Ábrázoláselmélet

1. Bevezetés

G csoport ábrázolása a V lineáris téren egy $D\colon G\to\mathsf{GL}(V)$ homomorfizmus G-ből a V összes invertálható lineáris operátorából álló

$$\mathsf{GL}(V)=\{A\colon V\to V \mid \det A\neq 0\}$$

általános lineáris csoportba.

Skalárok teste az ábrázolás alapteste (komplikációk, ha $\neq\mathbb{C}$), V dimenziója (azaz tetszőleges bázisának számossága) az ábrázolás dimenziója.

Ábrázolás képe mindig lineáris csoport, azaz $\mathsf{GL}(V)$ egy részcsoportja (elemei lineáris operátorok, az operátorok szorzásával mint művelettel); homomorfizmus-tétel következtében a kép izomorf az ábrázolás magja szerinti faktorcsoporttal.

Egy ábrázolás hű, ha magja triviális (hű ábrázolás képe a G-vel izomorf lineáris csoport).

$D(g)$ ábrázolási operátorok lineárisak $\rightsquigarrow$ lineáris algebrai módszerek (spektrálfelbontás, stb.) használhatók vizsgálatukra.

Példák:

1. Tetszőleges G csoport minden eleméhez a V lineáris tér egységoperátorát rendelve a V feletti triviális ábrázolást kapjuk.

2. Egy $G < \mathsf{GL}(V)$ lineáris csoport esetén a

$$\begin{aligned} D_G : G &\to \mathsf{GL}(V) \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

leképzés a definiáló ábrázolás.

3. Jelölje $\mathbb{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ az X-en értelmezett komplex értékű függvények lineáris terét a pontonkénti műveletekkel, azaz legyen $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ minden $f, g \in \mathbb{C}(X)$-re.

Ha adott a G csoportnak egy $\boldsymbol{\mu}$ permutációs hatása az X halmazon, akkor

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\mu}}(g) : \mathbb{C}(X) &\to \mathbb{C}(X) \\ f \quad &\mapsto f^g \end{aligned}$$

egy lineáris operátor $\mathbb{C}(X)$-en minden $g \in G$-re, ahol $f^g(x) = f\left(g^{-1}x\right)$ és a

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\mu}} : G &\to \mathsf{GL}(\mathbb{C}(X)) \\ g &\mapsto D_{\boldsymbol{\mu}}(g) \end{aligned}$$

leképezés egy $\dim D_{\boldsymbol{\mu}} = \left|X\right|$ dimenziós ábrázolás, a $\boldsymbol{\mu}$ hatáshoz asszociált permutációs ábrázolás.

Ábrázoláselmélet fizikai jelentősége: szimmetriák a kvantumelméletben!

Fizikai rendszer szimmetriái a dinamikával (időfejlődéssel) felcserélhető állapottranszformációk (mozgásegyenletek megoldásait másik megoldásba transzformálják).

Valószínűségek megmaradása + Schrödinger-egyenlet $\rightsquigarrow$

Wigner tétele: szimmetriák a Hamilton-operátorral (időfejlődés generátora) kommutáló unitér (vagy antiunitér) operátorok.

Antiunitér operátorok időtükrözésből.

Állapotvektorok csak egy skalárszorzó erejéig határozottak $\rightsquigarrow$ projektív ábrázolások.

2. Ekvivalencia, reducibilitás

$D_1 : G \to \mathsf{GL}(V_1)$ és $D_2 : G \to \mathsf{GL}(V_2)$ ábrázolások ekvivalensek, jelben $D_1 \cong D_2$, ha létezik olyan $A : V_1 \to V_2$ invertálható lineáris leképezés, hogy $D_2(g)A = AD_1(g)$ minden $g \in G$-re.

Ekvivalens ábrázolások dimenziója megegyezik.

Ekvivalens ábrázolások lényegében nem különböznek, a csoportelemek ábrázolási mátrixai megegyeznek (más-más bázisra vonatkoztatva).

Feladat: csoport összes ábrázolásainak osztályozása ekvivalencia erejéig.

$W \subseteq V$ invariáns altere a $D : G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolásnak ha $D(g)x \in W$ minden $g \in G$ és $x \in W$ esetén (zérusaltér és maga V triviálisan invariáns).

