbol{\mu}_1 \cong \boldsymbol{\mu}_2$, ha létezik olyan $\boldsymbol{\lambda} : X_1 \to X_2$ bijektív leképezés, hogy $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_2 = \boldsymbol{\lambda} \circ \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_1$, vagyis $\boldsymbol{\lambda}(gx) = g\boldsymbol{\lambda}(x)$ minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén.

Észrevétel. Ekvivalens hatások alaphalmazainak számossága megegyezik.

Feladat: adott csoport összes hatásának osztályozása ekvivalencia erejéig.

Példák:

1. $\boldsymbol{\nu}_X$ és $\boldsymbol{\nu}_Y$ triviális hatások ekvivalensek, ha $|X| = |Y|$.

2. $\boldsymbol{\lambda}_G$ bal- és $\boldsymbol{\rho}_G$ jobbreguláris hatások mindig ekvivalensek.

3. $\boldsymbol{\mu}_{G/H}$ és $\boldsymbol{\mu}_{G/K}$ coset-hatások akkor ekvivalensek, ha H és K konjugált részcsoportjai G-nek.

2 Az orbit-stabilizátor–tétel

$\emptyset \neq W \subset X$ stabil részhalmaz, ha $gW = W$ minden $g \in G$-re, ahol

$$gW = \{gx \mid x \in W\}$$

Hatás leszűkítése egy $W \subset X$ stabil részhalmazra:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_W : G \times W &\to W \\ (g, x) &\mapsto \boldsymbol{\mu}(g, x) \end{aligned}$$

Pálya: minimális stabil részhalmaz.

Pályák partíciónálják X-et: két pálya vagy megegyezik egymással, vagy diszjunkt, és uniójuk kiadja X-et $\rightsquigarrow$ egyazon pályához tartozni egy ekvivalencia-reláció, és minden stabil részhalmaz előáll pályák uniójaként.

Kvóciens-tér: pályák összessége

$$G\backslash X = \{Gx \mid x \in X\}$$

$$\boxed{x_1, x_2 \in X \text{ egyazon pályához tartozik} \iff x_2 = gx_1 \text{ valamely } g \in G\text{-re}}$$

Egy hatás tranzitív, ha csak egy pálya van (maga az X alaphalmaz), azaz a kvóciens-tér egyelemű.

Hatás leszűkítése egy pályára mindig tranzitív.

Minden coset–hatás tranzitív (ideértve a reguláris hatásokat is)!

$$\boxed{\text{Ha } gx = x, \text{ akkor } \begin{cases} x \in X & \text{fixpontja} \quad g \in G\text{-nek} \\ g \in G & \text{stabilizálja} \quad x \in X\text{-et} \end{cases}}$$

$g \in G$ csoportelem fixpont-halmaza

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$x \in X$ pont stabilizátora

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\} = G_x$$

Példa. A $\boldsymbol{\mu}_{G/H}$ coset–hatás esetén

$$\mathrm{Fix}(g) = \{xH \mid g^x \in H\}$$

míg az xH mellékosztály stabilizátora

$$\mathrm{Stab}_G(xH) = xHx^{-1}$$

Észrevétel. Stabilizátor mindig részcsoportja G-nek, $G_x < G$, mert $g, h \in \mathrm{Stab}_G(x)$ esetén $\left(gh^{-1}\right)x = g\left(h^{-1}x\right) = gx = x$.

$$\mathrm{Fix}\big(hgh^{-1}\big) = h\mathrm{Fix}(g) \quad \text{és} \quad \mathrm{Stab}\,(gx) = g\ \mathrm{Stab}\,(x)\,g^{-1}$$

Egyazon pályához tartozó pontok stabilizátorai egymás konjugáltjai.

Orbit-stabilizátor–tétel: bijektív megfeleltetés létezik egy $x \in X$ pont

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

pályája (orbitja) és stabilizátorának (baloldali) mellékosztályai között.

$$Gx \leftrightsquigarrow G/G_x$$

Következmények:

1. pálya hossza (számossága) = stabilizátor részcsoport indexe

$$\big|Gx\big| = [G : G_x]$$

2. $\boxed{\text{minden tranzitív hatás ekvivalens egy coset–hatással!}}$

$$\boldsymbol{\mu} \cong \boldsymbol{\mu}_{G/G_x} \quad \text{bármely } x\text{-re}$$

3 Hatások összege és szorzata

A páronként diszjunkt X_i halmazok $(i \in I)$ feletti $\boldsymbol{\mu}_i : G \times X_i \to X_i$ csoporthatások $\boldsymbol{\mu} = \oplus_{i \in I} \boldsymbol{\mu}_i$ összege a

$$\boldsymbol{\mu}\,(g, x) = \boldsymbol{\mu}_i(g, x) \text{ ha } x \in X_i$$

módon értelmezett hatás az $\bigcup_{i \in I} X_i$ halmazon.

