Felelősséget
NEM vállalok
Hiba esetén a
tájékoztatást
köszönöm...

E-mail:
nikolett@
vipmail.hu

Csoportelmélet tételjegyzék

1. Csoportaxiómák, izomorfizmus és homomorfizmus, Abel-csoportok.

2. Részcsoportok és mellékosztályok, Lagrange-tétel, normális részcsoport.

3. Faktorcsoport, homomorfizmus-tétel, egyszerű csoportok.

4. Direkt szorzat, Frobenius--Stickelberger-tétel.

5. Konjugált osztály, centralizátor, derivált részcsoport.

6. Lie-csoport, lokális izomorfia, topológiai tulajdonságok.

7. Lie-algebra, Haar-mérték.

8. A forgáscsoport.

9. Ábrázolás, ekvivalencia, reducibilitás.

10. Direkt összeg, Maschke-tétel, Schur-lemma.

11. Tenzorszorzat, fúziós gyűrű, elágazási szabályok.

12. Karakterek, karaktertábla, ortogonalitási relációk.

13. Projektív ábrázolás, szimmetrizált négyzet, Frobenius--Schur-indikátor.

14. Invariánsgyűrű, szimmetrikus polinom, Molien-képlet.

Irodalom

G.G. Hall : Alkalmazott csoportelmélet, MK.

Gitterman, Halpern : Fizikai problémák kvalitatív elemzése, MK.

Fuchs : Algebra (egyetemi jegyzet).

Kirillov : Elemets of the theory of representations, Springer.

Alperin, Bell : Groups and representations, Springer.

Magnus, Karras, Solitar : Combinatorial group theory.

Wielandt : Permutation groups.

Robinson : A course in the theory of groups, Springer.

Csoportelmélet

konzultáció: csütörtök 15:30-16:30

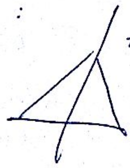
Csoportelmélet jelentősége

• szimmetria } leírása
• homológia

Szimmetria?

• Emberek szimmetrikusak (páros szervek)
• Vannak állatok, melyek 5 (régen 7) fogású szimmetriát mutatnak. => biológia
• Építészet
• Geometria (szabályos sokszögek, testek...)
→ invariancia a részek felcserélésével szemben
(olyan geometriai transzformáció, ami a vizsgált objektumot, mint egészet, változatlanul hagyja)

pl.: szabályos háromszög:



tengelyes tükrözés
120°-os forgatás

Fizikai szimmetria

Olyan transzformáció, amely felcserélhető az időfejlődéssel.
(A mozgásegyenletek egyik megoldását egy másikba vivő transzformáció)

Szimmetriák szorzása:
2 szimmetriatranszformáció egymás után szintén szimmetria transzformáció lesz.
2 szimmetria kompozíciója is szimmetria.

Szimmetriák algebrája = csoport

Csoportelmélet: kvalitatív információ
kvantitatív összefüggések

A csoport egy halmaz az elemein értelmezett kétváltozós művelettel, amely teljesíti a csoportaxiómákat
„szorzás" $a, b \in G \Rightarrow$ szorzat: ab

Axiómák

→ asszociativitás: $a(bc) = (ab)c \quad a, b, c \in G$
→ egységelem létezése: $\exists\, 1 \in G$, hogy $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in G$
→ inverz elem létezése: $\forall\, a \in G$-hez $\exists\, a^{-1} \in G$, hogy $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Véges csoport: véges sok eleme van
<-> végtelen csoport

Kommutatív csoport = Abel-csoport: $ab = ba \ \forall a, b \in G$
<-> nem kommutatív csoport

Csoportfogalom általánosításai
- félcsoport: nincs inverz + egységelem
- kvázi-csoportok: nincs asszociativitás, de van egység- és inverzelem

Csoportok a matematikában (történeti áttekintés)
(1.) Lagrange-nál és Galois-nál jelent meg először a fogalom (polinom egyenletek megoldások gyökjelekkel)
<-> algebrai megfontolások
(2.) Hilbert (számelmélet)
(3.) Klein és Poincaré (geometria)
és erlangeni program
(4.) játékelmélet, differenciál egyenletek, ...

Csoportok a fizikában
(1.) kristályszimmetriák osztályozása
(2.) Noether-tétel (szimmetriák és megmaradási törvények)
(3.) relativitáselmélet (fizikai téridő szimmetriacsoportja a Poincaré-csoport)
(4.) kvantumelmélet (Wigner)
(5.) paritássértés (Yang és Lee)
(6.) kvarkmodell
(7.) mértékelmélet
(8.) szuperszimmetria és kvantumszimmetriák

Csoportelmélet 2012. 09. 20.

Csoportaxiómák

1. asszociativitás
2. egység elem létezése
3. inverz létezése

Példák csoportokra

1. Számcsoportok

Természetes számok (összeadás, szorzás) véges halmaz számossága
+
összeadás
nincs egységelem
⇓
legyenek Egész számok + összeadás
($\mathbb{Z}$, +) asszociatív
egység elem: 0
inverz: szám (-1)szerese
kommutatív csoport
végtelen csoport

} $\boxed{\text{Egész számok } (\mathbb{Z}) \text{ additív } (+) \text{ csoportja}}$

Páros egész számok
összeadás művelet, mert páros + páros = páros
asszociatív
egység elem: 0
inverz: páros szám (-1)szerese
+
kommutatív, végtelen

Páratlan számokra
az összeadás nem művelet!

Számgyűrű: komplex számok ~~körül tartalmazza~~
olyan részhalmaza $R \subseteq \mathbb{C}$, amelyre:

1. $-1 \in R$
2. $a, b \in R \Rightarrow a+b \in R$
3. $a, b \in R \Rightarrow a \cdot b \in R$

pl: egész számok, racionális, valós számok

Az összeadás műveletével mindig kommutatív csoportot alkotnak.

(R, +) egy kommutatív csoport, a számgyűrű additív csoportja

-1 benne van $\Rightarrow (-1)\cdot(-1) = 1$ benne van $\Rightarrow (-1)+1 = 0$ benne van
$\Rightarrow$ minden -1-szerese is benne van

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ szorzás asszociatív művelet, egységelem: 1

de nincs az egész számok körében inverz

$2a = 1$ egyenlet megoldása nem létezik $\mathbb{Z}$-ben

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ nem jó a 0 miatt

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoport

tul.: asszociatív szorzás

egységelem: 1

inverz: $a \Rightarrow \frac{1}{a}$ $a \neq 0$

kommutatív, végtelen

a racionális számok multiplikatív csoportja

<u>Számtest</u>: olyan számgyűrű, melyben minden nem zérus elem reciproka is eleme a testnek

pl.: racionális számok

2. Lineáris csoportok (mátrixcsoportok)

mátrix: négyzetes táblába rendezett számok

lineáris leképezés $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$f(\lambda v) = \lambda f(v)$

↳ mindegyikhez hozzá lehet rendelni egy mátrixot és fordítva, ha megadok egy bázist

<u>V lineáris tér</u>

$(V, +)$ kommutatív csoport

$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

$\alpha \in$ skalár $\Rightarrow$ számtest elemei

$v_1, v_2 \in V$ komplex számok

adott számtest feletti lineáris tér

lineáris leképezés

$A: V_1 \rightarrow V_2$

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A(v_1) + \beta A(v_2)$$

mátrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{pmatrix}$$

kiválasztok egy bázist V-ben

mindegyik elem előállítható legyen a lineáris kombinációjukként.

$\{b_1, \ldots, b_k\}$ bázisa V_1-nek

$\{f_1, \ldots, f_k\}$ bázisa V_2-nek

Csoportelmélet 2012. 09. 20.

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i b_i$$

$$A(v) = \sum_{i=1}^{k} v_i A(b_i)$$

↳ skalár kiemelhető

$$A(b_i) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} f_j$$

=> V_2 elemei, mely kifejthetők a V_2-n értelmezett $\{f_j\}$ bázison

⇓ együttható: mátrix elemei

Spec.: $V_1 = V_2$ => A lineáris operátor => ugyanaz a bázis $b_i = f_i$

V lineáris tér operátorai: (kommutatív csoport $(V,+)$)

$(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ $(A+B)$ és (AB) is lineáris operátor

$(AB)(v) = A(Bv)$

↑ leképezés kompozíciója

zérus operátorhoz nem létezik inverz

Operátorok szorzása asszociatív és egységelemes művelet,
(kompozíció) (egység operátor)

viszont általában nem létezik inverz csak $\det A \neq 0$ esetén => általában nem alkotnak csoportot

<u>Adott lineáris tér általános lineáris csoportja</u>

$GL(V) = \{A: V \to V$ invertálható lineáris operátorok$\}$

művelet: kompozíció: operátorok szorzása

ha V 1 dimenziós minden elem 1 skalárral való szorzás

⇓ kommutatív csoport (skalárok számok multiplikatív csoportja)

Ha dim $V > 1$ végtelen nemkommutatív csoport

<u>Adott lineáris tér feletti speciális lineáris csoport</u>

$SL(V) = \{A: V \to V$ lineáris $\mid \det A = 1\}$

szorzatuk determinánsa is 1

fontos szerep az alkalmazásokban

mátrixcsoport: bázis => szorzás = mátrixszorzás

$GL_n = \{n \times n$-es invertálható mátrixok$\}$

$SL_n = \{n \times n$-es egységdeterminánsú mátrixok$\}$

bázis $\to GL_n \to$ művelet: mátrixszorzás

SL_n

(3.) Permutációs csoportok

kiindulás: véges halmaz

X véges halmaz

egyetlen őskép és egyetlen kép

$Sym(X) = \{X \to X$ bijektív leképezés$\}$

leképezések kompozíciója a művelet, mert bijektív leképezések kompozíciója bijektív

$Sym(X)$ csoportot alkot a kompozíció művelettel

egységelem: egység permutáció (önmagára)

inverz: minden bijektív leképezésnek létezik egyértelmű inverz.

Adott X halmaz feletti szimmetrikus csoport

egy adott X halmaz összes permutációja

Részcsoport:

Alternáló csoport: páros permutációk csoportja

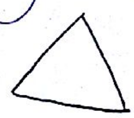
Minden permutáció felbontható transzpozíciókra, amik olyan permutációk, amelyben két elemen kívül az összes többi fix.

Páros számú transzpozícióval előállítható, szorzata a páros permutáció.

(4.) Geometriai szimmetriacsoportok

2D szabályos sokszögek szimmetriái

Szabályos (egyenlő oldalú) háromszög



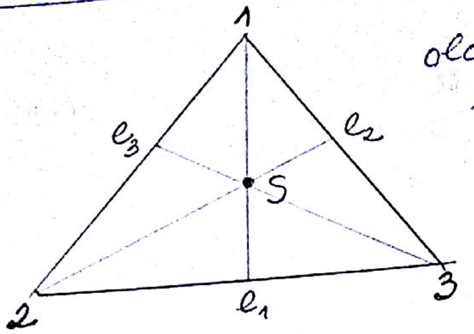
3 egyenlő oldal, 60° szög

Euklideszi: egyenesek közötti szögek, 2 pont távolsága } ezeket invariánsan hagyva Euklideszi izometria

Izometriák: elforgatások, tükrözések, eltolások } és ezek kompozíciója

2012.09.20.

Csoportelmélet



oldalfelezők metszéspontja, súlypont nem változhat meg => fix pont

csak olyan <u>forgatás</u> lehet, melynek fix pontja a súlypont

csak olyan <u>tükrözés</u>, ahol a tükrözési egyenes tartalmazza a súlypontot

(oldalon elmozdulva oldalon maradunk, más a csúcspont)

A szimmetria csúcspontot csúcspontba képez

3 <u>csúcspontot</u> a <u>tükrözés</u> csak úgy tud csúcspontba vinni, ha minden tükrözés egyenese tartalmaz egy csúcspontot, 2-t pedig megcserél.

$D_3 = \{ 1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{tükrözés}}, \underset{\substack{120°\text{-os} \\ \text{forgatás}}}{C}, \underset{\substack{240°\text{-os} \\ \text{forgatás}}}{C^2} \}$ harmadfokú diéder csoport: szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

D_n: n-edfokú diédercsoport a szabályos n-szög szimmetriacsoportja => általában nem kommutatív

Csoport rendje: hány elemű a csoport: $|D_n| = 2n$

művelet: transzformációk kompozíciója

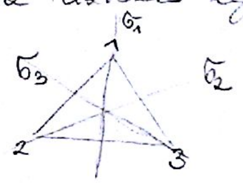
Csoport elemeinek jellemzése

D_3 legkisebb elemszámú nemkommutatív csoport.

Szorzótábla: (Cayley-tábla) véges csoportokra

D_3	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
1	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
σ_1	σ_1	1	C	C^2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	C^2	1	C	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	C	C^2	1	σ_1	σ_2
C	C	σ_3	σ_1	σ_2	C^2	1
C^2	C^2	σ_2	σ_3	σ_1	1	C

2 tükrözés egymásutánja



σ_1: $1 \to 1$, $2 \leftrightarrow 3$ $\quad$ σ_2: $2 \to 2$, $1 \leftrightarrow 3$ $\quad$ σ_3: $3 \to 3$, $2 \leftrightarrow 1$

$\sigma_1 \cdot \sigma_2$: $\left.\begin{array}{l} 1 \to 3 \to 2 \\ 2 \to 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \to 1 \end{array}\right\}$ forgatás

C: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$ ✓

$\sigma_2\sigma_1$: $1 \to 1 \to 3$, $2 \to 3 \to 1$, $3 \to 2 \to 2$

$C = \sigma_1\sigma_2$

$\sigma_1 C = \sigma_1\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2$

$\sigma_1 C^2 = \sigma_1\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3$

Az egyes sorokban és oszlopokban minden csoportelem csak egyszer fordul elő.

Átlóra való tükrözés nem szimmetrikus => nem kommutatív a csoport.

Első és utolsó 2 elem:

C^2	1	C	C^2
1	1	C	C^2
C	C	C^2	1
C^2	C^2	1	C

forgatások is külön csoportot alkotnak

a forgásszimmetria csoportja részcsoport

Csoportelmélet 2012. 09. 27.