Ha $W \subseteq V$ (nem-triviális) invariáns altere $D\colon G \to \mathsf{GL}(V)$-nek, akkor minden $D(g)$ ábrázolási operátor esetén értelmezhetők

$$\begin{aligned} D^W(g) : W &\to W \\ x &\mapsto D(g)x \end{aligned}$$

redukált, illetve

$$\begin{aligned} D^{V/W}(g) : V/W &\to V/W \\ x + W &\mapsto D(g)x + W \end{aligned}$$

faktorált operátorok, és a

$$\begin{aligned} D^W : G &\to \mathsf{GL}(W) \\ x &\mapsto D^W(g)x \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} D^{V/W}(g) : G &\to \mathsf{GL}(V/W) \\ x &\mapsto D^{V/W}(g)x \end{aligned}$$

hozzárendelések a G csoportnak egy-egy ábrázolását definiálják: a D ábrázolás W invariáns altérre történő redukcióját, illetve W szerinti faktorát.

Egy $W \subseteq V$ altér minden $\mathbf{B}_W$ bázisa kiegészíthető (sokféleképpen) az egész tér egy $\mathbf{B}_V \supseteq \mathbf{B}_W$ bázisává, és $\mathbf{B}_V \backslash \mathbf{B}_W$ elemeinek megfeleltethetők a V/W faktortér egy bázisának elemei. A $\mathbf{B}_V$ bázisra vonatkoztatott ábrázolási mátrixok alakja

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^W(g) & T(g) \\ 0 & D^{V/W}(g) \end{pmatrix}$$

Egy $D\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolás reducibilis, ha létezik nem-triviális invariáns altere, egyébként irreducibilis (ekvivalencia-osztály jellemzője).

Minden egydimenziós ábrázolás irreducibilis!

Schur-lemma: ha $A \in \mathsf{GL}(V)$ felcserélhető a $D\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ irreducibilis ábrázolás összes ábrázolási operátorával, azaz $AD(g) = D(g)A$ minden $g \in G$-re, akkor A az egységoperátor skalárszorosa.

Fizikai alkalmazás: energia-sajátértékek degenerációja.

3. Ábrázolások direkt összege

Rendezett párok $V_1 \oplus V_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$ halmaza lineáris teret alkot a

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2)\end{aligned}$$

komponensenkénti műveletekkel, a V_1 és V_2 lineáris terek direkt összegét.

Dimenzió additív: $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

$A_1 : V_1 \to W_1$ és $A_2 : V_2 \to W_2$ lineáris operátorok direkt összege

$$\begin{aligned}A_1 \oplus A_2 : V_1 \oplus V_2 &\to W_1 \oplus W_2\\ (x_1, x_2) &\mapsto (A_1 x_1, A_2 x_2)\end{aligned}$$

$D_1 : G \to \mathsf{GL}(V_1)$ és $D_2 : G \to \mathsf{GL}(V_2)$ ábrázolások direkt összege

$$\begin{aligned} D_1 \oplus D_2 : G &\to \mathsf{GL}(V_1 \oplus V_2) \\ g &\mapsto D_1(g) \oplus D_2(g) \end{aligned}$$

Direkt összeg ekvivalencia-osztálya csak az összeadandók ekvivalencia-osztályától függ, dimenziója a dimenziók összege, továbbá

$$D_1 \oplus D_2 \cong D_2 \oplus D_1$$
$$D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$$

Teljesen reducibilis ábrázolás: előáll irreducibilisek direkt összegeként.

Példa: minden triviális ábrázolás teljesen reducibilis, mert felbontható egydimenziós triviális ábrázolások direkt összegére.

Irreducibilis dekompozíció:

$$D = \bigoplus_{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)} n_{\mathbf{i}} \mathbf{i}$$

ahol $n_{\mathbf{i}} \in \mathbb{Z}_+$ az $\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)$ irreducibilis ábrázolás multiplicitása.

$\mathbb{Z}_+$ értékű függvények $\mathsf{Irr}(G)$-n $\leftrightsquigarrow$ teljesen reducibilis ábrázolások

Maschke tétele: véges csoport minden ábrázolása (komplex számtest felett!) teljesen reducibilis.

Peter-Weyl–tétel: kompakt Lie–csoport minden ábrázolása (komplex számtest felett!) teljesen reducibilis.

4. A kontragrediens

Egy V lineáris tér $V^\vee$ duálisa a $\phi : V \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálok összessége (lineáris tér a pontonkénti műveletekkel).