Összeghatás ekvivalenciaosztálya csak a tagok osztályaitól függ, továbbá

$$\boldsymbol{\mu}_1 \oplus (\boldsymbol{\mu}_2 \oplus \boldsymbol{\mu}_3) \cong (\boldsymbol{\mu}_1 \oplus \boldsymbol{\mu}_2) \oplus \boldsymbol{\mu}_3$$

és

$$\boldsymbol{\mu}_2 \oplus \boldsymbol{\mu}_1 \cong \boldsymbol{\mu}_1 \oplus \boldsymbol{\mu}_2$$

Tranzitív dekompozíció: minden hatás felbontható tranzitív hatások összegére (sorrend erejéig egyértelműen)!

$$\boldsymbol{\mu} = \bigoplus_{W \in G \backslash X} \boldsymbol{\mu}_W$$

Minden $\boldsymbol{\mu}_W$ tranzitív összetevő ekvivalens egy $\boldsymbol{\mu}_{G/H}$ coset–hatással, ahol H a W valamely pontjának stabilizátora.

Pályák $\hookrightarrow$ stabilizátorok $\hookrightarrow$ tranzitív összetevők (multiplicitással).

Egy-egyértelmű kapcsolat hatások ekvivalencia-osztályai és részcsoportok konjugált osztályain értelmezett számosságértékű függvények között!

$\boldsymbol{\mu}_1 : G \times X_1 \to X_1$ és $\boldsymbol{\mu}_2 : G \times X_2 \to X_2$ csoporthatások $\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2$ szorzata a

$$(\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2)(g, (x_1, x_2)) = (\boldsymbol{\mu}_1(g, x_1), \boldsymbol{\mu}_2(g, x_2))$$

azaz

$$g(x_1, x_2) = (gx_1, gx_2)$$

módon értelmezett hatás az $X_1 \times X_2$ halmazon.

Példa. Triviális hatások szorzata szintén triviális, $\boldsymbol{\nu}_X \times \boldsymbol{\nu}_Y \cong \boldsymbol{\nu}_{X \times Y}$; továbbá, ha X egy n számosságú véges halmazt jelöl, akkor

$$\boldsymbol{\nu}_X \times \boldsymbol{\mu} = \underbrace{\boldsymbol{\mu} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{\mu}}_{n}$$

Szorzathatás ekvivalenciaosztálya csak a tényezők osztályától függ, továbbá

$$\boldsymbol{\mu}_1 \times (\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_3) \cong (\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2) \times \boldsymbol{\mu}_3$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_1 \cong \boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2$$

és

$$\boldsymbol{\mu}_1 \times (\boldsymbol{\mu}_2 \oplus \boldsymbol{\mu}_3) \cong (\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2) \oplus (\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_3)$$

Burnside–gyűrű: hatások ekvivalencia-osztályainak összessége a hatások összegének és szorzatának műveletével (valójában félgyűrű).

Elég ismerni a tranzitív hatások szorzatainak tranzitív dekompozícióit

$$\boldsymbol{\mu}_i \times \boldsymbol{\mu}_j = \bigoplus_k \mathcal{N}_{ij}^k \boldsymbol{\mu}_k$$

fúziós szabályok

$\mathcal{N}_{ij}^k$ nemnegatív egész multiplicitások a struktúraállandók.

4 Permutációs hatások

Permutációs hatás: véges halmazon értelmezett csoporthatás (hatás foka = alaphalmaz számossága).

Minden $\phi\colon G \to \mathbb{S}_n$ homomorfizmus egy permutációs hatásból származik.

$$\boxed{\text{tranzitív hatások} \leftrightsquigarrow \text{részcsoportok konjugált osztályai}}$$

$\rightsquigarrow$ véges csoportnak csak véges sok inekvivalens tranzitív hatása van!

Reguláris hatás: olyan tranzitív hatás, melyben csak az egységelemnek vannak fixpontjai (triviális részcsoporthoz tartozó coset–hatás).

Cayley tétele: minden véges csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Cauchy-Frobenius–lemma: pályák száma = fixpontok átlagos száma

$$\boxed{|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|}$$

Egy ekvivalencia-reláció a hatással kompatibilis, ha $x\cong y$ esetén minden $g\in G$-re $gx\cong gy$.

Tranzitív hatás esetén egy-egyértelmű kapcsolat hatással kompatibilis ekvivalenciák és stabilizátort tartalmazó részcsoportok között.

Egy permutációs hatás k-tranzitív, ha tranzitív az

$$X^{\{k\}}=\{(x_1,\ldots,x_k)\mid x_i\in X,\ x_i\neq x_j\}$$

halmazon a $g(x_1,\ldots,x_k)=(gx_1,\ldots,gx_k)$ komponensenkénti hatás.