Kimmelnál -> csúcspontok permutációját rendeltük hozzá
egy követtük le a műveletek eredményét

~~Hom~~omorfizmus:
(azonos alak)

bonyolult geometriai egymás utáni műveletek
helyett permutációkon végzett

Olyan leképezés 2 csoport között, mely művelettartó

$\phi : G \to H$ $\qquad \phi(x \times y) = \underbrace{\phi(x)\phi(y)}_{H \text{ csoportbeli szorzás}} \quad \forall x, y \in G$

$\times$: őskép elemei G-beli szorzás

Következmények
$\phi(1_G) = 1_H \qquad \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

Van egy alaki hasonlóság (kapcsolat) közöttük,
nem lehet túl mély, mert:

pl.: $E = \{1\}$ a szorzás műveletével
egyelemű csoport

	1
1	1

$\phi : G \to E$ művelettartó, mert
$x \mapsto 1 \qquad \phi(xy) = 1 = \underbrace{\phi(x)}_{1}\underbrace{\phi(y)}_{1}$

Akkor lesz igazán mély kapcsolat, ha megkövetelnénk,
hogy a leképezés bijektív legyen: izomorfizmus

Izomorfizmus: bijektív ~~homo~~ homomorfizmus

G és H izomorf, jelben $G \cong H$, ha $\exists\ \phi : G \to H$ izomorfizmus

Ekvivalencia reláció szerűség (reflexív, tranzitív...)
tulajdonságok:

1. $G \cong G$
2. $G \cong H \Rightarrow H \cong G$
3. $G \cong H$ és $H \cong K$ $\Rightarrow G \cong K$

Nem alkot a csoportok összessége halmazt, ezért nem ekvivalencia-
reláció.

$G \cong H \Rightarrow |G| = |H|$

csoport rendje: elemek száma

Geometria <-> permutáció -> izomorfizmus

ugyanazt az információt tartalmazzák a Δ-re vonatkozólag

Izomorfia-elv: egymással izomorf csoportok csoportelméleti szempontból nem különböztethetők meg.

Pl.: Észrevételek

(1) X és Y véges halmazok

$Sym(X) \cong Sym(Y) \Leftrightarrow$ (akkor és csak akkor) ha a 2 halmaz ugyanannyi elemet tartalmaz

$|X| = Y$

n-edfokú szimmetrikus csoport

S_n (n-elemű halmaz feletti szim. csoport)

pl: $S_n := Sym(\{1, \dots, n\})$ összes permutáció

(2) Δ szimmetria csoportja $D_3 \cong S_3$ 1,2,3 összes permutációja

3 felett már ez nem igaz

tetraéder szimmetria csoportja $T \cong A_4$ ugyelemű alternáló csoport

(3) $\{\Phi : G \to G\} = Aut(G)$

G csoport automorfizmusai

kompozíciójukat véve is Aut

Csoportot alkotnak az automorfizmusok a kompozíció műveletével.

Egységelem: identitás leképezés

Mivel aut bijektív => létezik inverz leképezés

Automorfizmus: Csoport szimmetriastruktúrája. Hogy hozom önmagával fedésbe?

A D_3-ból a forgatásokkal kiválasztva

	1	C	C^2
1	1	C	C^2
C	C	C^2	1
C^2	C^2	~~Ø~~ 1	C

részcsoport

forgási szimmetriák rész-szimmetriák.

A tükrözés nem. 2 tükrözés 1 forgatás

Különbség azért, mert a forgatás irányítástartó, a tükrözés pedig nem.

(Csoport) Részhalmazbeli elemek az eredeti művelettel csoportot alkotnak -> Részcsoport

H részcsoport, ha

$H \subseteq G$ ① $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ ② $\exists x^{-1} \in H \ \forall x \in H$-ra } ③ $e \in H$ (egység)

$\Downarrow$

$H < G$

$\{1, C, C^2\} < D_3$ forgási részcsoportja a háromszög szimmetriacsoportjának.

$\{1_G\} < G$ G triviális részcsoportja

$G < G$

Adott csoport részcsoportjainak összessége halmazt alkot
↳ értelmes relációról beszélni

tulajdonságok:

1. $G < G$
2. $H < G$ és $G < H \Rightarrow$ ~~iref~~ $G = H$ ireflexív reláció
3. $H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$ tranzitív
4. $|H| \leq |G|$
   „=" pl. $(2\mathbb{Z}, +)$ csoport $< (\mathbb{Z}, +)$
   $|(2\mathbb{Z}, +)| = |(\mathbb{Z}, +)|$
5. Ha részcsoportok metszete is részcsoport
   $H_1 < G$ & $H_2 < G$ $H_1 \cap H_2$

$H_1 < G$ és $H_2 < G$

$x, y \in (H_1 \cap H_2)$

$x \in H_1$	$x \in H_2$	$\Rightarrow x \in (H_1 \cap H_2)$
$y \in H_1$	$y \in H_2$	$\Rightarrow y \in (H_1 \cap H_2)$
$x \cdot y \in H_1$	$xy \in H_2$	$\Rightarrow x \cdot y \in (H_1 \cap H_2)$
$x^{-1} \in H_1$	$x^{-1} \in H_2$	$\Rightarrow x^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$
$y^{-1} \in H_1$	$y^{-1} \in H_2$	$\Rightarrow y^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$

$H_1 \cup H_2$ ~~nem~~ $\not< G$ általában.

- Legyen X a G csoport elemeinek tetszőleges részhalmaza. Tekintsük az összes olyan részcsoportot, mely tartalmazza X-et $\Rightarrow$ ezek metszete részcsoport lesz, mely tartalmazza X-et

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{H<G \\ X \subseteq H}} H$$ neve: az X halmaz által generált részcsoport

Legkisebb olyan részcsoport, mely tartalmazza az X-et.

- $H < G$ és $X \subseteq G$, hogy $\langle X \rangle = H$ akkor az X generátorrendszere H-nak

C2

Ciklikus csoportok

~~Létezik olyan~~ Olyan csoport, amely generálható egyetlen elemmel.

Pl: $(\mathbb{Z}, +) \Rightarrow$ végtelen ciklikus csoport (a többi is izomorf vele)

$1 + 1 = 2$ összes elem így megkapható

$1 + 2 = 3$

$\vdots$

$\{1\}$ generálja az egész csoportot

$(2\mathbb{Z}, +)$ $\{2\}$

$(N \cdot \mathbb{Z}, +)$ $\{N\}$

Nem triviális részcsoportok is 1 elemmel generálhatók

„Miért érdekesek a ciklikus csoportok?"
(Miért, érdekesek a ciklikus csoportok?)

Kezdetük

x generálja

$x^0, x, x^2, x^3, \dots$ összes pozitív hatványa x-nek

↳ egységelem $x x^0 = x$

$\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x, x^2, x^3, \dots$

Vagy véges, vagy végtelen

Ha G véges, csak véges számú különböző x hatvány lehetséges. ⇒ periodikusan ismétlődnek a hatványok

Legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesül $x^n = 1$

↳ ciklikus csoport rendje (n-elemű)

Végtelen csoport

végtelen sok különböző x hatvány

Ha $|G| = \infty$, akkor $\phi: G \to (\mathbb{Z}, +)$

$x^k \mapsto k$ ⇒ bijektív, műveletartó leképezés

$x^k x^m = x^{(k+m)}$

$\phi(x^k x^m) = \phi(x^k) + \phi(x^m)$

Véges csoport

$\{x^0, x^1, x^2, \dots x^{n-1}\}$ $\phi: G \to \{0, \dots, n-1\}$

$x^k \mapsto k$

$0 \leq k, l < n$ $x^k x^l = x^{k+l} = x^{(k+l) \bmod n}$

$(\mathbb{Z}_n, +)$ modulo n egészek

$\mathbb{Z}_n$ v. $\mathbb{Z}$ ciklikus csoport (ezekkel izomorf csoportok vannak)

$\{1, C, C^2\} < D_3$

ciklikus részcsoport $\langle\{C\}\rangle = \langle\{C^2\}\rangle = \langle\{C, C^2\}\rangle$

$x \in G$ elem rendje az általa generált $\langle x \rangle$ ciklikus részcsoport elemszáma

Általában:

$H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$

részcsoport részcsoportja is részcsoportja az eredeti csoportnak.

(Részcsoportok összessége egy részben rendezett halmaz (nem definiáljuk minden elemek közt, de alkalmas rendezésre).

~~Hálót alk~~

(Részcsoportok mindig egy hálót alkotnak.

Mindig léteznek ~~leg~~ minimumok és maximumok (~~legkisebb~~ nagyobb alsó és ~~legnagyobb~~ kisebb felső korlát)

Minimum: metszet

$\min\{H_i\} = \bigcap_i H_i$ $\max\{H_i\} = \langle \bigcup_i H_i \rangle$

unió által generált részcsoport

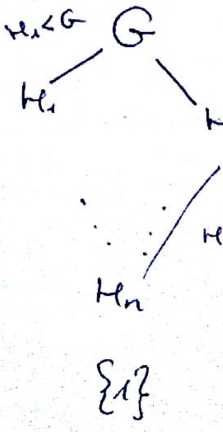
legkisebb uniót tart. részcsop.

(Részcsoport háló ~~fiz~~ analízise fontos szimmetriasértésnél.

Kevesebb szimmetria a határfeltételekben mint a mozgásegyenletben $\Rightarrow$ következtetések mozgásegyenlet megoldása nélkül

Hasse-diagram

G csoport $H < G$ részcsoportok összessége

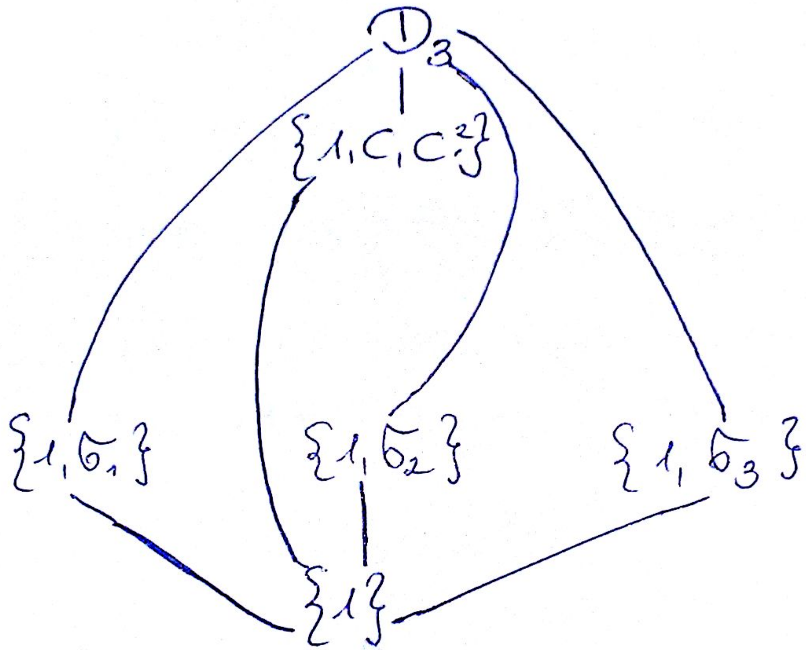


$H_n < H_2$ és nincs olyan $H_i < H_2$, melyre $H_i < H_n$.

Csoport elmélet 2012. 03. 27.

Akkor húzunk egy élt a diagramba 2 részcsoport közé, (K és H), ha $K<H$ és ha $K<M<H$, akkor

$K=M$ vagy $M=H$



tükrözések másodrendű ciklikus csoportja

minél kisebb indexű a részcsoport annál feljebb van.

2012.10.04.

Mellékosztály

Csoport speciális részhalmazai; részcsoporttal képezzük

$H < G$ → részcsoport.

$x \in G \qquad x \cdot H = \{ x h \mid h \in H \}$

baloldali mellékosztály

$H \cdot x = \{ h x \mid h \in H \}$

jobboldali mellékosztály

Általában nem esnek egybe, de tökéletes dualitás létezik köztük => egyértelmű megfeleltetés, tulajdonságok azonosak

Tulajdonságok

A mellékosztályok particionálják a csoportot, csoportelemek összességét

Minden csoportelem benne van valamelyik mellékosztályba

$x \in x \cdot H$, mert $e \in H$ egységelem

2 mellékosztály vagy egybeesik, vagy diszjunkt

Biz.:

$z \in xH \cap yH$

$z = x \cdot h_1 = y \cdot h_2 \qquad h_1, h_2 \in H$

$y = x \underbrace{(h_1 h_2^{-1})}_{h_3 \in H} = x h_3$

$y \in xH$

$yH = \{ y k \mid k \in H \} = \{ x \underbrace{(h_3 k)}_{\in H} \mid k \in H \} = xH$

A mellékosztályok megfelelnek ekvivalenciaosztályoknak egy megfelelő ekvivalenciarelációnak

Minden mellékosztály számossága megegyezik

Kitüntetett mellékosztály: $x = 1$. => triviális mellékosztály

$1 \cdot H = H$

$xH = \{xh \mid h \in H\}$

$xh \mapsto h$ egyértelmű hozzárendelés
bijekció ⇒ invertálható

(Bijekció ∃ H és xH között
A csoport elemeinek számosságát megkapjuk
részcsop rendje · mellékosztályok száma

Mellékosztályok összessége és halmazt alkot: G/H

(Részcsoport indexe: G-ben $= [G:H]$ ....
G/H halmaz számossága
(mellékosztályok száma)

$[G:G] = 1$

$[G:\{1_G\}] = |G|$: G rendje

Lagrange-tétel

Ha G véges csoportot alkot: $|G| = |H| \cdot [G:H]$ ∀
$H < G$ részcsoportra

$|D_3| = 6$ ⇓ $\underbrace{|\{1, \sigma_i\}| = 2 \quad |\{1\}| = 1 \quad |\{1, c, c^2\}| = 3}_{G \text{ osztói valóban}}$

Állítás: Minden prímrendű csoport ciklikus

$|G| = p$ prím

$H < G \quad |H| = \overset{\{1\}}{1}$ vagy p

Mivel $p > 1$, ezért kell lenni $g \in G$-nek, ami
$1 \neq g$ ez adja vissza az egész G csoportot $\langle g \rangle = G$

D_3 külön csoport szorzó táblája

	1	c	c^2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	c	c^2	σ_1	σ_2	σ_3
c	c	c^2	1	σ_3	σ_1	σ_2
c^2	c^2	1	c	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	c	c^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	c^2	1	c
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	c	c^2	1

$N = \{1, c, c^2\}$ —

$H_1 = \{1, \sigma_1\}$ —

$G/N = \{N, \sigma_i N\}$ mellékosztályok
nincs több, mert az összes elem megvan
$x \in D_3$
xN, ahol $x \notin N$

$\sigma_1 N = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_2 N = \sigma_3 N$

Különböző elemekhez tartozó mellékosztályok megegyezhetnek

$N\sigma_1 = \sigma_1 N$ speciális eset

$G/H_1 = \{H_1, cH_1, \sigma_2 H_1\}$

$cH_1 = \{c, \sigma_3\} = \sigma_3 H_1$ | $\sigma_2 H_1 = \{\sigma_2; c^2\} = c^2 H_1$

$H_1 \sigma_2 = \{c, \sigma_2\} \neq \sigma_2 H_1$

Normális részcsoport: $xN = Nx \quad \forall x \in G$

$N < G$

pl. • $N = \{1, c, c^2\}$ D_3-ból
• $\{1\}$
• G

Minden részcsoport normális, ha G csoport kommutatív.

