

Csoporthelmélet

17:00 - kor kezdünk

1. óra
Bemutatás

1) Csoporthelmélet jelentősége

a) szimmetria és homológia

↓

fizikában ez a fontosabb

szimmetria:

- biológia, építészet, ... geometria

- geometriai szimm.:

ilyen geometriai transzformáció, amely a vizsgált objektum ~~szimmetriáján~~ ~~szimmetriáján~~ egészét változatlanul hagyja (az objektum egyes részei viszont megváltozhatnak)



b) fizikai szimm.:

~~felgyorsítás időfolyamata~~ ~~szimmetriáján~~ ~~szimmetriáján~~

ilyen transzformáció, amely felcserélhető az időfolyamattal
(a mozgásegyenlet egy megoldását a mozgásegyenlet másik megoldásába viszik)

c) két szimmetria kompozíciója mindig egy szimmetria! a szimmetriák algebraja = csoport

Csoportelmélet: kvalitatív információ $\rightarrow$ kvantitatív következmények

2) Definíciók

- csoport: a csoport egy halmaz, az elemein értelmezett kétváltozós művelettel, amely teljesíti a csoportaxiómákat

$a, b \in G$ ab = „a és b szorzata” (a zárójel az műveletre beletűnik!)

$\hookrightarrow$ csoportaxiómák:

① asszociativitás: $a, b, c \in G$ $a(bc) = (ab)c$

(lekepezések halmaza mindig asszociatív)

② egységelem létezés: $\exists 1 \in G$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in G$$

③ inverzek létezése: $\forall a \in G$ -hez $\exists$ olyan $a^{-1} \in G$:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

• Véges csoport: véges elemszám

• kommutatív csoport (Abel-csoport) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$

- Csoportfogalom általánosításai:

• fél csoport: teljesíti az asszociativitást (de az egységelem és az inverz ^{2.7-dik} ~~léte~~ nem)

• kvázi csoportok: asszociativitás ~~nincs~~ nincs, de egyrészt és inverz van.

B) Történeti áttekintés

csoportok a matematikában

- ① Lagrange és Galois (polinom egyenletek megoldása gyökjelekkel)
algebra
- ② Hilbert ~~formálisan~~ (számelmélet)
- ③ ~~de~~ Klein és Poincaré (geometria)
Erlangeri program (a geometria csoportokkal való leírása)
- ④ játékelmélet, diff. egyenletek, ...

b) Csoportok a fizikában:

- ① Kristályszimmetriák osztályozása (19. sz. vége)
- ② Noether-tétel (szimmetriák és megmaradási törvények)
(pl. időbeli eltolás $\rightarrow$ energia-megn.)
- ③ Relativitáselmélet:
(fizikai kísérleti szimmetria csoportja a Poincaré-csoport)
↓
minden más elvől jön ki
- ④ Kvantumelmélet (Wigner)
↓
elemi részecskék osztályozása
- ⑤ Pontszerűtés (nincs jobb - nál szimmetria, csak más tem. tr.-ek vonatkozásban $\rightarrow$ Young és Lee)
(levegő: a fizikai szimmetriákat kísérletekkel kell meghatározni, nem szabad a "tervezési" ~~tervezési~~ szimmetriákat feltételezni)
- ⑥ kvark modell (erős kölcsönhatás részecskék szimmetriája)
- ⑦ Mértékelméletek (standard modell, fizikai kölcsönhatások szimmetriája)

⑧ hűelmélet: / - és kvantum-szimmetriák
 superszimmetria

(nem egyszerű csoport)
 a szimmetriacsoport nem
 teljesen igaz szűk $\rightarrow$
 $\rightarrow$ pl. boszónok és fermionok
 kicsit eltérő (az nem invariáns
 csoport))

2. óra

Példák:

1) Számsorozatok:

($(\mathbb{N}, +)$): asszociatív
 DE nincs egységelem
 nincs inverz

a) ($(\mathbb{Z}, +)$): asszociatív
 egységelem (0)
 inverz
 kommutatív is

} egész számok additív csoportja
 (kommutatív, végtelen csoport)

b) ($(2\mathbb{Z}, +)$): páros számok additív cs.-ja (komm., ∞)

$\rightarrow$ számgyűrű: (gyűrű)
 komplex számok dyn $R \subseteq \mathbb{C}$ vizsgálata, melyre

① $-1 \in R$

② $a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$

③ $a, b \in R \Rightarrow a \cdot b \in R$



c) $(R, +)$: egy kommutatív csoport, a számgyűrű additív csoportja

- asszociatív $\checkmark$ (még a komplex számok is azok)
- $-1 \in R \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \in R \Rightarrow -1 + 1 = 0 \in R \Rightarrow$ egységelem $\checkmark$ (a számgyűrű inverzálisan csak egy halmaz)
- inverz $\checkmark \leftarrow a \in R \Rightarrow a \cdot (-1) \stackrel{=-a}{\in} R$