Ha $\mathbf{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ egy bázisa V-nek, akkor a

$$\begin{aligned} b_i^\vee : V &\to \mathbb{C} \\ b_j &\mapsto \delta_{ij} \end{aligned}$$

funkcionálok bázisát alkotják $V^\vee$-nak (duális bázis) $\rightsquigarrow$

$$\dim V^\vee = \dim V$$

Minden $v \in V$ vektorhoz hozzárendelhető a

$$\begin{aligned} v^\flat : V^\vee &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

lineáris funkcionál, és $v \mapsto v^\flat$ egy bijektív lineáris $V \to (V^\vee)^\vee$ leképezés

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{duális duálisa azonosítható az eredeti térrel!}}$

$A\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés transzponáltja

$$\begin{aligned} A^{\mathtt{tr}} : V_2^\vee &\to V_1^\vee \\ \phi &\mapsto \phi \circ A \end{aligned}$$

$A^{\mathtt{tr}}$ mátrixa a duális bázisokra nézve: $[A^{\mathtt{tr}}]_{ip} = [A]_{pi}$.

Transzponálás antihomomorfizmus: $(AB)^{\mathtt{tr}} = B^{\mathtt{tr}} A^{\mathtt{tr}}$.

$D\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolás kontragrediense (duálisa)

$$\begin{aligned} D^\vee : G &\to \mathsf{GL}(V^\vee) \\ g &\mapsto D^{\mathtt{tr}}\left(g^{-1}\right) \end{aligned}$$

Kontragrediens dimenziója megegyezik as ábrázolás dimenziójával

$$\dim D^\vee = \dim D$$

Irreducibilis ábrázolás kontragrediense szintén irreducibilis, és kontragrediens kontragrediense az eredeti ábrázolás

$$(D^\vee)^\vee \cong D$$

Direkt összeg kontragrediense a kontragrediensek direkt összege

$$\left(\bigoplus_i D_i\right)^\vee = \bigoplus_i D_i^\vee$$

Kapcsolat a kvantumtérelméleti töltéskonjugálással (részecskék cseréje antirészecskékre).

5. Tenzorszorzat és fúziós gyűrű

Bilineáris funkcionál: skalárértékű $\beta : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ leképezés, amely mindkét változójában külön-külön lineáris.

$\mathcal{B}(V_1, V_2)$: bilineáris funkcionálok lineáris tere pontonkénti műveletekkel.

Tenzorszorzat: bilineáris funkcionálok terének duálisa

$$\boxed{V_1 \otimes V_2 = \mathcal{B}(V_1, V_2)^\vee}$$

$v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$ vektorok diadikus (tenzor-)szorzata

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 : \mathcal{B}(V_1, V_2) &\to \mathbb{C} \\ \beta &\mapsto \beta(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Szorzatbázis: $\{e_i \otimes f_p \mid e_i \in \mathbf{B}_1, f_p \in \mathbf{B}_2\}$, ahol $\mathbf{B}_i$ a V_i bázisa $(i=1,2)$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \dim V_2}$

$A_1 \in \mathsf{GL}(V_1)$ és $A_2 \in \mathsf{GL}(V_2)$ operátorok tenzorszorzata

$$\begin{aligned} A_1 \otimes A_2 : V_1 \otimes V_2 &\to V_1 \otimes V_2 \\ b_1 \otimes b_2 &\mapsto A_1 b_1 \otimes A_2 b_2 \end{aligned}$$

Mátrixelemek (szorzatbázisban):

$$[A_1 \otimes A_2]_{(ip)(jq)} = [A_1]_{ij} \, [A_2]_{pq}$$

Tenzorszorzat nyoma:

$$\mathrm{Tr}(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{Tr}(A_1) \, \mathrm{Tr}(A_2)$$

$D_1 : G \to \mathsf{GL}(V_1)$ és $D_2 : G \to \mathsf{GL}(V_2)$ ábrázolások tenzorszorzata

$$\begin{aligned} D_1 \otimes D_2 : G &\to \mathsf{GL}(V_1 \otimes V_2) \\ g &\mapsto D_1(g) \otimes D_2(g) \end{aligned}$$

Tenzorszorzat az ekvivalenciával kompatibilis, továbbá

$$D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1 \quad \text{és} \quad D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$$

illetve

$$D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \oplus (D_1 \otimes D_3)$$

Tenzorszorzat egységeleme az $\mathbf{1}$ egységábrázolás (egydimenziós triviális ábrázolás)

$$\boxed{\mathbf{1} \otimes D \cong D \otimes \mathbf{1} \cong D}$$

Két irreducibilis tenzorszorzata legfeljebb egyszer tartalmazza az egységábrázolást (amikor is egymás kontragrediensei)

$$N_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{1}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{j} = \mathbf{i}^{\vee}; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Fúziós gyűrű: ábrázolások ekvivalenciaosztályai direkt összeg és tenzorszorzat műveletével.

