Lie-csoportok

1. Folytonos csoportok

Kontinuum számosságú csoportok esetén elemek jellemzése valós paraméterek (koordináták) segítségével.

Topologikus (folytonos) csoport: olyan csoport, amely egyben topologikus tér is, és topológiája kompatibilis a csoportstruktúrával, azaz a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_G : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned} \qquad \text{valamint} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\iota}_G : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

leképezések folytonosak (minden nyílt halmaz inverz képe nyílt).

n-paraméteres folytonos G csoport paraméterezése egy $\mathbf{g}\colon \mathcal{U} \to G$ lokális homeomorfizmus az $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ paraméter-tartomány és G között (minden $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{U}$ pontnak létezik olyan $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in W \subseteq \mathcal{U}$ nyílt környezete, hogy $\mathbf{g}$ megszorítása W-re inverzével együtt folytonos).

Példa: térbeli eltolások háromparaméteres csoportjának jellemzése az őspontot a képponttal összekötő vektor (adott bázisra vonatkozó) vektorkomponenseinek segítségével.

Paraméterek $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{U}$ összessége a $\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) \in G$ csoportelem paramétervektora.

Csoport topológiája $\leftrightsquigarrow$ paraméter-tartomány topológiája (két csoportelem akkor közeli, ha paramétereik közeliek).

Egy G folytonos csoport

kompakt, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés ($\Leftrightarrow$ paraméter-tartomány zárt és korlátos);

összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető folytonos görbével;

egyszeresen összefüggő, ha összefüggő és minden zárt görbe folytonosan összehúzható egy pontra.

Egységelemből kiinduló, G-beli folytonos görbék végpontjainak G_0 halmaza az egységelem komponense (részcsoportja G-nek, $G_0 < G$, és összefüggő csoportra $G_0 = G$).

$$\boxed{G/G_0 \text{ mellékosztályok} \leftrightsquigarrow G \text{ összefüggő komponensei}}$$

Egységelem paramétervektora (konvenció szerint) $\vec{\mathbf{0}}=(0,\ldots,0)$, vagyis

$$\mathbf{g}(\vec{\mathbf{0}})=\mathbf{1}_G$$

Csoportaxiómák miatt léteznek $\boldsymbol{\mu}\colon \mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ és $\boldsymbol{\iota}\colon \mathcal{U}\to\mathcal{U}$ folytonos leképezések, hogy

$$\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}})\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}\big(\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}\big))$$

és

$$\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\iota}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}))$$

$\boldsymbol{\mu}\big(\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}\big)$ az $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ és $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ paramétervektorú csoportelemek szorzatának paramétervektora, míg $\boldsymbol{\iota}(\vec{\alpha})$ az $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ paramétervektorú csoportelem inverzéé.

Csoportaxiómák következtében

$$\boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\beta}}, \vec{\boldsymbol{\gamma}})) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\boldsymbol{\beta}}), \vec{\boldsymbol{\gamma}}) \qquad \text{asszociativitás}$$

$$\boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\mathbf{0}}) = \boldsymbol{\mu}(\vec{\mathbf{0}}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{egységelem}$$

$$\boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\iota}(\vec{\boldsymbol{\alpha}})) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\iota}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}), \vec{\boldsymbol{\alpha}}) = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{inverzek létezése}$$

Lie–csoport: a $\boldsymbol{\mu}:\mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ és $\boldsymbol{\iota}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ leképezések konvergens Taylor-sorba fejthetők az egységelem egy kis környezetében (elegendő kétszeres folytonos differenciálhatóságot feltenni).

Lokális izomorfizmus: egységelem kis környezetében művelettartó diffeomorfizmus, azaz olyan $\phi : W_1 \to W_2$ (inverzével együtt) differenciálható leképezés $\vec{\mathbf{0}} \in W_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ és $\vec{\mathbf{0}} \in W_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ euklideszi részhalmazok között, amelyre

$$\boldsymbol{\mu}_2\big(\phi(\vec{\boldsymbol{\alpha}}), \phi(\vec{\boldsymbol{\beta}})\big) = \phi\big(\boldsymbol{\mu}_1(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\boldsymbol{\beta}})\big)$$

Lokális szerkezet ugyanaz, különbség csak a topológiai tulajdonságokban.

