Általános csoportelmélet

1. Részcsoportok

Részcsoport: csoportelemek olyan részhalmaza, amely maga is csoportot alkot a csoportművelettel $\rightsquigarrow$ tartalmazza minden egyes elemének inverzét, és bármely két elemének szorzatát is.

Jelentőség: szimmetriasértés (dinamika szimmetriái nem szükségszerűen realizálódnak a fizikai konfigurációkban).

$$H < G \quad \Longleftrightarrow \quad ab^{-1} \in H \quad \text{minden} \quad a, b \in H\text{-ra}$$

Triviális részcsoport: egy elemű, csak az egységelemet tartalmazza.

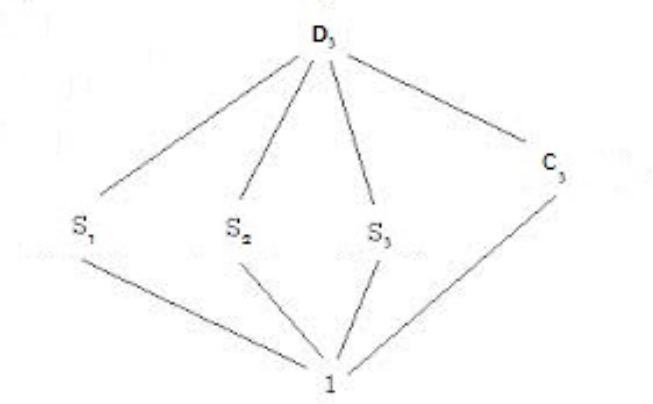
Részcsoport részcsoportja is részcsoport: $K < H$ és $H < G$ esetén $K < G$.

Részcsoportok metszete szintén részcsoport $\rightsquigarrow$ részcsoport-háló (háló: olyan részben rendezett halmaz, melyben minden véges részhalmaznak van legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja).

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq H < G} H$$

– az X által generált részcsoport – a legkisebb olyan részcsoport, amely még tartalmazza csoportelemek $X \subseteq G$ halmazának összes elemét (elemei az X elemeiből és azok inverzeiből képzett összes szorzat).

Példa: $\mathbb{D}_3$ részcsoporthálója, $S_i = \{\mathbf{1}, \sigma_i\} = \langle \sigma_i \rangle$ és $C_3 = \{\mathbf{1}, C, C^{-1}\} \cong \mathbb{Z}_3$



Generátorrendszer: csoportelemek olyan $X \subseteq G$ halmaza, amely által generált $\langle X \rangle$ részcsoport megegyezik magával a G csoporttal, $\langle X \rangle = G$

$\rightsquigarrow$ csoport minden eleme előáll generátorok és azok inverzei szorzataként.

Végesen generált csoport: létezik véges generátorrendszere.

Ciklikus csoport: létezik egyelemű generátorrendszere.

2. Ciklikus (rész-)csoportok

$x \in G$ csoportelem egész kitevős hatványai (induktív definíció)

$\ldots,\ x^{-3} = x^{-1}x^{-2},\ x^{-2} = x^{-1}x^{-1},\ x^{-1},\ x^0 = \mathbf{1}_G,\ x^1 = x,\ x^2 = xx,\ x^3 = xx^2, \ldots$

Hatványok szorzása: $\boxed{x^n x^m = x^{n+m}}$

Következmény.

$$\begin{aligned} \phi_x : \mathbb{Z} &\to G \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

leképezés művelettartó, azaz $\phi_x(n+m) = \phi_x(n)\phi_x(m)$.

Mivel $\langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tartalmazza az x összes hatványát, ezért ϕ_x valójában $\langle x \rangle$-be képez.

Ha $H < G$ ciklikus, azaz $\langle x \rangle = H$ valamely $x \in G$-re (x a részcsoport ciklikus generátora), akkor két eset lehetséges.

Végtelen ciklikus: ha x összes hatványa különböző, azaz $n \neq m$ esetén $x^n \neq x^m$, akkor ϕ_x bijektív, így H izomorf az egész számok additív csoportjával, $H \cong \mathbb{Z}$;

Véges ciklikus: ha létezik olyan N egész, hogy $x^N = \mathbf{1}_G$ (a legkisebb ilyen pozitív egész az x elem rendje), akkor egy adott N modulusú maradékosztályba tartozó minden egészhez ϕ_x ugyanazt a csoportelemet rendeli $\rightsquigarrow$ H izomorf az N modulusú maradékosztályok $\mathbb{Z}_N$ csoportjával (N-ed fokú ciklikus csoport).