Dimenzió multiplikativitása következtében egydimenziós ábrázolások tenzorszorzata szintén egydimenziós $\rightsquigarrow$ az egydimenziós ábrázolások egy $G_{\mathtt{ab}}$ Abel–csoportot alkotnak a tenzorszorzás műveletével, amelynek egységeleme az egységábrázolás, és ahol inverz = kontragrediens.

Észrevétel. G_{ab} izomorf a G' kommutátor-részcsoport szerinti G/G' faktorcsoporttal.

Egydimenziós ábrázolás tenzorszorzata irreducibilissel újfent irreducibilis $\rightsquigarrow$ G_{ab} permutációs hatása $\mathsf{Irr}(G)$-n.

Ha minden ábrázolás teljesen reducibilis (pl. véges, ill. kompakt csoportok), akkor a disztributivitás miatt elég ismerni az irreducibilisek tenzorszorzatainak

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = \bigoplus_{\mathbf{p} \in \mathsf{Irr}(G)} N_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{p}} \mathbf{p}$$

irreducibilis dekompozícióit ($N_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{p}} \in \mathbb{Z}_+$), a fúziós szabályokat.

Kvantumelméletben: fúziós szabály = szimmetria-töltések kompozíciója.

6. Elágazási szabályok

$D : G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolás megszorítása egy $H < G$ részcsoportra:

$$\begin{aligned} \mathtt{res}_H D : H &\to \mathsf{GL}(V) \\ h &\mapsto D(h) \end{aligned}$$

Ábrázolása H-nak (fontos szerep szimmetriasértés leírásában).

Megszorítás tranzitív, azaz $K < H < G$ esetén

$$\mathtt{res}_K(\mathtt{res}_H D) = \mathtt{res}_K D$$

és kompatibilis a direkt összeg és a tenzorszorzat műveletével:

$$\begin{aligned} \mathtt{res}_H(D_1 \oplus D_2) &= \mathtt{res}_H D_1 \oplus \mathtt{res}_H D_2 \\ \mathtt{res}_H(D_1 \otimes D_2) &= \mathtt{res}_H D_1 \otimes \mathtt{res}_H D_2 \end{aligned}$$

Teljesen reducibilis ábrázolások esetén elegendő az irreducibilis komponensek megszorításait ismerni.

Elágazási szabályok: $\mathfrak{i} \in \mathsf{Irr}(G)$ irreducibilisek $\mathtt{res}_H \mathfrak{i}$ megszorításainak tranzitív dekompozíciói (ha léteznek, pl. ha H véges)

$$\mathtt{res}_H \mathfrak{i} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Irr}(H)} B_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

ahol a $B_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{p}}$-k nemnegatív egész multiplicitások.

Véges csoportok, illetve kompakt Lie-csoportok esetén elágazási szabályok teljes mértékben jellemzik a megszorítást.

7. Ábrázolási karakterek

Invariánselmélet alaptétele: egy G végesen generált csoport esetén minden n pozitív egészre létezik a G elemeinek egy olyan véges G_n halmaza, hogy az n-dimenziós $D_1 : G \to \mathsf{GL}(V_1)$ és $D_2 : G \to \mathsf{GL}(V_2)$ ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha a G_n-be tartozó elemek ábrázolási operátorainak nyomai megegyeznek, azaz minden $g \in G_n$-re

$$\mathrm{Tr}(D_1(g)) = \mathrm{Tr}(D_2(g))$$

G_n (messze) nem egyértelmű, és csak kivételes esetekben ismert, de véges G esetén minden n-re választható $G_n = G$!

Ábrázolási karakter:

$$\begin{aligned} \chi_D : G &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \mathrm{Tr}(D(g)) \end{aligned}$$

Ekvivalenciaosztály (egyértelmű) numerikus jellemzése!

Ábrázolási karakter osztályfüggvény: minden $g, h \in G$-re

$$\boxed{\chi_D\left(g^h\right) = \chi_D(g)}$$

mert

$$\mathrm{Tr}\left(D\left(g^h\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(D\left(h^{-1}\right)D(g)D(h)\right) = \mathrm{Tr}\left(D\left(hh^{-1}\right)D(g)\right) = \mathrm{Tr}(D(g))$$

Kontragrediens karaktere:

$$\chi_{D^\vee}(g) = \chi_D\left(g^{-1}\right)$$

Direkt összeg és tenzorszorzat karaktere:

$$\chi_{D_1 \oplus D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g)$$
$$\chi_{D_1 \otimes D_2}(g) = \chi_{D_1}(g)\,\chi_{D_2}(g)$$