Minden összefüggő G Lie-csoportra létezik vele lokálisan izomorf egyszeresen összefüggő $\hat{G}$ univerzális fedőcsoport, amelyre

$$G \cong \hat{G}/Z$$

ahol Z a $\hat{G}$ egy véges centrális részcsoportja.

Példák

1. $(\mathbb{R},+)$, a valós számok additív csoportja

   $\mathcal{U}=\mathbb{R}$ paraméter-tartomány és $\mathbf{g}(\alpha)=\alpha$ triviális paraméterezés esetén $\boldsymbol{\mu}(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$ és $\boldsymbol{\iota}(\alpha)=-\alpha$

   egyszeresen összefüggő és nem kompakt;

2. $\mathsf{U}(1)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$, a komplex fázisok multiplikatív csoportja

   $\mathcal{U}=\mathbb{R}$ paraméter-tartomány és $\mathbf{g}(\alpha)=\exp(\imath\alpha)$ exponenciális paraméterezés esetén $\boldsymbol{\mu}(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$ és $\boldsymbol{\iota}(\alpha)=-\alpha$

   $\rightsquigarrow$ lokálisan izomorf $(\mathbb{R},+)$-szal

   kompakt és összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő;

3. a háromdimenziós forgáscsoport (adott közös ponton átmenő tengelyek körüli forgatások csoportja): háromparaméteres (forgatások jellemezhetők pl. Euler-szögekkel), és a paramétertartomány azonosítható egy gömb belsejével (határfelület szerkezete nem triviális) kompakt és összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő
   Azonosítható az $\mathsf{SO}(3)$ ortogonális csoporttal (forgástengelyek metszéspontjától mért távolság invariáns $\rightsquigarrow$ minden forgatás leírható egy 3x3-as ortogonális mátrix segítségével);

4. $\mathsf{SU}(2) = \left\{ U \in \mathrm{Mat}_2\,(\mathbb{C}) \mid \det U = 1,\ U^\dagger U = 1 \right\}$ izospin-csoport
   háromparaméteres, egyszeresen összefüggő és kompakt
   $\mathsf{SO}(3)$ univerzális fedőcsoportja;

5. $\mathsf{E}(3)$ euklidészi csoport $=\mathbb{R}^3$ izometriáinak csoportja

   hatparaméteres: 3 transzláció + 3 forgatás

   összefüggő és nem-kompakt;

6. $\mathsf{O}(n)=\{A\in\mathsf{GL}(n)\,|\,AA^{\mathsf{t}}=\mathbf{1}\}$ ortogonális csoport

   $\dim\mathsf{O}(n)=\frac{n(n-1)}{2}$

   nem összefüggő (tükrözések), de kompakt;

7. $\mathcal{P}$ Poincaré–csoport = Minkowski–téridő szimmetriacsoportja

   10 paraméteres: 3 térbeli + 1 időbeli eltolás + 6 négydimenziós

   forgatás (3 térbeli forgatás és 3 Lorentz–trafó)

   transzláció részcsoport és Lorent–csoport féldirekt szorzata

   nem összefüggő és nem kompakt.

2. Lie-algebra

Minden Lie–csoportnak létezik olyan (ún. *kanonikus*) paraméterezése, amelyre $\boldsymbol{\iota}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) = -\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ és

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\boldsymbol{\beta}})_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{j,k=1}^{n} c_i^{jk} \alpha_j \beta_k + \text{magasabb rendű tagok}}$$

A c_i^{jk} valós együtthatók a Lie–csoport struktúraállandói.