Normális részcsoport különleges jelentősége

Ekvivalenciareláció minden részcsoport mellékosztályai definiálják

$\Downarrow$

$x \equiv_N y$ ha ugyanazon mellékosztály elemei
tranzitív, megfordítható

Bármely partíció az ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztálya.

$\underbrace{\text{kongruenciareláció}}$ is most

Normális részcsoport esetén ez kompatibilis a csoportművelettel

$x_1 \equiv_N y_1 \quad x_2 \equiv_N y_2 \Rightarrow x_1 x_2 \equiv_N y_1 y_2$

Ez lehetőséget ad egy struktúra (művelet) definiálására a mellékosztályok halmazán (ekvivalenciaosztályok)

<u>kongruenciareláció:</u>
2 e. oszt.-ból elemek szorzás benne lesz 3. e.oszt-ban
1. és 2. meghatározzák 3.-at

C_1 C_2 ekvivalenciaosztályok
$x_1 \in C_1$ $x_2 \in C_2$
$C_1 C_2$ = $x_1 x_2$-t tartalmazó osztály

asszociatív, egységelemes, inverz osztály (osztály elemeinek inverze) => csoport

<u>G/N faktor-csoport:</u> N normális csoporthoz tartozó kongruenciareláció ekvivalenciaosztályon értelmezett csoport.

<u>Leírás:</u> csoport → egyszerűbb struktúrájú faktor-csop.

$G/N = \{xN\}$

2 mellékо. ↦ 3. mellékо.

$(xN)(yN) = (xy)N$

$X, Y \subseteq G$

$X \cdot Y = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$
komplexus-szorzat

$xN = \{xh \mid h \in N\} = \{x\}N$

mellékosztályok komplexus szorzata akkor lesz mellékosztály, ha ezek egy normális csoport részhalmazai

Egy részcsoport akkor normális, ha bármelyik mellékosztályainak komplexus szorzata is részcsoport

pl.: D_3 normális részcsoportjai
$\{1\}$; D_3, $\{1, c, c^2\}$

Megfelelő faktorcsoportok

normális részcsop.:

$\{1\}, D_3, \{1, C, C^2\}$

izomorf $\downarrow$ $\downarrow$

D_3 $\{1\}$

$G/\{1\} \cong G$ $G/G \cong \{1\}$

D_3/N	N	$\underbrace{\sigma_1 N}_{}$ N-en kívül
N	N	$\sigma_1 N$ = N-en kívül · N
$\sigma_1 N$	$\sigma_1 N$	N 2 tükr. szorz = forgatás

N: forgatások részcsoportja irányítástartó transzformáció

$\sigma_1 N$: tükrözések: irányításváltó transzformáció

Megkülönböztet: irányítástartó „+"

váltó „−"

	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

Összes irányítástartó transzf. $\mapsto 1$, összes irányítás. váltó transzf. $\mapsto -1$ ⇒ homomorfizmus

$$\phi: D_3 \to \{1, -1\}$$
$$x \mapsto \text{paritás}(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} N \mapsto 1 \\ \sigma_1 N \mapsto -1 \end{array}\right\} \text{izomorfizmus}$$

Minden faktorcsoport meghatároz egy homomorfizmust, a természetes homomorfizmust

normális részcsoport

$$N \triangleleft G$$

$$\pi_N: G \to G/N$$
$$x \mapsto xN$$
homomorfizmus

Biz.: műelettartó leképezés:

$$\pi_N(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi_N(x)\pi_N(y)$$

Természetes homomorfizmus képe:

$$\pi_N(G) = G/N$$

olyan leképezés, mely szürjektív homomorfizmus

Minden homomorfizmushoz hozzárendelhető egy normális részcsoport.

Homomorfizmus-tétel

Tetszőleges $\phi: G \to H$ homomorfizmus esetén a

$\underline{\ker \phi} = \{x \in G \mid \phi(x) = 1_H\}$ egy normális részcsoportja

ϕ magja

G-nek. és $G/\ker\phi \overset{\text{izomorf}}{\cong} \phi(G)$

Biz.:

$x, y \in \ker\phi$ $\quad \phi(x) = \phi(y) = 1$

$x^{-1} \in \ker\phi$ $\quad \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = 1$

$xy \in \ker\phi$ $\quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = 1$

$\Big\}$ részcsoport

$\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ Állítás: részcsoportja G-nek

$\phi(x) \quad \phi(y) \quad x, y \in G$

$\phi(x)\phi(y) = \phi(xy) \in \phi(G)$

G-ből tetszőleges összes homomorfizmusai végigfutva hozzárendeli a képet $\Rightarrow$ többi csoporthoz való viszony nincs benne, csak G

Ha ismerem az összes normális csoportot $\Rightarrow$ tudok az összes lehetséges homomorfizmusról.

Homomorf képek = faktorcsoportok (izomorfia erejéig)

Korrespondencia-tétel:

Egyértelmű kapcsolat van $\phi(G)$ részcsoportjai és G azon részcsoportjai között, amelyek tartalmazzák $\ker \phi$-t.

2012. 10. 11.

Konstrukciós eljárás: egyszerűbb az eredeti csoport struktúrájánál eddig

Bonyolultabb:

Direkt szorzat

Vegyük G és H csoportokat.

$G \times H$ direkt szorzat elemei rendezett párok, melyek 1. eleme G-ből 2. H-ból származik

$(x, y) \in G \times H$. $x \in G$ $y \in H$

Közöttük lévő műveleteket (direkt szorzat) komponensenként értelmezzük

$$\underbrace{(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)}$$

Állítás kielégíti a csoport axiómákat

kért → nem visz ki $x_1 x_2$ G-ből, $y_1 y_2$ H-ból

$$\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big)(x_3, y_3) = (x_1 x_2, y_1 y_2)(x_3, y_3) = ((x_1 x_2)x_3, (y_1 y_2) y_3)$$

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1)(x_2 x_3, y_2 y_3) = (x_1(x_2 x_3), y_1(y_2 y_3))$$

asszociatív

egységelem: $(1_G, 1_H)$

$$(1_G, 1_H)(x, y) = (x, y)$$

inverzképzés komponensenként

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$$

Művelet tulajdonságok

Ez igazából nem művelet (G és H csoportok, nem halmaz)

(1.) $G \times H \overset{\text{izomorf}}{\cong} H \times G$

kommutatív pszeudoművelet

(2.) $(G \times H) \times K \cong G \times (H \times K)$ asszociatív

(3.) $G \times \underbrace{\{1\}}_{\text{triviális csoport}} \cong G$

Csoportelmélet 2012. 10. 11.

Nincs inverz

$|G \times H| = |G||H|$ számosság

mert akkor olyan számossága kéne lenni az inverznek, hogy $|G||G^{-1}| = 1$ de ilyen persze nincs

Csoport Descartes-szorzatának tulajdonságai (eredmény csoport)

- $G \times H = \{(x,y) \mid x \in G,\ y \in H\}$

$\hat{G} = \{(x, 1_H) \mid x \in G\}$ részhalmaz

$\hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$

Állítás: $\hat{G}$ és $\hat{H}$ részcsoportja a direkt szorzatnak

① 1. elem $x \in G$ -k szorzata, 2. mindig 1_H

$(x, 1_H)(y, 1_H) = (xy, 1_H)$

$\left.\begin{array}{l} \hat{G} \triangleleft G \times H \\ \hat{H} \triangleleft G \times H \end{array}\right\}$ normális részcsoportok

bal- és jobboldali mellékosztályok

$(g, h) \in G \times H$

$(g,h)\hat{G} = \{(g,h)(x, 1_H) \mid x \in \hat{G}\} =$

$= \{(gx, h) \mid x \in G\} = \{(x,h) \mid x \in G\}$

végigmenve x-szel

gx mindig egy másik elem, de végül mindet előállítja.

$\hat{G}(g,h) = \{(x, 1_H)(g,h) \mid x \in G\} =$

$= \{(gx, h) \mid x \in G\} = \{(x,h) \mid x \in G\}$

- Tekintsük a köv. leképezést

$\varphi : G \times H \to G$

$(x,y) \mapsto x$

Állítás: ez homomorfizmus

$$\phi: G\times H \to G$$
$$(x,y) \mapsto x$$

$$\phi\big((x_1,y_1)(x_2,y_2)\big) = \phi(x_1x_2, y_1y_2) = x_1x_2 =$$
$$= \phi(x_1,y_1)\,\phi(x_2,y_2)$$

homomorfizmus képe: G első komponensében végigfutva

$\phi(G\times H)=G$ előállítja G összes elemét

magja: $\mathrm{Ker}\,\phi = \{(x,y)\in G\times H \mid \phi(x)=1_G\} =$

$= \{(1_G,y) \mid y\in H\} = \hat{H}$

- Homomorfizmus magja normálcsoport

  $G=\phi(G\times H)\cong G\times H/\hat{H}$

  képe izomorf a homomorfizmus magja szerinti faktorcsoporttal

- $\hat{G}\cong G \quad \hat{H}\cong H$

  Tekintsük a $\pi: \hat{G}\to G$

  $(x,1_H)\mapsto x$ leképezést

  konkrét izomorfizmus.

- 2 részcsoport metszete is részcsoport.

  $\hat{G}\cap\hat{H} = \{(1_G,1_H)\}$ triviális részcsoport (direkt szorzat egységeleme)

- legkisebb olyan csoport, mely mindkettőt tartalmazza, ennek az unió által generált részcsoport

  $\langle \hat{G}\cup\hat{H}\rangle = G\times H$

  $\hat{G}\cup\hat{H} = \{(x,y) \mid x=1_G \text{ v. } y=1_H\}$

  ezáltal generált részcsop. tartalmazza $(x,1_H), (1_G,y)$

de akkor a szorzatukat is tartalmazni

⇓

$\hat{G}$ és $\hat{H}$ együttesen generálja az egész $G \times H$ csoportot

- Páronként kommutálnak az elemeik.

$$(x, 1_H)(1_G, y) = (x, y)$$
$$(1_G, y)(x, 1_H) = (x, y)$$

Ha egy csoportban található 2 normális részcsoport, melyek elemei páronként kommutálnak, metszete triviális és melyek együttesen generálják az egész csoportot, akkor az egész csoport izomorf lesz a 2 normális részcsoport direkt szorzatával.

Fontos: a direkt szorzat szerkezete tehát emiatt a 2 részcsoport miatt speciális

Direkt szorzatok: „majdnem" kommutatív csoportok.
Kommutatív csoportok direkt szorzata kommutatív.
Bonyolultabb, de nem sokkal :)

Példa

Tekintsünk egymáshoz relatív 2 prímszámot (n és m) és egy n-edfokú és egy m-edfokú ciklikus csoportot

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = ?$$

$$\mathbb{Z}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_m = \{1, y, y^2, \dots, y^{m-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \{(x^k, y^l) \mid 0 \le k < n;\ 0 \le l < m\}$$

Szorzás: komponensenként.

(x,y) elem hatványai: generálja a direkt szorzat elemeit.

$(x,y)^0 = (1,1)$

$(x,y)^1 = (x,y)$

$(x,y)^2 = (x^2, y^2)$

$(x,y)^n = (x^n, y^n) = (1, y^n)$

n és m relatív prím: $\exists$ k olyan másik $a, b \in \mathbb{Z}$

$$an + bm = 1$$

$$(x,y)^{an} = (x^{an}, y^{an}) = (1, y^{an}) = (1, y^{1-bm}) =$$

$y^{bm} = 1$ $\quad = (1, y)$

$$(x,y)^{bm} = (x^{bm}, y^{bm}) = (x^{bm}, 1) = (x^{1-an}, 1) =$$
$$= (x, 1)$$

$$(x^k, y^e) = (x,y)^{bmk} (x,y)^{ane} = (x,y)^{bmk + ane}$$
$$= (x,1)^k \quad (1,y)^e$$

(x,y) generálja)

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ is ciklikus csoport, melynek a foka $n \cdot m$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_4$ nem izomorf

Klein-féle csoport (legegyszerűbb nem ciklikus csoport)

Csak relatív prímre igaz!

Ha nem az: általános Abel-csoport.

(Tetszőleges elemszámú ciklikus csoportok direkt szorzata általában nem ciklikus, de mindig kommutatív

Megfordítása is igaz:

Frobenius-Stickelberger-tétel:

$\forall$ véges Abel-csoport előáll prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzataként. (sorrendtől, átzárójelezéstől eltekintve egyértelműen).

$$G \cong \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \qquad p_i\text{-k prímszámok}$$

Véges Abel-csoportok egyértelműen jellemezhetők ezekkel a prímhatványokkal.

Kiterjesztés végesen generált Abel-csoportra

Ha G nem véges, de végesen generált (van véges sok elem az által kart. részcsoport véges) akkor G prímhatványrendű ciklikus csoportok és véges sok végtelen ciklikus csoport szorzataként áll elő

$\underbrace{\text{végtelen ciklikus csoport}}_{\text{egész számok additív csoportja}}$

$$|G| = \prod_i p_i^{k_i}$$

Tetszőleges Abel-csoport számossága előáll prímszámok hatványainak szorzataként $\Rightarrow$ Számelmélet alaptétele.

Csoportok féldirekt szorzata

Fizikában előforduló csoportok többsége

G és H csoportok elemhalmazainak Descartes-szorzata: $\{(x,y) \mid x \in G,\ y \in H\}$

$\alpha: G \to \underbrace{Aut(H)}$ (automorfizmus)

összes H csoportot önmagába leképező izomorfizmus

$g \mapsto \alpha_g$

$\alpha_g : H \to H$ bijektív és műveletartó leképezés

$\alpha : G \to Aut(H)$

$g \mapsto \alpha_g$

$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, \alpha_{x_2}(y_1) y_2)$

Speciális eset:

$\alpha : G \mapsto Aut(H)$

$g \to id_H \Rightarrow$ minden H elem önmagába

$\Downarrow$

Visszakapható így a direkt szorzat

(Rendezett párok összessége ezzel a művelettel csoportot alkot

$|G \ltimes_\alpha H| = |G||H|$

szorzás nem szimmetrikus.

másos értelme kommutativitásról v. asszociativitásról beszélni.

$\hat{G} = \{(x, 1_H) \mid x \in G\}$ $\quad \hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$

(Részcsoportjai $G \ltimes_\alpha H$-nak

$\hat{G} \cong G$ és $\hat{H} \cong H$

$\hat{H}$ normális részcsoport, $\hat{G}$ nem normális

$\hat{H} \lhd G \ltimes_\alpha H$

$G \ltimes_\alpha H / \hat{H} \cong G$

$\hat{G} \cap \hat{H} = \{(1_G, 1_H)\}$

Együtt generálják az egész csoportot.

Elemeik nem kommutálnak páronként.

ciklikus csop $\xrightarrow[\text{szorzat}]{\text{féldirekt}}$ nem kommutatív csop.