$\rightsquigarrow$ ábrázolási karakterek az irreducibilisek nemnegatív egész együtthatós kombinációi:

$$D = \bigoplus_{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)} n_{\mathbf{i}} \mathbf{i}$$

karaktere $\chi_D = \sum_{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)} n_{\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}}$.

$$\chi_D\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_D(g)}$$

$$|\chi_D(g)| \leq \chi_D(1) = \dim D$$

Osztályfüggvények skalárszorzata:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\, \overline{\psi(g)}$$

Ortogonalitási relációk

$$\langle \chi_{\mathbf{i}}, \chi_{\mathbf{j}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbf{i}}(g)\, \overline{\chi_{\mathbf{j}}(g)} = \delta_{\mathbf{ij}}$$

Következmények:

1. Irreducibilis karakterek ortonormált bázist alkotnak az osztály-függvények terében $\rightsquigarrow$

$$\boxed{\text{inekvivalens irreducibilisek száma} = \text{konjugált osztályok száma}}$$

2. Irreducibilis dekompozíció: $D = \bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathsf{Irr}(G)} n_{\mathbf{i}}\mathbf{i}$ irreducibilis felbontásban szereplő multiplicitások

$$\boxed{n_{\mathbf{i}} = \langle \chi_D, \chi_{\mathbf{i}} \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_D(g)\,\overline{\chi_{\mathbf{i}}(g)}}$$

Általánosított ortogonalitás

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathbf{i}}(g)\,\chi_{\mathbf{j}}\left(g^{-1}h\right) = \delta_{\mathbf{ij}}\frac{\chi_{\mathbf{j}}(h)}{\chi_{\mathbf{j}}(1)}$$

Következmény:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{i}} = \frac{\chi_{\mathbf{i}}(1)}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_{\mathbf{i}}(g)}D(g)$$

operátorok ortogonális projektorok

$$\mathcal{P}_{\mathbf{i}}\mathcal{P}_{\mathbf{j}} = \delta_{\mathbf{ij}}\mathcal{P}_{\mathbf{i}}$$

$\mathcal{P}_{\mathbf{i}} V \subseteq V$ homogén invariáns altér, azaz minden irreducibilis komponense ekvivalens $\mathbf{i}$-vel.

'Második' ortogonalitás

$$\frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)} \chi_{\mathbf{i}}(g)\, \overline{\chi_{\mathbf{i}}(h)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } g \text{és } h \text{egymás konjugáltja;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Következmény:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)} (\dim \mathbf{i})^2 = \sum_i \chi_{\mathbf{i}}(1)^2 = |G|$$

Burnside–tétel

Fúziós együtthatók

$$N_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{p}} = \langle \chi_{\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}}, \chi_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbf{i}}(g)\, \chi_{\mathbf{j}}(g)\, \overline{\chi_{\mathbf{p}}(g)}$$

Véges csoport karaktertáblája

	$\mathcal{C}_1=\{1\}$	$\cdots$	$\mathcal{C}_j$	$\cdots$
$\mathbf{1}$	$\chi_{\mathbf{1}}(1)=1$	$\cdots$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	
$\mathbf{i}$	$\chi_{\mathbf{i}}(1)=\dim \mathbf{i}$	$\cdots$	$\chi_{\mathbf{i}}(\mathcal{C}_j)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	

sorok $\leftrightsquigarrow$ irreducibilis karakterek; oszlopok $\leftrightsquigarrow$ konjugált osztályok

(első sor: egységábrázolás; első oszlop: triviális osztály).

Oszlopok ortogonálisak, sorok (súlyozva) ortonormáltak.

D_3 karaktertáblája

	$\mathcal{C}_1 = \{1\}$	$\mathcal{C}_2 = \{C, C^{-1}\}$	$\mathcal{C}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1
$\mathbf{1}^*$	1	1	-1
$\mathbf{2}$	2	-1	0

D_3 fúziós szabályai

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}^*$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}^*$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}^*$	$\mathbf{1}^*$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}^* \oplus \mathbf{2}$

Galois–kapcsolat: $\boxed{G \text{ normális részcsoportjai} \leftrightsquigarrow \mathsf{Irr}(G) \text{ részhalmazai}}$

Egy $I \subseteq \mathsf{Irr}(G)$ részhalmaznak az

$$\mathfrak{N}(I) = \bigcap_{\mathbf{i} \in I} \{x \in G \mid \chi_{\mathbf{i}}(x) = \chi_{\mathbf{i}}(1)\} \triangleleft G$$

normális részcsoport, míg egy $N \triangleleft G$ normális részcsoportnak az

$$\mathfrak{I}(N) = \{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G) \mid \ker \mathbf{i} < N\} = \{\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G) \mid \chi_{\mathbf{i}}(x) = \chi_{\mathbf{i}}(1) \quad \forall x \in N\}$$

részhalmaz felel meg.