Struktúraállandók tulajdonságai:

$$c_i^{jk} + c_i^{kj} = 0 \qquad \text{antiszimmetria}$$

$$\sum_m \{c_i^{jm} c_m^{kl} + c_i^{km} c_m^{lj} + c_i^{lm} c_m^{jk}\} = 0 \qquad \text{Jacobi-azonosság}$$

Lie tételei:

1. struktúraállandók meghatározzák a magasabb rendű tagokat!

2. antiszimmetriát és Jacobi-azonosságot kielégítő tetszőleges valós c_i^{jk} együtthatók valamely Lie-csoport struktúraállandói (megfelelő kanonikus paraméterezésben).

Lokálisan izomorf csoportok struktúraállandói megegyeznek (megfelelően választott paraméterezések esetén).

Különböző kanonikus paraméterezésekben számított struktúraállandók között lineáris összefüggés $\rightsquigarrow$ csoportszerkezet linearizálása.

Lie-algebra: $\mathcal{L}$ lineáris tér egy $[a,b]$-vel jelölt mindkét változójában lineáris ('bilineáris') kétváltozós művelettel (azaz $[\lambda a+\mu b,c]=\lambda[a,c]+\mu[b,c]$ és $[a,\lambda b+\mu c]=\lambda[a,b]+\mu[a,c]$ minden $a,b,c\in\mathcal{L}$, ill. λ,μ skalárok esetén), amelyre teljesül

$$[a,b]+[b,a]=0 \qquad \text{antiszimmetria}$$

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0 \qquad \text{Jacobi-azonosság}$$

Művelet bilineáris $\rightsquigarrow$ elegendő ismerni báziselemekre.

Lie–morfizmus: műveletőrző $\phi:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2$ lineáris leképezés

$$\phi\big([a,b]\big)=[\phi(a),\phi(b)]$$

Példák:

1. $\mathbb{R}^3$ a vektoriális szorzattal

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}})\, \vec{\boldsymbol{b}} - (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})\, \vec{\boldsymbol{c}}$$

2. $n \times n$-es mátrixok az $[A,B] = AB - BA$ kommutátor-művelettel;

3. $\mathfrak{gl}(V)$ általános lineáris Lie–algebra az $A: V \to V$ lineáris operátorok összessége a szokásos $[A,B] = AB - BA$ kommutátorral;

4. megfigyelhető mennyiségek a Poisson-zárójellel a klasszikus mechanika kanonikus formalizmusában;

5. impulzusmomentum komponensei a kvantummechanikában.

Csoport Lie-algebrája: olyan valós Lie-algebra, amelyben megfelelően választott $\mathbf{B}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ bázis esetén ($n=\dim G$ a paraméterek száma)

$$[b_i,b_j]=\sum_k c_k^{ij}b_k$$

ahol c_k^{ij}-k a csoport struktúraállandói (Lie–izomorfia erejéig egyértelmű).

Alternatív definíciók: egységelem érintőtere, invariáns vektormezők, stb.

Lokálisan izomorf csoportok Lie–algebrái izomorfak.

Egyparaméteres alcsoport: valós számok additív csoportjával lokálisan izomorf részcsoport (ciklikus részcsoport analógja a Lie–elméletben).

$$\boxed{\text{egyparaméteres alcsoportok} \leftrightsquigarrow \text{Lie–algebra egydimenziós alterei}}$$

Transzformációcsoport: $\mathbb{R}^m$ folytonos koordináta-transzformációinak csoportja (differenciálható sokaság diffeomorfizmusai)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ x_i &\mapsto x_i' \end{aligned}$$

differenciálható leképezés $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén.

Infinitezimális generátorok

$$T_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}})_j}{\partial \alpha_i} \right)_{\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\vec{\mathbf{0}}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

elsőrendű parciális differenciál-operátorok ($i=1,\ldots,n$).

$$[T_i, T_j] = T_i \circ T_j - T_j \circ T_i = \sum_{k=1}^{n} c_k^{ij} T_k$$

c_k^{ij} együtthatók a transzformációcsoport struktúraállandói.