Csoportelmélet 2012. 10. 11.

Példák: Mozgások (izometriák) csoportja

- Galilei csoport, térbeli távolságtartó transzformációk.
  Eltolások részcsoportok. (transzláció)
  Euklideszi csoport: eltolás $\times_\alpha$ elforgatás
  transzláció $\times_\alpha$ rotáció

- Minkowszky tér távolságtartó transzformációi
  Poincaré-csoport.
  4dim transzl. $\times_\alpha$ 4dim forg

- Kristályok szimmetriacsoportjai
  transzl. $\times_\alpha$ forg

Elemek centralizátorai

$x \in G$ tekintjük $\forall$ elemeket, mely $\underbrace{x\text{-szel felcserél.}}_{\text{x-szel való szorzás független a sorrendtől}}$

centralizátor: $C_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\} < G$
↑
részcsop

Biz.:

- $y_1, y_2 \in C_G(x)$

$$xy_1 = y_1x \qquad x(y_1y_2) \overset{\text{asz.}}{=} (xy_1)y_2 \overset{y_1 \in C_G}{=} (y_1x)y_2 \overset{\text{assz}}{=}$$
$$xy_2 = y_2x \qquad = y_1(xy_2) \overset{y_2 \in G}{=} y_1(y_2x) \overset{\text{asz.}}{=}$$
$$= (y_1y_2)x$$

szorzat $\in C_G$

- $y \in C_G(x)$

$$xy = yx$$
$$y^{-1}(xy)y^{-1} = y^{-1}(yx)y^{-1}$$
$$y^{-1}x = xy^{-1} \quad \text{inverz} \in C_G$$

- tetszőleges elemek halmazának a centralizátora: azon csoport elemek összessége, mely felcserél $\forall$ halmazbeli elemmel

$X \subseteq G$ részhalmaz centralizátora:

$$C_G(X) = \{y \in G \mid xy = yx \ \ \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$$

- Egységelem centralizátora az egész csoport
$$C_G(1) = G$$

- Csoport centralizátora: csoport centruma, minden csoport elemmel felcserél
$$C_G(G) = Z(G)$$

Centrum elemei: centrális elemek: amelyek felcserélhetők $\forall$ csoportelemmel.

Ha G kommutatív

Minden csoport elem centrális elem lesz.

$$Z(G) = G$$

Minden elem centralizátora is megegyezik a csoporttal

Centrum mindig normális részcsoport.

$$Z(G) \lhd G$$

Biz.:

$$x\,Z(G) = \{xy \mid y \in Z(G)\} = \{yx \mid y \in Z(G)\} = Z(G)\,x$$

baloldali mellékoszt. ... jobboldali mo.

Normalizátor

Tekintsünk egy $H < G$ részcsoportot. Akkor lesz norm. részcsop., ha $\forall$ egyes elemmel vett bal- és jobboldali mellékoszt. megegyezik. Ha nem az, akkor is lesz egy részhalmaz, amire ez igaz.

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\} < G$$

A H részcsop. normalizátora

Mindig részcsop.

Biz.: centralizátorhoz hasonlóban.

Általában $C_G(H) \lhd N_G(H)$ normális részcsop-ja a normalizátornak

~~bal és jobb mo. megegyezik~~

$x \in C_G(H)$ $\quad xH = \{xh \mid h \in H\} = \{hx \mid h \in H\} = Hx$

> szorzatok egyesével egyeznek

> bal- és jobboldali mo-k egyeznek => nem a 2 szorzat egyezik hanem összességében a 2 halmaz.

$$H \lhd N_G(H)$$

A normalizátor G legkisebb részcsoportja, melyben H normális.

Minden olyan normális részcsoport metszete, mely tartalmazza H-t.

$$N_G(H) = \bigcap_{H \lhd K < G} K$$

Azt méri, hogy mennyire kommutatív művelet

Derivált részcsoport

2 elem felcserélhető, ha $xy = yx$

lineáris op.-nál együttható = 0

$xy = yx$

$xyx^{-1}y^{-1} = yxx^{-1}y^{-1} = 1 = [x, y] = 1$

2 csoportelem kommutátora

Abel csoportban bármely 2 elem az egységoperátort adja

$\{[x,y] \mid x, y \in G\}$

nem alkot részcsoportot

Kommutátorok által generált részcsoport:

$G' = \langle \{[x,y] \mid x, y \in G\} \rangle$ derivált részcsop.

Összes elem => elempár => kommutátor =>

legkisebb olyan csop, mely tartalmazza az összeset

$G' \lhd G$

G/G' faktorcsoport mindig kommutatív

Ha G Abel-csoport, akkor a kommutátor-részcsop

$G' = \{1\}$ triviális

Derivált lánc:

$G^{(0)} = G$; $G^{(1)} = G'$; $G^{(n)} = G^{(n-1)'}$

$G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd \dots$

Meddig tart?

Ha véges sok lépés után a $G^{(n)} = \{1\}$ => Abel csoport is

$\Downarrow$

feloldható a csoport

Nem teljesen kommutatív, de közel van hozzá.

negyedfokú még feloldható csop., ötödfokú már nem =>
=> nem oldható meg 5-ödfokú gyökjelekkel

Véges elemű ∀ egyszerű csoportok ~~csop~~ osztályozása

<u>Feit-Thompson tétel:</u> ∀ páratlan rendű csoport feloldható

Konjugált osztályok

2 csoportelem felcserélhető, ha $xy = yx$

kommutátor megegyezik az egységelemmel

$$\underbrace{y^{-1}xy}_{x^y} = x$$

x y-általi <u>konjugáltja:</u> x^y nem csoportképző többváltozós művelet.

x akkor cserél fel y-nal $x^y = x$ v. $y^x = y$

Csoportelemek 2 tetszőleges halmazára ~~...~~, konjugált:

$X, Y \subseteq G$ $\quad X^Y = \{x^y \mid x \in X, y \in Y\}$

Spec. eset: konjugált osztály: x^G

$x \in G$ $\quad x^G = \{x^y \mid y \in G\}$

Ekvivalenciarel. ekvivalenciaosztályai particionálják a csoportelemek halmazát.

Össz. konjugáltoszt. particionálja a csoportelemek halmazát

- minden csop. elemet tartalmaz egy konjugáltoszt.
- 2 konjugáltoszt. vagy megegyezik, vagy diszjunkt

Csoportelmélet

Fix, hogy particionál

$z \in x^G \cap y^G$

$z = x^g = y^h \qquad z, g, h \in G$

$g^{-1} x g = h^{-1} y h$

$x = (g h^{-1}) y (h g^{-1}) = (h g^{-1})^{-1} y (h g^{-1}) = y^{(h g^{-1})}$

x elem konjugált osztályának elemei

$x^G = \{x^k \mid k \in G\} = \{(y^{(hg^{-1})})^k \mid k \in G\} =$

$= \{(k^{-1} g h^{-1}) y (\underbrace{h g^{-1} k}) \mid k \in G\} = \{y^{\tilde{k}} \mid \tilde{k} \in G\} = y^G$

végigfut a csoport elemek összességén mert k is végigfut

y konjugáltosztálya

Centrális elemek konjugáltosztályai

Centrális elem mindenkivel felcserél $\Rightarrow$

konjugáltosztály 1 elemet tartalmaz: önmagát

$z \in Z(G) \Rightarrow \underbrace{z^y = z} \Rightarrow z^G = \{z\}$

pl.: Triviális osztály $\{1\}$ $\Downarrow$

$y^{-1} z y = z y^{-1} y = z$

Kommutatív csoportban minden elem önállóan alkot egy konjugáltosztályt.

D_3 csoport példája

szorzótábla ismert

- **Konjugált osztályok**

	1	C	C^2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	1	1	1	1
C	C	C	C	C^2	C^2	C^2
C^2	C^2	C^2	C^2	C	C	C
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	σ_1	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	σ_3	σ_2	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_3

sor oszlopelemmel vett konjugáltja

$xy = yx$ esetén $x^y = x$

bármely csop. elem felcserél akármelyik hatványával.

$$C^{\sigma_1} = \underbrace{\sigma_1^{-1}}_{\text{tükr. inv. önmaga: } \sigma_1} C \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_3 = C^2$$

1 C C^2-tel konjugálva önmagukat forgatás, tükr. inverz forgatást ad

A tükrözések irányításváltók forg → ellentétes irányú forg.

<u>Konjugált osztályok</u> az egyes sorok

$1^G = \{1\}$

$C^G = (C^2)^G = \{C, C^2\}$ forg. irányítás tartó

$\sigma_1^G = \sigma_2^G = \sigma_3^G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ tükr. irányítás váltó

3 konjugált oszt. geometriai jelentés

Elemszámok összege ki kell, hogy adja a csoport rendjét és mindegyiknek osztójának is kell lenni.

A részcsop. rendje és a részcsop. indexének szorzata = csop. rendje.

A konjugáltosztály elemszáma megegyezik a centralizátorának indexével.

$$|x^G| = [G : C_G(x)]$$

- Centralizátorok

$C_{D_3}(1) = D_3$ $\quad \frac{6}{6} = 1$ felcserélhetők az adott elemmel

$C_{D_3}(C) = \{1, C, C^2\}$
$C_{D_3}(C^2) = \{1, C, C^2\}$ $\Big\}\ \frac{6}{3} = 2$

$C_{D_3}(\sigma_1) = \{1, \sigma_1\}$
$C_{D_3}(\sigma_2) = \{1, \sigma_2\}$
$C_{D_3}(\sigma_3) = \{1, \sigma_3\}$ $\Big\}\ \frac{6}{2} = 3$

- Egy részcsoport akkor normális, ha konjugált elem osztályok uniója

Biz.:

$N \lhd G \qquad xN = Nx \qquad \forall x \in G$

$N = x^{-1}Nx = \{h^x \mid h \in N\}$

Normális részcsop. a $\forall$ elemének $\forall$ konjugáltja benne van a normális részcsop.-ban

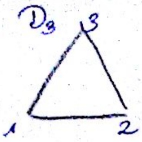
$\to$ normális részcsop. $\{1\} + \{C, C^2\}$

- Csoport centruma

önmaga alkot konjugált osztályt ...
Egyelemű konjugáltosztályok uniója $= Z(G)$

Permutációs hatások

D_3 harmadfokú diéder csoport



Homomorfizmus $\Phi: D_3 \to Sym(\{1,2,3\})$

A sík transzformációihoz hozzárendelhetjük a csúcsok permutációit.

→ csoport elemek

Φ: bijektív → úgy írtuk fel a szorzótáblát

$\Phi: G \to Sym(X)$

Az X véges halmaz feletti permutációs hatása G-nek.

Hatás foka: X halmaz (alap-, tartóhalmaz) elemszáma

D_3 harmadfokú hatás.

$\forall g \in G$-hez hozzárendeljük

$$\Phi(g) \in Sym(X)$$
$$\Phi(g): X \to X$$
$$x \in X$$

tartóhalmaz eleme

$\Phi(g)(x)$ helyett jelölés: $x \mapsto gx$

csoportelem

$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$

$\Phi(gh): x \mapsto (gh)x$ — X-en g-hez tartozó permutáció képe gx

$\Phi(g)\Phi(h): x \mapsto g(hx)$

Tetszőleges pontból tetszőleges másik pontba el tudok jutni?

Pálya: $x \in X$ pont pályája egy adott permutációs hatásban $Gx = \{gx \mid g \in G\}$

A háromszög oldalai is kitüntetett szerepet játszhatnak

$\Psi : D_3 \to Sym(\{I, II, III\})$

csúcspontokból alkotott 2 elemű halmazok: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

csúcspontok permutációja a 2 elemű halmazokra is alkalmazható:

$$\Omega : D_3 \to Sym(\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\})$$

úgy is jellemezhető, a melyiket hagytuk ki
ugyanazt az infot kapom mint 1 elemű halmazokból.

oldalak és 2 elemű halmazok közt nincs különbség
Ekvivalens permutációs hatás: tartóhalmazok közt létesíthető 1-1 értelmű kapcsolat,

- $\Phi : G \to Sym(X)$ és $\Psi : G \to Sym(Y)$ ekvivalens, ha $\exists$ olyan $\alpha : X \to Y$ bijektív leképezés, hogy teljesül a következő

$$\alpha \circ \Phi(g) = \Psi(g) \circ \alpha \quad \forall g \in G$$

(Permutációs hatások: kül. halmazokba vivő csoportok?)
szimmetrikus

Hatások összege

$\Phi : G \to Sym(X)$ és $\Psi : G \to Sym(Y)$ összege, ha

$X \cap Y = \emptyset$; $\Phi \oplus \Psi : G \to Sym(X \cup Y)$

$g \in G$ $(\Phi \oplus \Psi)(g) : X \cup Y \to X \cup Y$

ugyanabban a halmazban, ahol van viszem körbe

$$x \mapsto \begin{cases} \Phi(g)(x) & x \in X \\ \Psi(g)(x) & x \in Y \end{cases}$$

felszálm növekszik => összeg hatás fele a hatások

fokainak összege (bonyolultabb permutációs hatás)

$\Phi_1 \cong \Psi_1$ és $\Phi_2 \cong \Psi_2$, akkor

$$\Phi_1 \oplus \Phi_2 \cong \Psi_1 \oplus \Psi_2$$

$\Phi \oplus \Psi \cong \Psi \oplus \Phi$ kommutatív, asszociatív műveletként

értelmezhető ekvivalencia szintjén

$$\Phi_1 \oplus (\Phi_2 \oplus \Phi_3) \cong (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \oplus \Phi_3$$

~~Teb. perm. hatás felbomlik egyszerűbb sorrendtől független~~

tranzitív hatás: minden pont elérhető ~~az alaphalmaz~~ egy ~~1 pontjából~~ 1 másik pontból

Tetszőleges hatás előáll tranzitív hatások összegeként

sorrendtől eltekintve egyértelműen.

Tranzitív hatás: csak 1 pályája van.

csak véges sok van véges csoportban

az összegükből előállított hatások

megadják az egész csoportot

$G x = X \quad \forall \ x \in X$ 'egész tartóhalmazt előállítja

Véges G csoport esetén csak véges sok inekvivalens

tranzitív hatás van $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m)$

Tetszőleges hatás: $\underbrace{\text{tranzitív hatások}}$ összege

többször is előfordulhat

$\Downarrow$

n_i multiplicitás

$n_i \in \mathbb{Z}^+$

$$\Phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \Phi_i$$

ismerjük a tranz. hatásokat => összes hatást ismerjük.

Csoportelmélet

Coset - hatások

$H < G$ véges indexű részcsoport

véges csop. esetén tetsz.

G/H : H bal oldali mellékoszt-inak halmaza

index ennek számossága => véges halmaz

$\Phi_H : G \to Sym(G/H)$

Adott csop. elem hogy transzf. el egy baloldali mellékoszt-t?