$$G' = \{x \in G \mid \chi_{\mathbf{i}}(x) = 1 \text{ ha } \dim \mathbf{i} = 1\}$$ derivált részcsoport

$$\mathsf{Z}(G) = \{x \in G \mid |\chi_{\mathbf{i}}(x)| = \chi_{\mathbf{i}}(1)\}$$ centrum

8. Szimmetrizált négyzetek

$$\begin{aligned}\sigma : V \otimes V &\to V \otimes V \\ a \otimes b &\mapsto b \otimes a\end{aligned}$$

fonatoperátor involutív ($\sigma^2 = \mathbf{id_V}$), ezért lehetséges sajátértékei ± 1 $\rightsquigarrow$

$$\boxed{V \otimes V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V}$$

spektrális felbontás (szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok).

Ha $\mathbf{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ egy bázisa V-nek, akkor

$$\begin{aligned}\wedge^2_+ \mathbf{B} &= \{b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i \,|\, 1 \leq i \leq j \leq n\} \\ \wedge^2_- \mathbf{B} &= \{b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}\end{aligned}$$

bázisai $\wedge^2_\pm V$-nek $\rightsquigarrow$

$$\dim \wedge^2_\pm V = \frac{n(n \pm 1)}{2}$$

Egy $D\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolás önmagával képzett $D \otimes D$ tenzorszorzatának minden ábrázolási operátora felcserél σ-val $\rightsquigarrow$ mind $\wedge^2_+ V$, mind $\wedge^2_- V$ invariáns altere $D \otimes D$-nek $\rightsquigarrow$ léteznek a $\wedge^2_\pm D$ redukált ábrázolások, a D szimmetrizált, illetve antiszimmetrizált négyzete.

Szimmetrizált négyzetek karakterei:

$$\chi_{\wedge^2_\pm D}(g) = \frac{\chi_D(g)^2 \pm \chi_D(g^2)}{2}$$

Fizikai jelentőség: megkülönböztethetetlen alrendszerek (Pauli–elv $\rightsquigarrow$ bozonok esetén szimmetrizálás, fermionok esetén antiszimmetrizálás).

Egy ábrázolás

valós, ha létezik olyan bázisa az ábrázolási térnek, amelyre vonatkoztatott minden ábrázolási mátrixelem valós (ekkor a karakter csak valós értékeket vesz fel, és ezért az ábrázolás és kontragrediense ekvivalens egymással);

pszeudó-valós, ha ekvivalens a kontragrediensével ($\rightsquigarrow$ karaktere csak valós értékeket vesz fel), de nem valós;

komplex, ha nem ekvivalens a kontragrediensével ($\rightsquigarrow$ karaktere nem kizárólag valós értékeket vesz fel).

Egy $\mathbf{i} \in \mathsf{Irr}(G)$ irreducibilis ábrázolás valós vagy pszeudó-valós aszerint, hogy $\wedge^2_+ \mathbf{i}$ szimmetrizált vagy $\wedge^2_- \mathbf{i}$ antiszimmetrizált négyzete tartalmazza az egységábrázolást (1 multiplkicitással), és komplex, ha $\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$ egyáltalán nem tartalmazza az egységábrázolást.

Következmény: a

$$\boxed{\nu_{\mathbf{i}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbf{i}}(g^2)}$$

Frobenius-Schur–indikátor értéke $+1$, 0 vagy -1 attól függően, hogy $\mathbf{i}$ valós, komplex vagy pszeudó-valós.

9. Polinominvariánsok

Tekintsük az n-változós polinomok $R_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ gyűrűjét.

Egy $f \in R_n$ polinom homogén, ha

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_n)$$

minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re ($d \in \mathbb{Z}_+$ az f fokszáma).

Homogén polinomok szorzata szintén homogén (fokszámok összeadódnak), de összegük már nem mindig.

Tetszőleges polinom egyértelműen felbontható különböző fokszámú homogén polinomok összegére.

Egy $f \in R_n$ polinom $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ mátrix általi f^A transzformáltja

$$f^A(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right)$$

Homogén polinom képe ugyanolyan fokszámú homogén polinom.

$f \in R_n$ invariáns polinomja a $G < \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ mátrixcsoportnak, ha

$$f^A = f$$

minden $A \in G$-re.