Ciklikus csoportok struktúratétele

1. Ciklikus csoport rendje vagy megszámlálhatóan végtelen, vagy pozitív egész.
2. Két ciklikus csoport akkor és csak akkor izomorf, ha azonos elemszámúak.

Ciklikus csoport rendje = ciklikus generátorának rendje.

Összeadás kommutatív $\rightsquigarrow$ ciklikus csoportok kommutatívak!

3. Mellékosztályok

$X, Y \subseteq G$ részhalmazok komplexusszorzata

$$XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\} \subseteq G$$

(csoportművelet kiterjesztése csoportelemek részhalmazaira).

Komplexusszorzás asszociatív és egységelemes művelet (egységeleme a triviális részcsoport), de általában nem léteznek inverzek (kivéve egy elemű részhalmazok esetén).

$H, K < G$ részcsoportok komplexusszorzata csak akkor részcsoport ha $HK = KH$; ekkor $HK = \langle H \cup K \rangle$ a legszűkebb, mindkét részcsoportot egyaránt tartalmazó részcsoport.

$H < G$ részcsoport $x \in G$ szerinti mellékosztálya

$$xH \subseteq \{xh \mid h \in H\} \qquad \text{baloldali}$$

$$Hx \subseteq \{hx \mid h \in H\} \qquad \text{jobboldali}$$

(nem-kommutatív esetben általában $xH \neq Hx$).

Triviális mellékosztály: $1H = H1 = H$.

Coset–tér: bal(jobb-)oldali mellékosztályok G/H (ill. $H\backslash G$) halmaza.

Egy-egyértelmű $G/H \leftrightsquigarrow H\backslash G$ megfeleltetés miatt elég csak bal- vagy jobboldali mellékosztályokat vizsgálni.

Példa: $C_3 = \{1, C, C^{-1}\} < \mathbb{D}_3$ részcsoport mellékosztályai

$$\mathbb{D}_3/C_3 = \{\{1, C, C^{-1}\}, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}\}$$

Mellékosztályok particionálják a csoportot:

1. minden $x \in G$ eleme valamely mellékosztálynak;
2. két mellékosztály vagy megegyezik egymással, vagy diszjunkt

$$\xi_1 \cap \xi_2 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \xi_2$$

Következmény. *$H < G$ részcsoport mellékosztályai egy (reflexív, szimmetrikus és tranzitív) ekvivalencia-reláció ($x \equiv_H y$ ha $x^{-1}y \in H$) ekvivalencia-osztályai.*

Részcsoport indexe = mellékosztályainak száma

$$[G : H] = |G/H| = |H\backslash G|$$

Lagrange tétele: véges G csoport minden $H < G$ részcsoportjára

$$\boxed{|G| = [G : H]\,|H|}$$

$\rightsquigarrow$ részcsoport rendje osztja a csoport rendjét.

Következmény. *minden prímrendű csoport ciklikus!*

Bizonyítás. $1 \neq x \in G$ esetén $\langle x \rangle = G$. $\square$

Poincaré tétele: véges sok véges indexű részcsoport metszete szintén véges indexű.

4. Normális részcsoportok és kongruencia-relációk

Normális részcsoport: $N \triangleleft G$ ha $xN = Nx$ minden $x \in G$-re (Abel-csoport minden részcsoportja normális).

Normális részcsoportok metszete szintén normális $\Rightarrow$ normális részcsoportok (moduláris) részhálót alkotnak a részcsoport-hálóban.

Moduláris tulajdonság: ha $H, K, L \triangleleft G$ és $K < L$, akkor

$$\boxed{HK \cap L = (H \cap K)\, L}$$

$\rightsquigarrow$ $H, K \triangleleft G$ normális részcsoportok esetén kölcsönösen egyértelmű

$$\{L \triangleleft G \mid H < L < HK\} \leftrightsquigarrow \{N \triangleleft G \mid H \cap K < N < K\}$$

megfeleltetés.

Kongruencia-reláció: csoportművelettel kompatibilis ekvivalencia-reláció.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv y_1 \\ \\ x_2 \equiv y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x_1 x_2 \equiv y_1 y_2}$$

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik normális részcsoportok és kongruencia-relációk között:

- normális részcsoport mellékosztályai egy kongruencia ekvivalencia-osztályai;
- egységelem $\{x \in G \mid x \equiv 1\}$ kongruencia-osztálya a csoport normális részcsoportja.

Triviális részcsoport és egész csoport mindig normális: ha nincs további normális részcsoport, akkor a csoport egyszerű.

Egyszerű csoportok jelentősége: elméleti kérdések gyakran redukálhatók egyszerű csoportok esetére.