$xH = \{xh \mid h \in H\}$

$\Phi_H(g) : xH \to \underbrace{(gx)H}_{\text{jól definiált}}$ => másik mellékoszt.

Nem trivi: művelettartó:

$\Phi_H(gh) = \Phi_H(g)\,\Phi_H(h)$

$xH \mapsto ((gh)x)H$ $\quad\quad\quad \Phi_H(g)(hx)H = (g(hx))H$

g, h, x mind csoportelemek => assoc. teljesül

tényleg homomorfizmus => tranzitív hatás

Φ_H coset hatás tranzitív permutációs hatás vagyis 1 pálya van.

tetsz. mellékoszt. egy elemét ~~tetsz.~~ egy másik mellékoszt.-ba tudom transzformálni

$$xH \xrightarrow[\Phi_H(yx^{-1})]{} yH$$

Minden tranzitív hatás ekvivalens egy coset hatással

Hozzárendelés: Stabilizátor részcsoport:

tartóhalmaz tetsz. eleme $x \in X$, összes pálya?
milyen lépés
ebből a pontból?

Stabilizátor: azon csop. elemek összessége, melyek
$\Downarrow$ fixen hagyják x-et.

$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

Mindig részcsoportja G-nek

$g, h \in G_x$ $\quad gx = x \quad hx = x \quad (gh)x = g(hx) = gx = x$

tetsz. pontnak stabilizátor részcsoportja az eredeti csoportnak

$x \in X \quad g \in G$

G_{gx} gx pont stabilizátora

$$G_{gx} = \{h \in G \mid h(gx) = gx\} = \{h \in G \mid g^{-1}(hgx) = g^{-1}(gx) = x\} =$$

$$g^{-1}h(gx) = g^{-1}gx$$

$$= \{h \in G \mid (g^{-1}hg)x = x\} = g G_x g^{-1}$$

h ~~pont~~ g-k általi konjugáltjai

az x stabilizátorának konjugáltja.

tranzitív hatáshoz részcsoportok konjugált osztályait rendelhetjük.

(Tranzitív hatás pontjainak stabilizátorának pontjai egymással konjugáltak és bármely pont stabilizátorához tartozó coset hatás ekvivalens a tranzitív hatással.

perm. hatás ⇒ ⊕ tranz. hatás ⇒ részcsop-k rendelhetők hozzá

de ~~...~~ 1:1 értelmű összefüggés van a részcsop-k és konj. oszt-k közt.

Egy-egy értelmű kapcsolat a tranzitív hatások és részcsoportok konjugált osztályai között

Cayley-tétel

Minden véges csoport izomorf egy permutáció csoporttal
permutációs hatás képe

G véges csoport triviális részcsoport coset hatása (tranzitív hatás)

$$\Phi_{\{1\}} : G \to Sym\,(G/\{1\}) \Rightarrow G \text{ elemeinek önmagára való permutációja}$$

triviális részcsop konjugált osztályai a csop. elemek egy-egy elemű halmaza

Coset hatás izomorfizmus

Elég megérteni a perm. csop-kat ⇒ véges csop-kat is értjük, DE 20. században ez más ~~nem~~ igaz

Hogy lehet meghat-ni 1 ~~csop.~~ hatás pályáinak számát?

tranzitív dekompozíció:

$$\Phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \cdot \Phi_i$$

1 db tranzitív 1 pálya

n_i db tranzitív n_i pálya (alaphalmazok diszjunktak)

pályák száma $\sum_{i=1}^{m} n_i$

Generated by CamScanner from intsig.com

Cauchy - Frobenius - lemma:

1 hatás pályáinak száma:

$$\underbrace{\frac{1}{|G|}}_{\text{csop. rendje}} \sum_{g\in G} \underbrace{|Fix(g)|}_{\text{fixpont}}$$

$$Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$$

Tekintsük a köv. halmazt

$\{(g,x) \mid g\in G,\ x\in X,\ gx = x\}$ számossága?

$|\{(g,x) \mid g\in G, x\in X, gx=x\}| =$ fixáljuk g-t

$= \sum_{g\in G} |\{x\in X \mid gx = x\}| = \sum_{g\in G} |Fix(g)| =$

fixáljuk x-t

$= \sum_{x\in X} |\{g\in G \mid gx = x\}| = \sum_{x\in X} |G_x|$

Alaphalmaz feloszlik pályákra és minden pont tartozik 1 pályához.

$X = \bigcup_{\alpha=1}^{p} X_\alpha \rightarrow$ hatás különböző pályái

permutációval egymásba vihetők

pályák száma összeadódik

$G_{gx} = gG_xg^{-1}$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{x\in X_\alpha} |G_x| = \sum_{\alpha=1}^{p} |X_\alpha||G_x| = |G|p$$

$\rightarrow$ összes pont stabilizátorának ugyanakkora elemszámúnak kell lennie

$x\in X_\alpha$ pálya ~~pontok~~ permutálódik

$G_x \Rightarrow$ ezek egymás konjugáltjai kül x-ekre

$|G/G_x| = [G:G_x]$

tranzitív hatás fokszám: ~~index~~ stabilizátor index

$|X_\alpha| = [G:G_x]$

Lagrange-tétel miatt

$$|G| = [G : G_x]\,|G_x|$$

Lehetőség, hogy megtat. hat. pályáinak száma fixpont halmaz számosságának ismeretében

$\Phi: G \to Sym(X)$ és $\Psi: G \to Sym(Y)$ hatások szorzata

$$\Phi \otimes \Psi : G \to Sym(X \times Y)$$

$$(\Phi \otimes \Psi)(g) : X \times Y \to X \times Y$$

$$(x, y) \longmapsto (\underbrace{gx}_{\Phi \text{ szerint}}, \underbrace{gy}_{\Psi \text{ szerint}})$$

újabb permutációs hatás

ekvivalens hatások szorzata ekvivalens és a szorzat kommutatív és asszociatív

$$\underbrace{\Phi_1 \simeq \Psi_1 \qquad \Phi_2 \simeq \Psi_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 \simeq \Psi_1 \otimes \Psi_2$$

$$\Phi \otimes \Psi \simeq \Psi \otimes \Phi$$

$$\Phi_1 \otimes (\Phi_2 \otimes \Phi_3) \simeq (\Phi_1 \otimes \Phi_2) \otimes \Phi_3$$

fal számok összeszorzódnak

$$\Phi_1 \otimes (\Phi_2 \oplus \Phi_3) \simeq (\Phi_1 \otimes \Phi_2) + (\Phi_1 \otimes \Phi_3) \text{ disztributív}$$

Burnside-gyűrű

Adott csoport hatásainak ekvivalenciaosztályai az összeadással és szorzással.

Hasonló tul-k, mint egész számok összeadása, szorzása
1 dolog hiányzik: ellentett

összeghalmaz biztos nagyobb fokszámú

0 fokszámon nincs mit permutálni

Nincsenek összeadásra vonatkozó inverzek.

Szerkezete véges csoport esetén

$$\Phi = \bigoplus_{i=1}^{m} n_i \Phi_i \qquad \Psi = \bigoplus_{i=1}^{m} k_i \Phi_i$$

$$\Phi \otimes \Psi = \bigoplus_{i,j=1}^{m} n_i k_j (\Phi_i \otimes \Phi_j)$$

felbontható tranzitívokra

$$\Phi_i \otimes \Phi_j = \bigoplus_{l=1}^{m} N_{ij}^{l} \Phi_l$$

N_{ij}^{l} → struktúraállandók

$$\Phi \otimes \Psi = \bigoplus_{i,j=1}^{m} n_i k_j \bigoplus_{l=1}^{m} N_{ij}^{l} \Phi_l = \bigoplus_{l} \left(\sum_{i,j} n_i k_j N_{ij}^{l} \right) \Phi_l$$

Ha tudom a tranzitív kifejtést, tudom a szorzat hatását

Csoportelmélet 2012. 11. 08.

Tér pontjai vektortér elemei

Extra struktúra

szim csop. halmaz elemeit önmagukra leképező, mely megtartja az extra struktúrát

$\Phi: G \to Hom(X)$ X topologikus tér

$\Phi: G \to GL(V)$

V lineáris tér

önmagára való lineáris leképezés

mely invertálható

Reprezentációelmélet

~~[illegible]~~

A csoport összes homomorfizmusa egy adott lineáris tér feletti általános ~~[illegible]~~ lineáris csp. elemei:

Absztrakt csoport elemeit egy struktúra szimmetria elemeivel próbáljuk jellemezni

Permutációs halmaz

Ábrázolás elmélet: lineáris tér feletti általános

G csoport ábrázolása a V lineáris téren egy

$\Phi: G \to GL(V)$ homomorfizmus

Hilbert tér egydimenziós altérei az állapotok
↳ ezek fizika állapotok

sűrűségoperátorok az egydim altérek segítségével jellemezhetők

Kvantumelméletben az állapotok lineáris (Hilbert) terek alkotnak → lin komb.

⇓

lehetséges azaz (egyik áll → másik áll)

Szimmetriatranszformációk lineáris op-okkal írhatók le.

- unitérek
- antiunitér: inverz komplex konjugáltja az adjungáltja
  pl. időmegfordítás op
  minden ilyen előállítható egy unitér és egy időmegford.-val.

G szim. csop.

→ $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$

szimmetriaelem → homomorfizmus → ábrázolás

Szimmetriacsop. ábrázolásai a Hilbert-téren

pl.: téridő

Ábrázolás

$D: G \to GL(V)$

$D(1) = \mathbb{I}$

$D(xy) = D(x)D(y)$

$D(x^{-1}) = (D(x))^{-1}$

Lineáris teret jellemez a skalárok teste és a dimenziója (bázis számossága)
↳ Minden ábrázolást is jellemez

Mátrixábrázolás: V lineáris téren felveszünk egy bázist $\{b_1, b_2, \dots b_n\}$

$D(x)b_i = \sum_j D_{ij}(x) b_j$

vektort kapok, mely kifejthető a bázison

ábrázolási mátrix

(Tekintsünk egy ábrázolást és hajtsunk végre egy báziscserét a vektortéren

$\{b_1, \dots, b_n\} \to \{b_1', \dots, b_n'\}$

egymás lin. komb.-ival kifejezhetők

Létezik olyan $A \in GL(V)$ invertálható operátor, hogy

$b_i' = A b_i$

Az új bázisban az ábrázolási operátorok mátrixelemei

$D'_{ij}(x) = [A^{-1} D(x) A]_{ij}$

$D'(x) = A^{-1} D(x) A$ ilyen trafót hajtunk végre az összes ábrázolási op.-n.

Nem lesz változás, csak más bázisban nézem $\Rightarrow$ ekvivalens ábrázolásoknak tekinthető $D'(x)$ és $D(x)$.

$AD'(x) = D(x)A$

2 különböző lineáris téren értelmezett ábrázolás.

$D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ ábrázolás ekvivalens, ha létezik $A: V_1 \to V_2$ invertálható lineáris operátor, hogy

$AD_1(x) = D_2(x)A \quad \forall x \in G$

Ábrázoláselmélet feladata: határozzuk meg a G csoport összes ábrázolását ekvivalencia erejéig.

Példák

1) Definiáló ábrázolás

V lineáris tér feletti általános lineáris csoportot $GL(V)$ válasszuk ki G részcsoportját $GL(V) > G$

Ekkor: $D: G \to GL(V)$

$x \mapsto x$

2) Permutációs ábrázolás

$\Phi: G \to \mathrm{Sym}(X)$ permutációs hatás X felett

$V := \{ f: X \to \mathbb{C} \}$ def. $D_\Phi: G \to GL(V)$

$x \mapsto D_\Phi(x)$ milyen?

$D_\Phi(x) f: X \to \mathbb{C}$

$p \mapsto f(x^{-1} p)$

Ábrázolás?:

$D_\Phi(xy) f: X \to \mathbb{C}$

$p \mapsto f((xy)^{-1} p) = f(y^{-1}(x^{-1} p))$

$(D_\Phi(x) \circ D_\Phi(y)) f = D_\Phi(x) \{ D_\Phi(y) f \} : X \to \mathbb{C}$

$p \to D_\Phi(y) f(x^{-1} p) =$

kompozíció megfelel a szorzat ábrázolásának $= f(y^{-1} x^{-1} p)$

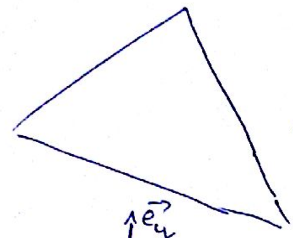
$\Downarrow$

ábrázolás.

Bázis: 1 elemen 1, összes többin 0.

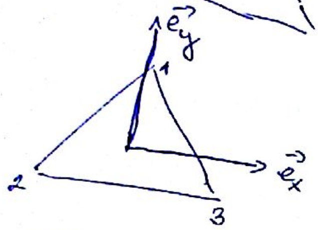
perm. hatás: perm. mátrix 1 egyes többi 0.

(3.) D_3



Sík pontjai lineáris tér elemei megfelelő origóválasztás esetén.

Most origó: háromszög súlypontja



Sík ezzel a választással 2D lineáris térnek tekinthető.

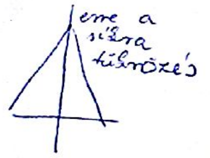
bázisa: $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

Sík pontjait egymásba viszik át a szim. transzformációk.

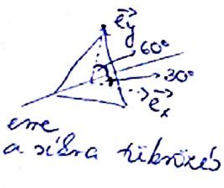
$D: D_3 \to GL(V)$

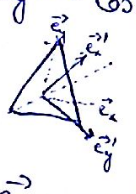
$D(1) \to \mathbb{1}$

$D(\sigma_1) = \begin{array}{l} \vec{e}_x \mapsto -\vec{e}_x \\ \vec{e}_y \mapsto \vec{e}_y \end{array} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(\sigma_1)$

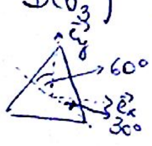


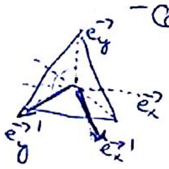
$D(\sigma_2) = \begin{array}{l} \vec{e}_x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e}_y \\ \vec{e}_y \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y \end{array} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = D(\sigma_2)$





$D(\sigma_3) = \begin{array}{l} \vec{e}_x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e}_y \\ \quad -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y \end{array} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = D(\sigma_3)$





Alaptest: komplex számtest

itt kapható a legtisztább elmélet

minden polinomnak van gyöke itt és minden Cauchy sorozatnak van határértéke

Tetszőleges perm. hatások felbonthatók vollad tovább nem bonthatók összegére.