Invariáns polinomok összege és szorzata is invariáns $\rightsquigarrow$ invariáns polinomok egy R^G gyűrűt alkotnak ('invariánsgyűrű').

Feladat: meghatározni az R^G invariánsgyűrűt.

Hilbert: véges G-re az R^G invariánsgyűrű végesen generált, azaz létezik véges sok olyan $P_1, \ldots, P_N \in R^G$ (homogén) invariáns polinom ('fundamentális invariánsok'), amelyekből minden $P \in R^G$ invariáns polinom előállítható az alapműveletek segítségével:

$$P = \mathfrak{P}(P_1, \ldots, P_N)$$

valamely N-változós $\mathfrak{P} \in R_N$ polinomra.

Megjegyzés: fenti előállítás, azaz a $\mathfrak{P} \in R_N$ polinom nem egyértelmű, mert létezhetnek nem-triviális algebrai relációk ('syzygyk') a fundamentális invariánsok között.

Fundamentális invariánsok kiválasztására végtelen sok lehetőség létezik (pl. új invariánsok hozzáadásával).

Noether tétele: mindig választható homogén fundamentális invariánsok olyan rendszere, melyek fokszáma nem nagyobb a csoport rendjénél.

Kérdés: (független) d-edfokú homogén invariánsok H_d száma?

Hilbert–Poincaré-sor:

$$H_G(z) = \sum_{d=0} H_d z^d$$

Molien-képlet:

$$H_G(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(1 - zA)}$$

10. Projektív ábrázolások

Kvantumfizikai állapotleírás:

$$\boxed{\text{(tiszta) állapotok} \leftrightsquigarrow \text{Hilbert–tér egydimenziós alterei}}$$

$\rightsquigarrow$ szimmetriát ábrázoló operátorok csak skalárszorzó erejéig vannak meghatározva.

Projektív ábrázolás: olyan $\mathfrak{D}: G \to \mathsf{GL}(V)$ leképezés, amelyre $\mathfrak{D}(1) = \mathbf{1}$, és létezik olyan $\alpha: G \times G \to \mathbb{C}^\times$ kétváltozós függvény, hogy

$$\boxed{\mathfrak{D}(g)\,\mathfrak{D}(h) = \alpha(g,h)\,\mathfrak{D}(gh)}$$

minden $g, h \in G$ esetén (α a projektív ábrázolás kociklusa).

Operátorok szorzása asszociatív:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{D}(g_1)(\mathfrak{D}(g_2)\mathfrak{D}(g_3)) = \alpha(g_2,g_3)\,\mathfrak{D}(g_1)\mathfrak{D}(g_2g_3) & = & \alpha(g_1,g_2g_3)\alpha(g_2,g_3)\,\mathfrak{D}(g_1g_2g_3) \\
\| & & \| \\
(\mathfrak{D}(g_1)\mathfrak{D}(g_2))\mathfrak{D}(g_3) = \alpha(g_1,g_2)\,\mathfrak{D}(g_1g_2)\mathfrak{D}(g_3) & = & \alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3)\,\mathfrak{D}(g_1g_2g_3)
\end{array}$$

minden $g_1, g_2, g_3 \in G$-re $\rightsquigarrow$

$$\boxed{\alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3) = \alpha(g_1,g_2g_3)\alpha(g_2,g_3)} \qquad \text{kociklus-egyenlet}$$

Normálási feltétel

$$\alpha(g,1) = \alpha(1,g) = 1$$

Kociklusok (pontonkénti) szorzata is kociklus $\rightsquigarrow$ kociklusok egy $Z^2(G)$ Abel-csoportot alkotnak (egységeleme a triviális kociklus).

$\mathfrak{D}_1 : G \to \mathsf{GL}(V_1)$ és $\mathfrak{D}_2 : G \to \mathsf{GL}(V_2)$ projektív ábrázolások ekvivalensek, ha létezik olyan invertálható lineáris $A : V_1 \to V_2$ leképezés és $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ függvény, hogy minden $g \in G$-re

$$\mathfrak{D}_2(g)A = \lambda(g)\, A\mathfrak{D}_1(g)$$

Ekvivalens ábrázolások kociklusaira

$$\begin{aligned}\alpha_2(g,h)\mathfrak{D}_2(gh)A &= \mathfrak{D}_2(g)\mathfrak{D}_2(h)A = \lambda(h)\mathfrak{D}_2(g)A\mathfrak{D}_1(h) = \lambda(g)\lambda(h)A\mathfrak{D}_1(g)\mathfrak{D}_1(h)\\ &= \lambda(g)\lambda(h)\alpha_1(g,h)A\mathfrak{D}_1(gh) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}\alpha_1(g,h)\,\mathfrak{D}_2(gh)A\end{aligned}$$

miatt

$$\frac{\alpha_2(g,h)}{\alpha_1(g,h)} = \frac{\lambda(g)\,\lambda(h)}{\lambda(gh)}$$

$$\boxed{\text{Ekvivalens ábrázolások } \alpha_2 \text{ és } \alpha_1 \text{ kociklusai kohomológok!}}$$