Példák

1. A háromdimenziós eltolások csoportja: jelölje

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \vec{\boldsymbol{x}} &\mapsto \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned}$$

az $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$ vektorral történő eltolást. Ekkor

$$T_i = \sum_j \frac{\partial(x_j + \alpha_j)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

azaz az infinitezimális generátorok a koordináták szerinti parciális deriválások. Mivel ezek alkalmazásának sorrendje lényegtelen (Young–tétel),

$$[T_i, T_j] = 0$$

$\rightsquigarrow$ a struktúraállandók mind zérusok.

2. Az egydimenziós konform csoport: $a, b \in \mathbb{R}$-re $\mathbf{g}(a,b): x \mapsto ax+b$

   Megjegyzés: az egységelem paramétervektora $(1,0)$!

$$T_a = \left(\frac{\partial(ax+b)}{\partial a}\right)_{a=1,b=0} \frac{\partial}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$T_b = \left(\frac{\partial(ax+b)}{\partial b}\right)_{a=1,b=0} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[T_a, T_b] = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} = -T_b$$

3. A kétdimenziós forgáscsoport: $\alpha \in \mathbb{R}$-re

$$\mathbf{g}(\alpha): \begin{pmatrix} \mathsf{x} \\ \mathsf{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\mathsf{x} - \sin\alpha\,\mathsf{y} \\ \sin\alpha\,\mathsf{x} + \cos\alpha\,\mathsf{y} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\partial(\cos\alpha\,\mathsf{x} - \sin\alpha\,\mathsf{y})}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} + \frac{\partial(\sin\alpha\,\mathsf{x} + \cos\alpha\,\mathsf{y})}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}} = -\mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} + \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}$$

3. A Haar-mérték

Csoportstruktúrával kompatibilis Lebesgue-mérték.

Kompatibilitás csoportszerkezettel: transzláció-invariancia

$$\mu(gX) = \mu(Xg) = \mu(X)$$

minden $g \in G$-re és $X \subseteq G$ mérhető halmazra.

Kompakt csoportra mindig létezik Haar-mérték.

Haar-mérték egyértelmű multiplikatív faktor erejéig.

Haar-mérték $\rightsquigarrow$ Haar-integrál (csoportelemekre vett összegzés): paraméter-tartományra vett Lebesgue-Stieltjes–integrál.

4. A forgáscsoport

Rögzített ponton (origó) átmenő tengelyek körüli forgatások csoportja.

Descartes-koordináták lineárisan transzformálódnak, és az együttható-mátrix ortogonális és egységnyi determinánsú $\rightsquigarrow$ forgáscsoport azonosítható $\mathsf{SO}(3)$ csoporttal (n dimenzióban $\mathsf{SO}(n)$-nel).

Tetszőleges forgatás előállítható három, egymásra merőleges tengely körüli forgatás szorzataként:

$$\mathcal{O}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathcal{O}_x(\alpha_x)\,\mathcal{O}_y(\alpha_y)\,\mathcal{O}_z(\alpha_z)$$

ahol

$$\mathcal{O}_z(\alpha)\colon \begin{pmatrix} \mathsf{x} \\ \mathsf{y} \\ \mathsf{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\mathsf{x} - \sin\alpha\,\mathsf{y} \\ \sin\alpha\,\mathsf{x} + \cos\alpha\,\mathsf{y} \\ \mathsf{z} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ az infinitezimális generátor alakja

$$\boxed{L_z = \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}} - \mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}}}$$

Hasonló megfontolásból

$$L_x = \mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}} - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}$$
$$L_y = \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}$$

Lie-algebra: L_x, L_y, L_z generátorok lineáris kombinációi.