Véges egyszerű csoportok osztályozása:

1. prímrendű ciklikus $\mathbb{Z}_p$ csoportok (kommutatív);
2. $\mathbb{A}_n$ alternáló csoportok ($n > 4$);
3. véges Lie-csoportok;
4. 26 szporadikus csoport (legnagyobb rendje $\left|\mathbb{M}\right| > 10^{58}$).

5. Faktorcsoport

Részcsoport (baloldali) mellékosztályainak komplexusszorzata általában nem mellékosztály (csak több mellékosztály uniója), de normális részcsoport mellékosztályainak komplexusszorzata maga is mellékosztály!

$N \triangleleft G$ és $x, y \in G$ esetén

$$(xN)(yN) = (xy)N$$

Faktorcsoport: normális részcsoport mellékosztályai a komplexusszorzás műveletével; egységeleme a triviális osztály, rendje pedig a részcsoport indexe

$$\left|G/N\right| = [G : N]$$

Példa: $\mathbb{D}_3/C_3$ ($\cong \mathbb{Z}_2$) szorzótáblája

$\mathbb{D}_3/C_3$	C_3	$\sigma_1 C_3$
C_3	C_3	$\sigma_1 C_3$
$\sigma_1 C_3$	$\sigma_1 C_3$	C_3

Első izomorfizmus-tétel: $N \triangleleft G$ és $H < G$ esetén $N \triangleleft NH$ és $N \cap H \triangleleft H$, továbbá

$$H/(N \cap H) \cong NH/N$$

Második izomorfizmus-tétel: $K \triangleleft N$ és $N \triangleleft G$ esetén $N/K \triangleleft G/K$, továbbá

$$(G/K)/(N/K) \cong G/N$$

6. A homomorfizmus-tétel

Homomorfizmus: csoportok közti művelettartó leképezés.

$$\phi : G \to H \text{ homomorfizmus } \begin{cases} \text{képe} & \phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\} < H \\ \text{magja} & \ker(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = 1\} \triangleleft G \end{cases}$$

Homomorfizmus-tétel: $\phi(G) \cong G/\ker(\phi)$.

$$\boxed{\text{homomorf képek} \leftrightsquigarrow \text{faktorcsoportok}}$$

Korrespondencia-tétel: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés ϕ magját tartalmazó részcsoportok és ϕ képének részcsoportjai között.

$$\{K < G \mid \ker(\phi) < K\} \leftrightsquigarrow \{L < H \mid L < \phi(G)\}$$

7. Centrum, centralizátor

$x, y \in G$ csoportelemek felcserélhetők egymással (kommutálnak), ha $xy = yx$; egy csoportelem centrális, ha minden csoportelemmel felcserélhető ($\rightsquigarrow$ Abel-csoport minden eleme centrális).

A csoport centrális elemeinek halmaza

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \ \ \forall y \in G\}$$

– a csoport centruma – egy kommutatív normális részcsoport: $Z(G) \triangleleft G$.

Egy $x \in G$ csoportelem centralizátora a vele felcserélhető csoportelemek

$$\mathtt{C}_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$$

halmaza.

A centralizátor mindig részcsoport: $\mathtt{C}_G(x) < G$.

Bizonyítás. $y, z \in \mathtt{C}_G(x)$ esetén $x\left(y^{-1}z\right) = \left(xy^{-1}\right)z = \left(y^{-1}x\right)z = y^{-1}(xz) = y^{-1}(zx) = \left(y^{-1}z\right)x$. $\square$

Egy $H < G$ részcsoport centralizátora a legszűkebb olyan részcsoportja G-nek, melynek minden eleme kommutál H minden elemével, azaz H elemei centralizátorainak metszete

$$\boxed{\mathtt{C}_G(H) = \bigcap_{x \in H} \mathtt{C}_G(x)}$$

Észrevétel. Centrális elem centralizátora az egész csoport

$$\boxed{x \in Z(G) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathtt{C}_G(x) = G}$$

ezért $\mathtt{C}_G(G) = Z(G)$.