Kohomológia egy kongruencia-reláció a kociklusok $Z^2(G)$ Abel-csoportján $\rightsquigarrow$ kohomológia-osztályok $H^2(G)$ csoportja (második kohomológia-csoport = Schur–multiplikátor).

Véges csoport Schur–multiplikátora szintén véges.

Invariáns altér, reducibilis/irreducibilis, kontragrediens, tenzorszorzat stb. ábrázolás fogalma mint közönséges ábrázolások esetén, de direkt összeg csak akkor értelmes, ha az összeadandók kociklusai megegyeznek ('szuperszelekciós szabály').

$\hat{G}$ univerzális fedőcsoportja G-nek, ha egy-egyértelmű kapcsolat áll fenn $\hat{G}$ közönséges ábrázolásai és G projektív ábrázolásai között $\rightsquigarrow$ létezik $\hat{G}$-nek olyan $A < Z\big(\hat{G}\big)$ centrális részcsoportja, amely izomorf G Schur-multiplikátorával, és amely szerinti faktorcsoport izomorf magával G-vel:

$$H^2(G) \cong A$$

és

$$\hat{G}/A \cong G$$

Példa: $\mathsf{SO}(3)$ (a háromdimenziós forgáscsoport) univerzális fedőcsoportja $\widehat{\mathsf{SO}}(3) = \mathsf{SU}(2)$, minthogy $Z(\mathsf{SU}(2)) = \mathbb{Z}_2 = H^2(\mathsf{SO}(3))$

$\rightsquigarrow$ tenzor (közönséges) és spinor (nem-triviális kociklusú) ábrázolások.

11. Lie-csoportok ábrázolásai

Lie–csoport univerzális fedőcsoportja vele lokálisan izomorf és egyszeresen összefüggő.

$D : G \to \mathsf{GL}(V)$ ábrázolás esetén $\widetilde{D} = D \circ \mathbf{g}$ egy differenciálható $U \to \mathsf{GL}(V)$ leképezés, és

$$\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_i} = \sum_k c_k^{ij} \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_k}$$

$\rightsquigarrow$ a G csoport $\mathfrak{g}$ Lie–algebrájának b_i bázisvektoraihoz a $\dfrac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_i}$ deriváltakat hozzárendelve a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra

$$\mathfrak{d} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

$$b_i \mapsto \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \alpha_i}$$

ábrázolását kapjuk a V lineáris téren (itt $\mathfrak{gl}(V)$ a $\mathsf{GL}(V)$ általános lineáris csoport Lie–algebrája), azaz egy olyan lineáris leképezést, amelyre $[\mathfrak{d}(a)\,,\mathfrak{d}(b)] = \mathfrak{d}(a)\,\mathfrak{d}(b) - \mathfrak{d}(b)\,\mathfrak{d}(a)$.

$\mathfrak{g}$ Lie-algebra ábrázolásai

$\updownarrow$

$\hat{G}$ univerzális fedőcsoport ábrázolásai

$\updownarrow$

G csoport projektív ábrázolásai

$\mathsf{SO}(3) \cong \mathsf{SU}(2)/\mathsf{Z}$ miatt forgáscsoport projektív ábrázolásai megfelelnek $\mathsf{SU}(2)$ Lie-algebrájának (impulzusmomentum-algebra) ábrázolásainak.

Casimir–operátorok kommutálnak minden ábrázolási operátorral $\rightsquigarrow$ Schur–lemma miatt irreducibilis ábrázolásban az egységoperátor skalárszorosai, így irreducibilis ábrázolásban J^2 skalárral való szorzás

$$J^2 = j(j+1)$$

valamely egész vagy fél-egész j értékre (impulzusmomentum-kvantumszám). Irreducibilis $\mathsf{SU}(2)$ ábrázolásban $-\mathbf{1}$ képe $e^{2\pi\imath j}$ $\rightsquigarrow$ tenzor vagy spinor ábrázolások attól függően, hogy j értéke egész vagy fél-egész.