Kommutátorok

$$
\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= \left(\mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}} - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}\right)\left(\mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\right) - \left(\mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\right)\left(\mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}} - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}\right) \\
&= \mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\left(\mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\right) - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}\left(\mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\right) - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}}\left(\mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}} - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}\right) \\
&+ \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}}\left(\mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{z}} - \mathsf{z}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}}\right) = \mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} + \cancel{yz\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}} - \cancel{yx\frac{\partial^2}{\partial z^2}} - \cancel{z^2\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}} + \cancel{zx\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}} \\
&- \cancel{zy\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}} + \cancel{z^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} + \cancel{xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}} - \cancel{xz\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}} = \mathsf{y}\frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} - \mathsf{x}\frac{\partial}{\partial \mathsf{y}} = -L_z
\end{aligned}
$$

és hasonló módon

$$
\begin{aligned}
[L_x, L_z] &= L_y \\
[L_y, L_z] &= -L_x
\end{aligned}
$$

Tetszőleges $\vec{\boldsymbol{n}}$ irányú tengely körüli forgatások generátora

$$L_{\vec{\boldsymbol{n}}} = n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z$$

Kommutátoruk

$$[L_{\vec{\boldsymbol{n}}}, L_{\vec{\boldsymbol{m}}}] = L_{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{m}}}$$

$\Rightarrow$ forgáscsoport Lie–algebrája izomorf a háromdimenziós vektorok Lie–algebrájával (vektoriális szorzattal mint művelettel).

Észrevétel. Infinitezimális generátorok anti–hermitikus operátorok az $L^2(\mathbb{R}^3)$ Hilbert-téren

$$\langle f, L_i g \rangle = \int \overline{f(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z})} L_i g(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z})\, \mathsf{dxdydz} = -\langle L_i f, g \rangle$$

Önadjungált $J_i = -\mathrm{i}\, L_i$ generátorok (nem elemei a Lie–algebrának, csak a komplexifikált Lie–algebrának, amelyet a skalárok testének kiterjesztésével kapunk) kommutátorai (ϵ_{ijk} a Levi-Civita–tenzor)

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\, \epsilon_{ijk} J_k$$

Impulzusmomentum-komponensek csererelációi (Noether–tétel)!

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

nem eleme a Lie-algebrának, csak annak fedőalgebrájának (generátorok polinomiális kifejezéseinek algebrája), és kommutál minden generátorral

$$\left[J_i, J^2\right] = 0$$

$\rightsquigarrow$ J^2 egy (kvadratikus) Casimir–operátor.

Egységelemhez közeli $U \in \mathsf{SU}(2)$ mátrix alakja

$$U = \mathbf{1} + \mathrm{i}\,\varepsilon A$$

valamely 2x2-es A mátrixra és kicsiny ε valós paraméterre.

$1 = \det U = 1 + \mathrm{i}\,\varepsilon \mathrm{Tr}(A)$ miatt $\mathrm{Tr}(A) = 0$, míg U unitér volta következtében

$$\mathbf{1} = UU^\dagger = (\mathbf{1} + \mathrm{i}\,\varepsilon A)(\mathbf{1} - \mathrm{i}\,\varepsilon A^\dagger) = \mathbf{1} + \mathrm{i}\,\varepsilon(A - A^\dagger)$$

$\rightsquigarrow$ $A^\dagger = A$, azaz A egy önadjungált ('hermitikus') mátrix.

2x2-es spúrtalan és önadjungált mátrixok terének bázisa: Pauli–mátrixok.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kommutátoraik

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \frac{\sigma_i}{2}\frac{\sigma_j}{2} - \frac{\sigma_j}{2}\frac{\sigma_i}{2} = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$$

Struktúraállandók megegyeznek $\mathsf{SO}(3)$-éval (Lie-algebrák izomorfak)

$\rightsquigarrow$ $\mathsf{SU}(2)$ és $\mathsf{SO}(3)$ lokálisan izomorf csoportok.

$\mathsf{SU}(2)$ egyszeresen összefüggő, és Z centruma kételemű $\rightsquigarrow$

$$\mathsf{SO}(3) \cong \mathsf{SU}(2)/\mathsf{Z}$$

$\mathsf{SU}(2)$ a forgáscsoport univerzális fedőcsoportja!