Ábrázolások direkt összege:

$D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$

$(D_1 \oplus D_2): G \to GL(V_1 \oplus V_2)$

2 lineáris tér direkt összege: rendezett párok összessége, ahol: $V_1 \oplus V_2 = \{(x,y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$

$g \mapsto (D_1 \oplus D_2)(g)$

$(D_1 \oplus D_2)(g): V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$

$(x,y) \to (D_1(g)x, D_2(g)y)$

Ha $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázisa V_1-nek és $\{f_1, \dots, f_m\}$ bázisa V_2-nek (min számú vektor, melynek lin. komb-ióval az összes többi elérhető), akkor $\{(e_1,0), \dots, (e_n,0), (0,f_1), \dots, (0,f_m)\}$ bázisa $V_1 \oplus V_2$-nek

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Összegbázisra vonatkozóan blokkdiagonális ábrázolás.

$$\begin{array}{c} (e_1,0) \\ \vdots \\ (e_n,0) \\ (0,f_1) \\ \vdots \\ (0,f_m) \end{array} \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right)$$

Jól viselkedő művelet az ábrázolások összességén.

- $D_1 \simeq D_2$ és $D_3 \simeq D_4$ akkor $D_1 \oplus D_3 \simeq D_2 \oplus D_4$

  A direkt összeg ekvivalenciáját meghatározza az összeadandók ekvivalenciája.
- kommutatív, asszociatív

  $D_1 \oplus D_2 \simeq D_2 \oplus D_1$

  $D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \simeq (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$

~~Ezek a tul-ak feltöle~~

dirett

Tovább nem bontható ábrázolások összegére bonthatók az ábrázolások ⟶ irreducibilis ábrázolások.

$D: G \to GL(V)$

$W < V$ lineáris altér

bármely ~~van~~ vektor $\in W$-ra hatva az eredmény $\in W$-ni : invariáns altér: $\forall x \in G$ és $v \in W$ esetén $D(x)v \in W$.

Tetszőleges ábrázolásnak van ilyen altere (0, önmaga)

Ha ezen kívül van: reducibilis, ha nincs irred.

- Egy ábrázolás reducibilis, ha $\exists$ nemtriviális lineáris altere, ellenkező esetben irreducibilis.

Maschke tétele:

Véges csoportok $\forall$ komplex ábrázolása felbontható irreducibilis ábrázolások direkt összegére a sorrendtől eltekintve egyértelműen.

$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i$ adott ábrázolás irreducibilis dekompozíciója

ábr. ↳ multiplicitás $n_i > 0$

$I_1, I_2, \dots, I_r$ irred. ábr-ok.

Általánosabb csoportokra, (nem véges nem kompakt) elromlik, h. minden reducibilis felbontható irreps direkt összegére.

Ábrázolandó csoport: G

Ábrázolás: $D: G \to GL(V)$.

Homomorfizmus

jellemzői:

↳ V lineáris tér, ábrázolás dimenziója

↳ Skalártest

(fizikai alkalmazás: komplex)

$\forall$ egyes polinomnak $\exists$ gyöke

Ábrázolások ekvivalenciája

$D_1: G \to GL(V_1)$ $D_2: G \to GL(V_2)$

$D_1 \simeq D_2$

ha $\exists$ olyan ~~lineáris~~ bijektív leképezés V_1-ből V_2-be

$A: V_1 \to V_2$

$A D_1(g) = D_2(g) A$

$\forall g \in G$

Véges és kompakt Lie-csoportok esetén érvényes a

Maschke tétel: Véges csoport $\forall$ ábrázolása ~~...~~

irreducibilisek direkt összege

Irreducibilis ábrázolás: Nincs nemtriviális invariáns altere

Irreducibilis dekompozíció: direkt összegre bontás

$D = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i I_i$

↳ irreducibilis

↳ multiplicitás

Schur-lemma: Ha van egy $D: G \to GL(V)$ irreducibilis ábrázolásunk és egy $A: V \to V$ olyan lineáris operátorunk, amely minden ábrázolási operátorral felcserél, $AD(g) = D(g)A$ $\forall g \in G$

akkor A az egység operátor skalárszorosa $A = \lambda \, id_V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

időfejlesztés energiák segítségével. Schur-lemma a Hamilton-op. diagonalizálásában segít. Szimmetria, ha az időfejlődéssel felcserél. => $[U, H] = 0$

Egy kvantumrendszer szimmetriája: A Hamilton-operátorral felcserélhető

irreducibilis altereken degenerált Hamilton-op. de mindig ua az energia

Ha egy irred. ábr. többször szerepel => bonyodalom

Az egész lineáris tér felbontható $V = \oplus V_i$

V_i-n n_i I_i hat és nem I_i csak.

Csak V_i-n belül lesz nem diagonális mátrixelem => => blokk diagonalizáció!

Állapotok megfelelnek a Hilbert tér vektorainak? Hát nem, mert skalárszoros is jól írja le a rendszer állapotát

1 dimenziós alterek felelnek meg a tiszta állapotoknak.

Állapot skalárszorzó erejéig definiált => Hamiltoni is csak ennyire definiált.

$$\underbrace{D(xy) = D(x)D(y)}_{\alpha(x,y)} \Rightarrow$$ meg kellett engedni valamilyen oldal skalárszorosát

$\alpha : G \times G \to C$

projektív ábrázolás

$D : G \to GL(V)$

Nem a vektorokon, hanem 1 egydimenziós altéren valósítja meg az ábrázolást

Eddig nézett ábrázolások $\alpha = 1$

α Az ábrázolás lokkulsa:

↳ ~~[illegible]~~ Feltétel

↳ $D(1) = id_V$ $\quad y = 1 \quad D(x) = \alpha(x,1) D(x)$

$x = 1$-re is $\quad \alpha(x,1) = 1 = \alpha(1,y)$

Normálási feltétel

$\hookrightarrow D(x(yz)) = \alpha(x,yz)\, D(x)\, D(yz) = \cancel{\alpha(x,y,z) D(x) D(y)}$

$\parallel \qquad = \alpha(x,yz)\,\alpha(y,z)\, D(x)\, D(y)\, D(z)$

$D((xy)z) = \alpha(xy,z)\, D(xy)\, D(z) = \alpha(xy,z)\,\alpha(x,y)\, D(x) D(y) D(z)$

$\Downarrow$

Kociklus-egyenlet:

$$\alpha(x,yz)\,\alpha(y,z) = \alpha(xy,z)\,\alpha(x,y)$$

Ábrázolási gyűrűk dekompozícióra (számmal szorzásra) esetén, ha már meg is van a csoportelemekhez az ábrázolás, az az állapotok szintjén ugyanaz.

<u>Projektív ábrázolások ekvivalenciája</u>

$D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$

α_1 és α_2 kociklussal

ekvivalens, ha $\exists$ bijektív $A: V_1 \to V_2$ úgy, hogy

$$\lambda(x)\, A D_1(x) = D_2(x)\, A \qquad \forall x \in G$$

ahol $\lambda : G \to \mathbb{C}$ (skalár ekvivalencia fogalmat ki kell bővíteni)

$D : G \to GL(V)$ projektív ábrázolás és $\tilde{D} : G \to GL(V)$

$x \mapsto \lambda(x) D(x)$

$D \cong \tilde{D}$

$\lambda(x) : G \to \mathbb{C}$

Mi lesz a kociklusok viszonya?

$$\tilde{D}(xy) = \lambda(xy)\, D(xy) = \lambda(xy)\,\alpha(x,y)\, D(x) D(y) =$$

$$= \alpha(x,y)\,\lambda(xy)\,\frac{\tilde{D}(x)}{\lambda(x)}\,\frac{\tilde{D}(y)}{\lambda(y)} =$$

$$= \underbrace{\alpha(x,y)\,\frac{\lambda(xy)}{\lambda(x)\lambda(y)}}_{\tilde{\alpha}(x,y)}\,\tilde{D}(x)\,\tilde{D}(y)$$

$\tilde{\alpha}(x,y)$ kohomológ kociklusok

~~2 projektív~~ 2 ekvivalens projektív ábrázolás kociklusai nem feltétlenül egyeznek meg.

Összes projektív ábrazolás: összes lehetséges kociklusok, de a kohomológ kociklusokkal nem kell foglalkozni

véges halmaz

Kociklusok kohomológiai osztályai $\Leftrightarrow$ projektív ábrazolások

Kiválasztunk az osztályból egy reprezentánsot, mellyel megkonstruáljuk az ábrazolást $\forall$ kociklushoz.

Csoportok többsége esetén a kohomológia osztályok véges halmazt alkotnak.

$M(G) = H^2(G)$ Schur-multiplikátor $\rightarrow$ véges ~~multiplikátor~~ Abel-csoport

$$\alpha(x,yz)\,\alpha(y,z) = \alpha(xy,z)\,\alpha(x,y)$$

Tekintsünk 2 kociklust és szorozzuk össze őket pontonként

$\tilde{\alpha}(x,y) = \alpha_1(x,y)\,\alpha_2(x,y)$ $\hookrightarrow$ ez megint egy kociklusra vezet

$\Downarrow$

Kociklusok kommutatív csoportot alkotnak

ez a kohomológ osztályok szintjén is csoportképző

Univerzális fedőcsoport

G univerzális fedőcsoportja: $\hat{G}$, ha:

- $\hat{G}$ centrumában kell lenni egy olyan normális részcsoportnak mely izomorf a G Schur-multiplikátorával.

  $\exists\, N \triangleleft Z(\hat{G})$, melyre $N \cong H^2(G)$

- $\hat{G}/N \cong G$

  G csoport $\forall$ projektív ábrazolása egy az egyben megfeleltethető a $\hat{G}$ közönséges ábrazolásának

3D tér forgatásainak csoportja: $SO(3)$ (3D ~~unitér~~ ortogonális egységdet.)

Schur-multiplikátora 2 elemű,

univerzális fedőcsoportja: $SU(2)$

(2D unitér egységnyi det mátrixok)

egész
$SO(3)$

félegész
nemtriviális homológ
kociklus oszt

Közönséges ábrázolások

$D: G \to GL(V)$

Ábrázolások tenzorszorzata:

Összetett rendszer állapottere az alrendszerek állapottereinek tenzorszorzata.

Lineáris terek tenzorszorzata

V lineáris tér a komplex számtest felett

lineáris funkcionál: $\phi: V \to \mathbb{C}$

$$\phi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \phi(v_1) + \beta \phi(v_2)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad v_1, v_2 \in V$$

lineáris funkcionálok is lineáris teret alkot a komplex számok teste felett.

Lineáris funkcionálok tér a V duálisa: V^*

Véges dim. térre igaz. Hilbert terek felbonthatók végesek összegére

$(V^*)^* = V$ ha adott $x \in V$

definiálható $\tau_x: V^* \to \mathbb{C}$

$\varphi \mapsto \varphi(x)$

lineáris funkcionál a lineáris funkcionálok terén

Duális téren $\check{D}(g)\,\phi$ $\check{D}(g): V^* \to V^*$

$\forall$ g csoportelemhez hozzárendelünk egy operátort, mely a duálison hat. $x \mapsto \phi(\check{D}(g)^{-1}x)$

Ekkor $\check{D}: G \to GL(V^*)$ homomorfizmus

Duális (kontragrediens) ábrázolás
$\underbrace{\text{inverz} \quad \text{argumentum}}$

tükrözőkonjugáltnak megfelelő ábrázolás.

Bilineáris funkcionálok

$\beta: V_1 + V_2 \to \mathbb{C}$ leképezések

Mindkét változójában lineáris.

$\beta(\lambda v_1 + \mu v_2, v_3) = \lambda\beta(v_1, v_3) + \mu\beta(v_2, v_3)$

pontonként skalárral beszorozva bilineáris összeges is bilineárisak

$B(V_1, V_2)$ lineáris teret alkot

$V_1 \otimes V_2$ tenzorszorzat

$V_1 \otimes V_2 = B(V_1, V_2)^*$

dimenzió: mekkora a bázisok számossága

V_1 bázisa $\{e_1, \dots, e_m\}$

V_2 bázisa $\{f_1, \dots, f_n\}$

$e_i \otimes f_j : B(V_1, V_2) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál a

$\beta \to \beta(e_i, f_j)$ bilineáris funkcionálok terén.

$e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2$

bázisát alkotják a tenzorszorzatnak.

A tenzorszorzat dimenziója:

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1)\dim(V_2)$$

Ábrázolások tenzorszorzata

$$D_1 : G \to GL(V_1)$$
$$D_2 : G \to GL(V_2)$$
} ábrázolások tenzorszorzata

$$D_1 \otimes D_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$$
$$g \mapsto (D_1 \otimes D_2)(g)$$

Mit csinál a ~~[illegible]~~ vektorokkal? elég a bázisvektorokra való hatást tudni → többi ebből előállítható

$$(D_1 \otimes D_2)(g) : e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g)e_i \otimes D_2(g)f_j$$

kommutatív és asszociatív művelet, mely disztributív is a direkt összegre.

$$D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1$$

(Fizikában nem mindig van így
Olyan elemi gerjesztések, melyek se bozonok, se fermionok.

Csoportelmélet 2012. 11. 22.

Mozikus fontos fizikai jellemző:

Szuperszelekciós töltések (pl. elektromos töltés)

Erre a jegyzetre figyelj! Madtál!

Tenzorszorzat

$D_1 : G \to GL(V_1)$ $\qquad D_2 : G \to GL(V_2)$

$D_1 \otimes D_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$

legegyszerűbben a tenzorszorzat bázissal adható meg (tszb)

$e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2$

$\beta \to \beta(e_i, f_j)$

$(D_1 \times D_2)(g) : e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g) e_i \otimes D_2(g) f_j$

tszb. elemek lineár kombinációja

$$\left[(D_1 \otimes D_2)(g) \right]^{e_\alpha \otimes f_\beta}_{e_i \otimes f_j} = \left[D_1(g) \right]^{\alpha}_{i} \left[D_2(g) \right]^{\beta}_{j}$$

mátrixok esetén Kronecker-szorzat

Milyen az irreducibilis dekompozíció?

Tenzorszorzat művelet tulajdonságai:

$D_1 \otimes D_2 \simeq D_2 \otimes D_1$

$D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) \simeq (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$

egységábrázolás $\mathbb{1} \otimes D \simeq D \otimes \mathbb{1} \simeq D$

$\forall$ csoportelemhez az 1-et rendeli $g \mapsto 1$

érvényes a direkt összegre nézve a disztributivitás:

$D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) \simeq D_1 \otimes D_2 \oplus D_1 \otimes D_3$

Így nagy mértékben le lehet redukálni az ábrázolásokat...

$D_1 = \bigoplus_i n_i \mathcal{I}_i \qquad D_2 = \bigoplus_j m_j \mathcal{I}_j$

$D_1 = \bigoplus_i n_i \cdot I_i$ → irreducibilisek

→ multiplicitások

$D_2 = \bigoplus_j m_j \cdot I_j$

$$D_1 \otimes D_2 \cong \bigoplus_{i,j} n_i m_j \underbrace{I_i \otimes I_j}_{\text{ez is ábrázolás}}$$

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}^k I_k$$

↳ (multiplicitás) fúziós szabályok

↓

Hogy kell a megmaradó mennyiségekkel műveleteket végezni.