Részcsoport normalizátora: legbővebb olyan részcsoportja G-nek, melynek H még normális részcsoportja

$$\mathtt{N}_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\}$$

Mind H, mind annak $\mathtt{C}_G(H)$ centralizátora normális részcsoportja az $\mathtt{N}_G(H)$ normalizátornak: $H, \mathtt{C}_G(H) \triangleleft \mathtt{N}_G(H)$

8. Konjugált osztályok

A $z \in G$ csoportelemhez asszociált belső automorfizmus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_z : G &\to G \\ x &\mapsto zxz^{-1} \end{aligned}$$

Bizonyítás. $\mathfrak{c}_z(xy) = z(xy)z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1}) = \mathfrak{c}_z(x)\,\mathfrak{c}_z(y)$ □

$$\boxed{\mathfrak{c}_x \circ \mathfrak{c}_y = \mathfrak{c}_{xy} \text{ minden } x, y \in G\text{-re}}$$

Bizonyítás. $(\mathfrak{c}_x \circ \mathfrak{c}_y)(z) = \mathfrak{c}_x\left(yzy^{-1}\right) = x\left(yzy^{-1}\right)x^{-1} = (xy)\,z\,(xy)^{-1} = \mathfrak{c}_{xy}(z)$

□

Következmény.

$$\mathfrak{c} : G \to \mathrm{Aut}(G)$$
$$z \mapsto \mathfrak{c}_z$$

egy homomorfizmus, melynek magja a csoport centruma.

$x \in G$ csoportelem ($H < G$ részcsoport) $y \in G$ általi konjugáltja

$$x^y = \mathfrak{c}_{y^{-1}}(x) = y^{-1}xy$$

$$H^y = \mathfrak{c}_{y^{-1}}(H) = \{x^y \mid x \in H\}$$

1. $x^y = x$ akkor és csak akkor, ha $xy = yx$;

2. $H^x = H$ akkor és csak akkor, ha $x \in \mathtt{N}_G(H)$.

$x \in G$ csoportelem ($H < G$ részcsoport) konjugált osztálya

$$x^G = \{x^y \mid y \in G\}$$
$$H^G = \{H^y \mid y \in G\}$$

Elemek (részcsoportok) konjugált osztályai particionálják a csoportot (részcsoport-hálót); az egységelem, ill. triviális részcsoport önmagában alkot egy-egy osztályt (*triviális osztály*).

Csoportelem akkor centrális (részcsoport normális), ha önmagában alkot egy konjugált osztályt $\rightsquigarrow$ Abel-csoport konjugált osztályai egyeleműek.

Általánosságban: $\left|x^G\right| = [G : \mathtt{C}_G(x)]$ és $\left|H^G\right| = [G : \mathtt{N}_G(H)]$ $\rightsquigarrow$ konjugált osztály elemszáma osztja a csoport rendjét.

Példa: $\mathbb{D}_3$ diédercsoport konjugált elemosztályai

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{1}\}, \mathcal{C}_2 = \left\{C, C^{-1}\right\} \text{ és } \mathcal{C}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

$\mathbb{D}_3$ részcsoportjainak konjugált osztályai:

- $\{\mathbf{1}\}, C_3 = \left\{\mathbf{1}, C, C^{-1}\right\}$ és $\mathbb{D}_3$ normális részcsoportok, ezért önmaguk alkotnak egy konjugált osztályt;
- az $S_i = \{\mathbf{1}, \sigma_i\}$ részcsoportok $(i = 1, 2, 3)$ egymás konjugáltjai, ezért együtt alkotnak egy konjugált osztályt.

9. Derivált részcsoport, kompozíciólánc

Az $x, y \in G$ csoportelemek kommutátora

$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$$

$[x, y] = 1$ akkor és csak akkor, ha $xy = yx$.

Kommutátor-részcsoport (*derivált részcsoport*)

$$\boxed{[G, G] = G' = \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle}$$

az elempárok kommutátorai által generált részcsoport.

Példa: $\mathbb{D}_3' = C_3 = \left\{\mathbf{1}, C, C^{-1}\right\}$, és általában $\mathbb{D}_n'$ a forgási szimmetriák részcsoportja.

$G' = \{1\}$ akkor és csak akkor, ha G Abel-csoport.

$G' \triangleleft G$, és G/G' Abel-csoport (mi több, G' mindazon normális részcsoportok metszete, melyek szerinti faktorcsoport kommutatív).

Egy csoport perfekt, ha megegyezik saját kommutátor-részcsoportjával (egyszerű csoport vagy kommutatív, vagy perfekt).

Derivált lánc:

$$G^{(0)} = G \triangleright G^{(1)} = [G^{(0)}, G^{(0)}] \triangleright G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] \triangleright \cdots$$

A G csoport feloldható, ha $G^{(n)} = \{\mathbf{1}_G\}$ valamely véges n-re (kommutativitás gyengített változata).

Feloldható csoportok jelentősége: algoritmikus kezelhetőség és alkalmazások (Galois-elmélet, differenciálegyenletek integrálhatósága, stb.).

Példa: $\mathbb{S}_n$ feloldható ha $n \leq 4$, de egyébként nem (mert ekkor $\mathbb{S}'_n = \mathbb{A}_n$ egyszerű csoport) $\rightsquigarrow$ polinom-egyenletek megoldhatósága.