Fúziós szabály: Clebsch-Gordan-sor

Hogy vérszki két irreducibilis ábrázolásokal irreducibilis dekompozíciónak együtthatói.

Adott csoport ábrázolásainak ekvivalenciaosztályai

2 művelet $\underbrace{\text{direkt összeg, tenzorszorzat}}_{\text{zárt}}$

⇓

Ezek látják el algebrai struktúrával → fúziós gyűrűnek hívják.

↳ meghatározása alapvető

$D : G \to GL(V)$ ábrázolás $\quad D \otimes D : G \to GL(V \times V)$

Ez az ábrázolás általában reducibilis

itt bevezethető egy új operátor:

$\tau : V \otimes V \to V \otimes V$

$e_i \otimes e_j \to e_j \otimes e_i$

felcserélő operátor

$\tau^2 = id_{V \times V}$ identitás

$\Downarrow$

τ sajátértékei : ± 1

τ értelmezési tartománya $V \otimes V$

ez felbomlik az 1 és −1 sajátértékhez tartozó alterekre

$V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$

s.é.: 1 s.é.: −1

V szimmetrikus négyzete V antiszimmetrikus négyzete

S szimmetrikus Λ antiszimmetrikus tenzorokhoz tartoznak.

$(D \otimes D)(g) \circ \tau$: $e_i \otimes e_j \mapsto \ldots \overset{\tau}{\mapsto} (e_j \otimes e_i)$

$e_i \otimes e_j \longmapsto D(g) e_j \otimes D(g) e_i$

$\tau = (D \otimes D)(g) : e_i \otimes e_j \mapsto D(g) e_j \otimes D(g)(e_i)$

$\exists$ olyan lineáris op. (τ) mely felcserélhető $\forall$ ~~lineáris~~ ábrázolási operátorral

$\Rightarrow$ τ minden sajátvektorát $(D \otimes D)(g)$ ugyanolyan sajátértékű sajátvektorokba viszi.

$S^2 V$ és $\Lambda^2 V$ invariáns alterei $D \otimes D$-nek

$V \otimes V = S^2 V + \Lambda^2 V$

$(D \otimes D)(g)$ megszorítva az értelmezési tartományát $S^2 V$-re egy $S^2 V \to S^2 V$ operátort kapunk megszorítás miatt más az ábrázolásokat ~~csoport~~ rendel a csoportelemhez.

Ezáltal: egy $S^2D: G \to GL(S^2V)$ ábrázolást kapunk

Szimmetrikus négyzet

$D \otimes D$ ez fel fog bomlani legalább 2 másik ábrázolás direkt összegeként

$D \otimes D = S^2D + \Lambda^2D$

szimmetrizált négyzetek

Részecskék megkülönböztethetetlensége.
Két felcserélési szimmetriája a rendszernek

Pauli-elv: két megkülönböztethetetlen alrendszerből álló rendszer Hfo-e Hilbert-tere) az egyes alrendszerek tereinek (anti)szimmetrizált négyzete

fermionok és bozonok

Elágazási szabályok meghatározása

Szimmetria megvalósulása szimmetriasértő perturbációval

MEr-khez kell.

Dinamikából felismert G-nek a szabadságfokú H csak részcsoportja

$D: G \to GL(V)$

~~Ha a teljes~~ nem ~~lesz~~ ~~az alcsoport~~ csak

Szimmetria sérül H-ra

$$D_H : H \to GL(V)$$
$$x \mapsto D(x)$$

Megszorítás tulajdonságai: ~~tranzitív~~

(1.) tranzitív $K < H < G$ ⇒ $K < G$

$$(D_H)_K = D_K$$

(2.) jól viselkedik a direkt összegre és szorzatra nézve.

$$(D_1 \oplus D_2)_H = (D_1)_H \oplus (D_2)_H$$

$$(D_1 \otimes D_2)_H = (D_1)_H \otimes (D_2)_H$$

$$D = \bigoplus_i n_i\, I_i \quad \Rightarrow \quad D_H = \bigoplus_i n_i (I_i)_H$$

ha meg akarom szorítani, elég az irreducibiliseket megszorítani.

$$(I_i)_H = \bigoplus_\alpha B_i^\alpha E_\alpha \rightarrow \text{H részcsoport irreducibilis ábrázolásai}$$

↓

(sugyani?) multiplicitások

Elágazási szabály

Ábrázoláselmélet

G csoport összes irrep megkeresése

fúziós szabályok

ired dekompozíciót kell megadni

Invariáns elmélet alaptétele:

Csoporttranszformációk során nem változtatják a tulajdonságokat => Hogy lehet ilyen for-t kreálni?

Ha G egy végesen generált csoport, akkor tetszőleges n egész számra $\exists$ G-nek elemei- egy olyan véges G_n részhalmaza, hogy a G csoport két n dimenziós ábrázolása

$D_1: G \to GL(V_1)$ és $D_2: G \to GL(V_2)$ ábrázolása akkor és csak akkor ekvivalens

$$\mathrm{Tr}\, D_1(g) = \mathrm{Tr}\, D_2(g)$$

$$\forall g \in G_n\text{-re}$$

(Innen a spektráltétel is levezethető)

Ábrázoláselmélet alaptétele

Ha G véges, akkor két ábrázolás ekvivalenciája esetén az ábrázolási operátorok spurjai megegyeznek.

Ábrázolási karakter

$$D: G \to GL(V) \qquad g \mapsto D(g)$$

$$\chi_D: G \to \mathbb{C} \qquad g \to \mathrm{Tr}\, D(g)$$

→ számszerű jellemzője az ábrázolásnak.

Két ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens, ha a karaktereik megegyeznek.

$D_1: G \to GL(V_1) \qquad D_2: G \to GL(V_2)$

$$D_1 \oplus D_2 = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array}\right) \qquad V_1 \oplus V_2$$

$$\mathrm{Tr}\,(D_1 \oplus D_2)(g) = \mathrm{Tr}\,D_1(g) + \mathrm{Tr}\,D_2(g)$$

$$\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$$

$$(D_1 \otimes D_2)(g):\ e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g)\, e_i \otimes D_2(g)\, f_j$$

így hat a ~~d~~ bázis-on a tx operátor $\sum_\alpha [D_1(g)]^\alpha_i e_\alpha \otimes \sum_\beta [D_2(g)]^\beta_j f_\beta$

tenzorszorzattal lineáris $\Rightarrow \sum_{\alpha,\beta} [D_1(g)]^\alpha_i [D_2(g)]^\beta_j\, e_\alpha \otimes f_\beta$

Spurja ennek: $i = \alpha$ $j = \beta$

$$\mathrm{Tr}\left[(D_1 \otimes D_2)(g)\right] = \sum_{i,j} [D_1(g)]^i_i\, [D_2(g)]^j_j =$$

$$= \mathrm{Tr}\,D_1(g)\,\mathrm{Tr}\,D_2(g)$$

$$\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} \qquad \chi_{D_1 \otimes D_2} = \chi_{D_1}\chi_{D_2}$$

$$\chi_{D^*}(g) = \chi_D(g^{-1})$$

Karakter egyértelműen jellemzi az ábrázolás tulajdonságait + szép összefüggések.

$$\chi_{(D_H)} = (\chi_D)_H$$

megszorított ábrázolás karaktere

Ábrázolási karakterek tulajdonságai.

(1.) $\chi_D(1) = \mathrm{Tr}\, D(1) = \underbrace{\dim D}$

egységelem — ábrázolás dimenziója

$\Downarrow$

pozitív egész

(2.) $\chi_D(g^h) = \mathrm{Tr}\, D(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}\{D(h^{-1})D(g)D(h)\} =$

g h-beli konjugáltja

$g, h \in G$

$$= \mathrm{Tr}\{D(g)\underbrace{D(h)D(h^{-1})}_{1}\} = \mathrm{Tr}(D(g)) = \chi_D(g)$$

konjugált elemeken ugyanazt az értéket veszi fel a karakter

Ábrázolási karakter osztályfv., egymással konjugált elemeken azonos értéket vesz fel.

Véges csoport esetén $\chi_D(g^{-1}) = \chi_D(g)^*$

$\forall$ elem összes lehetséges hatványa és lesz egy véges hatvány mely megegyezik az egységgel. $\exists\, N \in \mathbb{Z}^+$ $g^N = 1$

$$D(g^N) = id = D(g)^N$$

$D(g)$ ábrázolási operátor sajátértékei N-edik egységgyökök => ezek összege a spur

$D(g^{-1})$ operátor sajátértékei a $D(g)$-éi inverzei => előző komplex konjugáltjai

$|\chi_D(g)| \le \dim D$

Csoportelmélet 2012. 12. 06.

Karaktertábla:

Ábrázolás felbontható irrep-ek direkt összegére

$$D = \bigoplus_i n_i I_i$$

$$\chi_D = \sum_i n_i \chi_i$$ irrep karaktereiből az összes rep karaktere előállítható

oszlopok: csoport konjugáltosztályai

	triviális konjugált $\{1\}$	C_2	....	C_r
egység ábrázolás → 1	1	1	.....	1
I_2				
⋮	$\dim I_i$		$\chi_i(C_j)$	
I_r				

sorok: irreducibilis ábrázolások (karakterei)

Metszéspont: i. ábrázolás értéke j. konjugáltosztályban található bármely elem esetén

Fontos: ua. sor és ua. oszlop van a karaktertáblában véges csoport esetén,

⇕

Konjugált elemosztályok száma ⇒ inekvivalens irreducibilis ábrázolások száma

1. sor

Egység ábr. spurja minden osztályon 1

~~Tehát a karakt~~

1. oszlop

I_i i. ábrázolás dimenziója (egység op spurja)

Példa: D_3 karaktertáblája

	$\{1\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{C, C^{-1}\}$
1	1	1	1
1^*	1	-1	1
$\underline{2}$	2	0	-1
Σ^2	6	2	3

aláhúzás: ábrázolás
irrep-et dimenzióval szokás jellemezni
*: más, mint az egységábrázolás

Ritkán egész számok a karakterek.

Oszlopokban található értékek abszolút értékének négyzetösszegét véve az adott osztály számosságával megszorozva a csoport rendjét kapjuk

$$\underbrace{\sum_i |\chi_i(C_j)|^2}_{} \cdot |C_j| = |G|$$

olyan, mintha a vektor hosszanégyzete lenne

Skalárszorzatok oszlopok közt (egyik konjugáltja · másik)

$$\boxed{\sum_i \chi_i(C_j) \cdot \overline{\chi_i(C_k)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_j|} \text{ ha } j=k \\ 0, \text{ ha } j \neq k \end{cases}} = \left\{ \text{konjugált oszt tetsz elemé centralizátorának rendje} \right.$$

$x \in G$ elem
konjugált elemosztály elemeinek száma a következőppen kapcsolódik a centralizátorának indexéhez:

$$|x^G| = [G : C(x)] = \frac{|G|}{|C(x)|}$$

Ezek a „második" ortogonalitási relációk

mátrix adjungáltjával összeszorozva egyféleképp diagonális másik féle képp a sorok közti skalárszorzatra kapunk összefüggéseket.

Első ortogonalitási relációk

$$\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}}$$

D_3 esetén:

$\frac{1}{6}\left(|1|^2\cdot 1+|1|^2\cdot 3+|1|^2\cdot 2\right)=1$ 1. sorra

$\frac{1}{6}\left(1\cdot\overset{1}{1\cdot 1}+1\cdot\overset{-3}{(-1)\cdot 3}+1\cdot\overset{2}{1\cdot 2}\right)=0$ 1-2. sorra

$\frac{1}{6}\left(1\cdot\overset{2}{2\cdot 1}+1\cdot\overset{0}{0\cdot 3}+1\cdot\overset{-2}{(-1)\cdot 2}\right)=0$ 1-3. sorra

Osztályfüggvények: $f(x^y)=f(x)$

Olyan $f: G\to\mathbb{C}$ fv-ek, melyek ugyanazt az értéket veszik fel az összes osztályelemre

Lineáris teret alkotnak, ahol bevezethető a skalárszorzat $\Rightarrow$ Hilbert-tér (véges dim-s)

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

A korábbi ekkor

$$\langle \chi_i,\chi_j\rangle = \delta_{ij}$$

Az irreducibilis ábrázolások karakterei egy ortonormált bázist alkotnak az osztályfüggvények terében.

Egyes oszlopok hossza a csoport rendjét adja a karaktertáblában.

$$\sum_i |\chi_i(1)|^2 = \frac{|G|}{|\{1\}|} = \boxed{|G| = \sum_i (\dim I_i)^2}$$ véges csoport esetén

Burnside-tétel

$$D = \bigoplus_i n_i I_i \qquad \chi_D = \sum_i n_i \underbrace{\chi_i}_{\text{ONB-t alkotnak}}$$

$$\langle \chi_D, \chi_j \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = n_j$$

Így megkapható az adott irreducibilis ábrázolás multiplicitása a vett reprezentációban

Ez felhasználható arra, hogy kiszámoljuk l csoport fúziós szabályait:

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k \underbrace{N_{ij}^k}_{\text{fúziós együttható}} I_k$$ → a 2 ábrázolás ekvivalens

$$\chi_{I_i \otimes I_j} = \underbrace{\chi_i \chi_j}_{\text{pontonkénti szorzat}} \overset{!}{=} \sum_k N_{ij}^k \chi_k$$

$$\langle \chi_i \chi_j, \chi_k \rangle = \langle \sum_e N_{ij}^e \chi_e, \chi_k \rangle = \sum_e N_{ij}^e \langle \chi_e, \chi_k \rangle = N_{ij}^k$$

<u>Elágazási szabályok</u>

$H < G$ megszorítom az irrepet a H részcsop. elemeire

G irreducibilisei: $\{I_1, \dots, I_r\}$

H irreducibilisei $\{E_1, \dots, E_q\}$

$(I_i)_H = \bigoplus_\alpha B_i^\alpha E_\alpha \longrightarrow \quad (\chi_i)_H = \sum_\alpha B_i^\alpha \chi_{E_\alpha}$

felbontható H irrepjeinek direkt összegére

csak az értelmezési tartománya változik ($\mathrm{Tr}\, I(x)$-nek?

(spur nem változik még ettől, csak másra veszi

$$\langle (\chi_i)_H, \chi_{E_\beta} \rangle = \overset{\text{1. változóban lineáris}}{\sum_\alpha} B_i^{\ \alpha} \langle \chi_{E_\alpha}, \chi_{E_\beta} \rangle = B_i^{\ \beta}$$

$$\frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \chi_i(x) \overline{\chi_{E_\beta}}(x)$$

H-n értelmezett skalárszorzat

Szimmetrizált négyzetek

Önmagával vett szorzatának az ábrázolásnak létezik 2 invariáns altere

Felbomlik szim + antiszim -re

$$D \otimes D = S^2 D \oplus \Lambda^2 D$$

$$\chi_{D\otimes D}(g) = \chi_D^2(g)$$

$$\chi_{S^2 D} = \frac{1}{2} \left(\chi_D^2(g) + \chi_D(g^2) \right)$$ szimmetrizált négyzet

$$\chi_{\Lambda^2 D} = \frac{1}{2} \left(\chi_D^2(g) - \chi_D(g^2) \right)$$ antiszimmetrizált négyzet

Valóssági problémák megválaszolása

Fontos, milyen test felett nézzük az ábrázolást

legszebb: komplexre

Ábrázolási operátorok mátrixelemei komplex skalárok lesznek általában.

De a komplex számok közt van néhány kitüntetett részhalmaz: 2 test: racionális számok (integrálási ábr.), valós számok

Mikor tudunk olyan bázist választani, hogy $\forall$ mátrixelem valós legyen?

Valós ábrázolás: ∀ ábrázolás operátor ∀ mátrixeleme valós szám

Valós ábrázolás karaktere csak valós értékeket vehet fel.
De persze ha a karakter valós attól még nem biztos, hogy valós lesz az ábrázolás (pl. 2 komplex konjugált diagonális elem)

Irreducibilis ábrázolások esetén

$D \otimes D^*$ általában nem irrep
∀ tartalmazza az egységábrázolást.

$$\chi_{D\otimes D^*}(g) = \chi_D(g)\chi_{D^*}(g) = |\chi_D(g)|^2$$

$$D \otimes D^* = \bigoplus_i n_i I_i$$

Mekkora az egységábrázolás multiplicitása

$$n_1 = \langle \chi_{D\otimes D^*}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} |\chi_D(g)|^2 \underbrace{\overline{\chi_1}}_{1 \ \forall \text{ csoportra}} =$$

$$= \langle \chi_D, \chi_D \rangle = 1$$

Ilyenkor az 1 ábrázolás mindig 1 multiplicitással fordul elő

(Tegyük fel, hogy χ_D valós értékű

Akkor $\chi_{D^*} = \overline{\chi_D} = \chi_D$ $\quad D^* \cong D$

Irrep karaktere valós ⇒ irrep ekvivalens a konjugáltjával
Akkor $D \otimes D$ tartalmazni fogja az egységábrázolást 1 multiplicitással. Vagy a szimmetrizált, vagy az antiszimmetrizált négyzetben fordul elő.

D akkor valós, ha S^2D tartalmazza 1-et

Ellenkező esetben D pszeudó-valós

Ábrázolások: valós, pszeudó-valós, komplex

<u>Frobenius-Schur indikátor</u>

$$\nu_i = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_i(x^2) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

Innen tudjuk, hogy milyen a mi ábrázolásunk

$$\langle \chi_{S^2D}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left\{\frac{1}{2}\left(\chi_D^2(x) + \chi_D(x^2)\right)\right\}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2|G|}\sum_{x\in G}\chi_D(x)\overline{\chi_{D^*}(x)} + \frac{1}{2|G|}\sum_{x\in G}\chi_D(x^2) =$$

$$\overline{\chi_{D^*}(x)} = \chi_D(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\langle \chi_D, \chi_{D^*}\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2}\nu_D}$$

valós	1	1	=> 1
pszeudóvalós	0	−1	=> −1
komplex	0	0	=> 0

Lie-csoport

Jól kezelhetők: kis elemszámú véges, és megszámlálhatóan végtelen

Kontinuum számosságú csoport

- valós számok halmazának számossága (1-kételmű megfeleltetés)
- Síké és egyenes közt ez már bonyolult.
- 1 fajtája
- véges sok paraméterrel, koordinátával különbséget lehet köztük tenni.

G kontinuum számosságú csoport
(N dim tér is ilyen)

$g \in G$ véges számú valós paraméterrel jellemezhető.

pl. eltolás 3D vektor 3 (véges számú) valós paramétere egyértelműen meghatározza

$\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ $\quad g(\vec{\alpha})$ $\quad \vec{\alpha}$-hoz tartozó csoportelem (valós számokkal adjuk jellemezni)

Ezen kívül:

Csoportművelet: csoportelemek szorzása

$$g(\vec{\alpha})\, g(\vec{\beta}) = g(\Phi(\vec{\alpha},\vec{\beta}))$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

2n valós változótól függő n valós közötti összefüggés

$\forall$ csoportelemnek $\exists$ inverzeleme

$$g(\vec{\alpha})^{-1} = g(\Psi(\vec{\alpha})) \qquad \Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

n valós változós vektorértékű fv.

Teljesülni kell a csoportaxiómáknak

- associativitás

$$\left(g(\vec{\alpha})\,g(\vec{\beta})\right)g(\vec{\gamma}) = g\left(\Phi(\vec{\alpha},\vec{\beta})\right)g(\vec{\gamma}) = g\left(\Phi(\Phi(\vec{\alpha},\vec{\beta}),\vec{\gamma})\right)$$

$$\parallel$$

$$g(\vec{\alpha})\left(g(\vec{\beta})g(\vec{\gamma})\right) = g\left(\Phi(\vec{\alpha},\Phi(\vec{\beta},\vec{\gamma}))\right)$$

$$\Phi(\vec{\alpha},\Phi(\vec{\beta},\vec{\gamma})) = \Phi(\Phi(\vec{\alpha},\vec{\beta}),\vec{\gamma})$$

Mi választjuk a paramétereket nem megfelelő esetén koordinátatranszformáció

- egységelem

  választás: legyen az origó

  $g(\vec{0}) = 1$

- inverz

  akkor $\Phi(\vec{\alpha},\Psi(\vec{\alpha})) = \vec{0}$

Ha ezeket tudják ⇒ csoportstruktúra

folytonos (nem triviális) lépésekkel

- legyenek folytonosak

  egymáshoz közel álló elemek sorozata közeli közel

- Tfh.: differenciálhatók ⇒ Lie-csoportok

Lie csoport: mind Φ, mind Ψ konvergens Taylor-sorba fejthető az origó körül ($\vec{0}$)

Ehhez az kell, hogy az összes változó szerinti parciális deriváltak létezzen ⇒ ettől még persze nem konvergens.

Elégséges feltétel, hogy folytonos második deriváltak létezzenek. (ettől még nem lesz konvergens egy fv, de ha hozzávesszük a csoport leírásához szükséges feltételeket ⇒ konvergens lesz).

Példák

(1.) Valós számok additív csoportja $(\mathbb{R},+)$

- állítás: Lie csoport
- paraméterezés: $\forall$-hez önmagát rendelem

$$g(\alpha)=\alpha$$

- $g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta)$

$$\Phi(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$$

⇒ konvergens Taylor-sor

- $g(\alpha)^{-1} = -\alpha = g(-\alpha)$

$$\Psi(\alpha) = -\alpha$$

Valóban igaz ⇒ kommutatív Lie-csoport

Csoport dimenziója: Csoportelemek megkülönböztetéséhez szükséges valós paraméterek minimális száma.

- $(\mathbb{R},+)$ egydimenziós.

(2.) 1×1-es unitér mátrixok összessége $(U(1),\cdot)$

- tulajdonképpen egységnyi abszolút értékű komplex számok. $UU^+=\mathbb{1}$
- csoportművelet: szorzás ⇒ multiplikatív csoport
- $g(\alpha) = e^{i\alpha}$

  ↓ paraméter

  α tetszőleges valós ⇒ NEM
  2π után ugyanazt kell kapni: $\alpha\in[0,2\pi[$

- $g(\alpha)g(\beta)=e^{i(\alpha+\beta)} = g(\alpha+\beta)$
- $g(\alpha)^{-1}=e^{-i\alpha}=g(-\alpha)$

Φ és Ψ ua, mint előbb

$\Phi(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$

$\Psi(\alpha)=-\alpha$

Egy dimenziós kommutatív Lie-csoport

DE másik csoport, nem izomorf az előzővel a paraméter tartomány miatt.

Ezek lokálisan izomorfak => nem az egész csoportra terjed ki az izomorfia, az egységelemnek egy kis környezetében igaz csak az izomorfizmus
leképezés végtelen sokszor deriválható

Lokálisan, vagy teljesen izomorf? => topológia

Közel két elem akkor, ha a paramétereik is elég közel

$\mathbb{R}^n$ részhalmazainak top. tul-ai <-> csop. elemek részhalmazainak top. tul-ai.

Lie-Csoportok topológiai tulajdonságai:

(1.) **Kompaktság:**

- ∀ nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés. (nyílt halmazok összeségének uniója az egész teret tartalmazza => ∀ pontját tartalmazza)

  ∀ korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata,
- Euklideszi térben egy halmaz akkor kompakt, ha korlátos és zárt.
  (tart a torlódási pontot);

(2.) **Összefüggőség:**

- Bármely két csoportelem összekötthető folytonos görbével.

Példák (3.) $(O(3), *)$ 3x3-as ortogonális mátrixok multiplikatív csoportja

$$OO^T = \mathbb{1}$$

$\det O \det O^T = 1 \longrightarrow \det O = \pm 1$

csak akkor igaz az összefüggőség, ha 1 féle determinánst vizsgálunk itt => a csoport így most nem összefüggő

Tulajdonságok:

3.) Egyszeres összefüggőség:

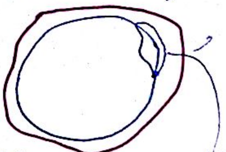
Csoporton definiált ∀ zárt görbe folytonosan összehúzható (1 pontba deformálható)

$(\mathbb{R},+)$

egyre kisebb és kisebb számokkal beszorozható
⇓
egy pontba húzható

egyszeresen összefüggő
nem kompakt

$(U(1),*)$



kezdőpontra zsugorítható ha ugyanabba a pontba és vissza
nem összehúzható ⇒ kívül esik

nem egyszeresen összefüggő
kompakt

Összes lehetséges paraméterezés közül kiválasztható tetszőleges Lie csoportra egy olyan kanonikus paraméterezés, ahol:

- $\Psi(\vec{\alpha}) = -\vec{\alpha}$
- $\Phi_i(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \alpha_i + \beta_i + \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{jk} \underbrace{C_i^{jk}}_{\text{struktúra állandó}} \underbrace{\alpha_j \beta_k}_{\text{külön-külön elsőrendű hatványok}}}^{\text{kvadratikus tag}} + \underbrace{\text{magasabbrendű tagok}}_{\text{nem is érdekel, mert mindegyik másodrend felett}}$

Magasabb rendű tagokat meghatározza a kvadratikus tag.

Struktúra fv-ek parc. diff. egy. rsz-t elégítenek ki, C_i^{jk}-k határozzák meg a megoldást ⇒ magasabb rendű tagokat is

Struktúraállandók az egységelem kis környezetében való viselkedést, tehát a lokális izomorfia-osztályt jellemzik.

(3 indexes menny $\Rightarrow N^3$ szám adja meg)

- nem invariánsak

  lineáris transzformáció hatására másik kanonikus paraméterezés $\Rightarrow$ 3 indexes tenzor lesz $\Rightarrow$ így már invariáns

- $C_i^{jk} + C_i^{kj} = 0$ antiszimmetrikusak a felső 2 indexben.

Struktúraállandók invariáns leírása

$N \times N$-es invertálható mátrixokkal transzformálódnak

Lie-algebra: Legyen $X_1, \dots, X_n$ egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek (n dim-s lineáris tér)

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_k^{ij} X_k$$

2 bázisvektor $\longmapsto$ bázisvektorokon struktúraállandók segítségével kifejtett vektor.

$$A = \sum_i a_i X_i \qquad B = \sum_i b_i X_i$$

kommutátor $[A, B] = \sum_{ijk} C_k^{ij} a_i b_j X_k$

2 vektor $\mapsto$ vektor $\Rightarrow \forall$ 2 változóban lineáris

$$C_k^{ij} = -C_k^{ji}$$

[ ] tulajdonságai $\Downarrow$

- $[A, B] = -[B, A]$ antiszimmetria

- nem asszociatív, de Jacobi-azonosság teljesül

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

csoportművelet asszociativitása miatt, mert C_k^{ij} asszociatív műveletet jellemző állandó

Generated by CamScanner from intsig.com

- (Tetszőleges antiszimmetrikus és Jacobi-azonosságot teljesítő kommutátor művelet egy Lie-csoport struktúraállandóit adja.
- Ezen bázisok összességét a kommutátor művelettel hívjuk Lie-algebrának
- Bizonyos szempontból invarianciát jelent.
- Lokális vizsgálatát a Lie-csoportnak az egységelem körül egy lineáris algebrára redukáltuk.
- Lokális szerkezet vizsgálata lineáris algebrai eszközökkel.

3 dimenziós tér forgáscsoportja

Legfontosabb Lie-csoport

Egy fixponton átmenő tengelyek körüli forgatások összessége (többnyire origó)

tér pontjainak leírása Descartes-koordinátákkal, ahol a forgatás mint lineáris transzformáció működik

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

forgatás során a távolság az origótól nem változik:

$$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}_{O O^T = \mathbb{I}}$$

irányítástartó transzformáció => $\det O = 1$

3×3-as egység determinánsú ortogonális mátrixok SO(3)-mal 1-1 megfeleltetés.

Minden forgatást egy egységvektor (tengely iránya) és a forgásszög egyértelműen jellemez. Ez összesen

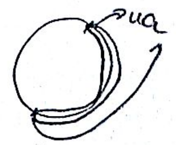
$2+1=3$ szög koordinátát jelent $\Rightarrow$ 3 dimenziós csoport

(pl.: Euler-szögek)

$\Rightarrow$ periodicitás $\Rightarrow$ korlátos tartomány

kompakt, összefüggő 3 dimenziós csoport

forgástengely az egységsugarú gömből 2 pontban metsz: Ezeket egymással azonosítani kell őket



$\Downarrow$

nem egyszeresen összefüggő csoport

$\Downarrow$

Léteznek nemtriviális projektív ábrázolásai (kétértékűek)

Itt most 1db $\Rightarrow$ spinor ábrázolások

Skalásos ábrázolások $\Rightarrow$ tenzor ábrázolások

} csak ezek az ábrázolások léteznek

$\Downarrow$

Léteznek fermionok is, nemcsak bozonok

$\mathbb{R}^3$

$$[A, B] = A \times B$$

3D vektorok lineáris tere a vektorszorzás műveletével

2 csoport ebben a lokális izomorfia osztályban:

$SO(3)$ és $SU(2)$

2x2-es Pauli-mátrixok a kommutátor művelettel $\Rightarrow$ Lie-algebra

megegyezik az algebra az imp. mom-hoz tartozóval.