Feit-Thompson–tétel: minden páratlan rendű csoport feloldható!

Kompozíciólánc: olyan $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}$ szubnormál lánc, amely nem finomítható, azaz $G_i \triangleleft H \triangleleft G_{i-1}$ esetén vagy $H = G_i$, vagy $H = G_{i-1}$ (azaz minden G_{i-1}/G_i kompozíció-faktor egyszerű csoport).

Nem minden csoportnak létezik kompozíciólánca, de pl. minden feloldható csoportnak igen (a deriváltláncból származtatható).

Jordan-Hölder–tétel: ha egy csoportnak léteznek kompozícióláncai, akkor azok mind azonos hosszúak, és kompozíció-faktoraik sorrendtől eltekintve megegyeznek.

10. Direkt szorzat

G_1 és G_2 csoportok $G_1 \times G_2$ *direkt szorzatának* elemei (x_1, x_2) alakú rendezett párok – ahol $x_1 \in G_1$ és $x_2 \in G_2$ – a komponensenkénti szorzással mint csoportműveletel

$$\boxed{(x_1, x_2)\,(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)}$$

$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ pár az egységelem, és $(x_1, x_2)^{-1} = \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right)$.

Észrevétel. $|G_1 \times G_2| = |G_1|\,|G_2|$, továbbá

$$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1 \quad \text{és} \quad G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$$

Példák:

1. ha n és m relatív prím egészek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$, és általában

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{[n,m]} \times \mathbb{Z}_{(n,m)}$$

2. $\mathsf{U}(n) \cong \mathsf{SU}(n) \times \mathsf{U}(1)$;

3. $n > 1$ dimenziós valós vektorok additív csoportja izomorf az

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$$

   direkt szorzattal;

4. $\mathbb{D}_{4n+2} \cong \mathbb{D}_{2n+1} \times \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} \pi_i : G_1 \times G_2 &\to G_i \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

projekciók szürjektív homomorfizmusok $i = 1, 2$-re, azaz $\pi_i(G_1 \times G_2) = G_i$.

Strukturális jellemzés:

$\hat{G}_1 = \ker(\pi_1) = \{(x_1, \mathbf{1}) \mid x_1 \in G_1\}$ és $\hat{G}_2 = \ker(\pi_2) = \{(\mathbf{1}, x_2) \mid x_2 \in G_2\}$

olyan normális részcsoportjai a direkt szorzatnak, amelyek

- metszete triviális, $\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$;
- elemei páronként kommutálnak, $(x_1, \mathbf{1})(\mathbf{1}, x_2) = (x_1, x_2) = (\mathbf{1}, x_2)(x_1, \mathbf{1})$;
- együttesen generálják a direkt szorzatot, $\hat{G}_1 \hat{G}_2 = G_1 \times G_2$;
- $i = 1, 2$-re $\hat{G}_i \cong G_i$ és $(G_1 \times G_2) / \hat{G}_i \cong G_{3-i}$.

Fordítva: ha egy csoportban található két olyan részcsoport, amelyek metszete triviális, elemeik páronként kommutálnak, és együttesen generálják az egész csoportot, akkor a csoport izomorf eme két részcsoportjának direkt szorzatával).

Észrevétel. Direkt szorzatban viszonylag sok a felcserélhető elempár.

Kommutatív (speciálisan ciklikus) csoportok direkt szorzata Abel-csoport.

Frobenius-Stickelberger–tétel: minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára, sorrendtől eltekintve egyértelműen (számelmélet alaptétele: minden egész szám felbontható prímhatványok szorzatára). Ha a csoport csak végesen generált, akkor a felbontásban előfordulhatnak végtelen ciklikus faktorok is.

$G_2 \ltimes G_1$ féldirekt szorzat: adott

$$\begin{aligned} \alpha : G_2 &\to \mathrm{Aut}(G_1) \\ x &\mapsto \alpha_x \end{aligned}$$

homomorfizmus ($\alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y$) esetén

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 \alpha_{x_2}(y_1), x_2 y_2)$$

csoportművelet a rendezett párok halmazán.

Triviális α esetén visszakapjuk a direkt szorzatot $\rightsquigarrow$ direkt szorzatéhoz némileg hasonló strukturális jellemzés, de általában kevesebb felcserélhető elempárral és bizonyos fokú aszimmetriával (G_1 és G_2 viszonylatában).

Sok fontos csoport (pl. diédercsoportok, egyes kristályok tércsoportjai, Poincaré-csoport, stb.) féldirekt szorzatként tárgyalhatók.