$(\mathbb{Z}, \cdot) \rightarrow$ nincsenek általában inverzek

$$2a = 1 \quad a \notin \mathbb{Z} \quad (\text{nem } \exists \text{ m. } \mathbb{Z}\text{-ben})$$

$(\mathbb{Q}, \cdot) \rightarrow 0$ -nak nincs inverze továbbá se

d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$: kommutatív, ∞ csoport: a racionális számok multiplikatív csoportja

Szűrőtest: olyan számgyűrű, melyben minden nemnulla elem reciproka is eleme a testnek

(legkisebb szűrőtest d))

2) Lineáris csoportok (matrixcsoportok):

• V : lineáris tér

$(V, +)$ kommutatív csoport

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \quad \alpha \text{ skálár (melyek szűrőtest elemei)}$$

$$v_1, v_2 \in V$$

• $A: V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A(v_1) + \beta A(v_2)$

• Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kn} \end{pmatrix}$$

Kiválasztva egy bázist V -ben

$\{b_1, \dots, b_k\}$ bázis V_1 -nek

$\{x_1, \dots, x_m\}$ " V_2 -nek

$$v = \sum_{i=1}^k v_i b_i$$

$$A(v) = \sum_{i=1}^k v_i A(b_i)$$

$$A(b_i) = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j$$

spec. eset ha $V_1 = V_2 \rightarrow \{b_1, \dots, b_k\}$ lehet azonos $\{x_1, \dots, x_m\}$ -el

• Műveletek lin. operátorok halmán

$$(A+B)(v) = A(v) + B(v)$$

$$(AB)v = A(Bv)$$

$\rightarrow$ operátorok összeadása asszociatív és egyeztetésművelet

$\rightarrow$ inversek csak $\det A \neq 0$ esetén léteznek

a) GL (general linear) csoport: adott lineáris tér általános ^{lineáris} csoportja

$$GL(V) = \{ A: V \rightarrow V \text{ invertálható lineáris operátorok} \}$$

összeadással, mint művelettel általános lineáris csoport

$\dim V > 1$ esetén régiesen nem-kommutatív csoport

2) $SL(V)$: speciális lineáris csoport

$$SL(V) = \{ A: V \rightarrow V \text{ lineáris és } \det A = 1 \}$$

matrixcsoport: egy bázis választása a fenti csoportok lin. operátorai matrixokkal írhatóak le, így a csoportelemek leírhatóak matrixok is

$$GL_n = \{ n \times n\text{-es, invertálható matrixok} \}$$

$$SL_n = \{ -||-, \text{egységnyi determináns} \}$$

3) Permutáció csoportok:

X véges halmaz

permutációk

$$Sym(X) = \{ X \rightarrow X \text{ bijektív leképezés} \}$$

bijektív leképezések kompozíciója megint bijektív $\Rightarrow$

$\Rightarrow Sym(X)$ csoportot alkot kompozíció műveletével

($\exists$ egységpermutáció, inverz is)

$\hookrightarrow$ bijektív leképezéssel $\forall$ elemhez lehet

X feletti szimmetrikus csoport

"képet rendelni"
(itt is van "összpermutálás")

a) Alternáló csoport: páros permutációk csoportja

$\rightarrow$ Transpozíció: olyan permutáció, amelyben 2 elemet kívül az összes többi fixen marad

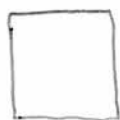
$\rightarrow$ tetszőleges permutációt elő tudunk transpozíciókkal állítani

→ Páros egy permutáció, ha páros számú transpozíció sorozata
(belátható, hogy akárhogyan állítom elő, a páritás nem változik)

⇓
altatózó csoport: a páros permutációk kompozíciója is páros permutáció, ...

4) Geometriai szimmetriacsoportok:

- Szabályos (egyenlő oldalú) háromszög



, ... (szabályos sokszögek)



izometriák: eltolások

forgatások

tükrözések

(és kombinációik)

(euklideszi mozgások: az objektum egészére változatlan marad, de egyes részei (csúcsai) megcsúszhatnak)

- oldalfelcserék oldalfelcserébe kell mennie, ha bármilyen nem
- ⇒ súlypont invariáns vált. az alakzat

⇒ eltolás nem lehet

⇒ forgatás: fixpont a súlyponton

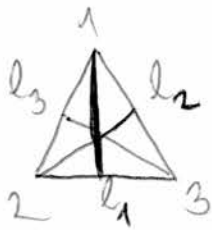
⇒ tükrözés: egyenes tartalmazza a fixpontot

- szimmetria csúspontot csúspontba képez

⇒ tükrözés csak úgy lehet szimm., ha 1-1 csúspontot megcsúszal, 1-et változtatásul hagy

⇒ ez nyíltan van a tengelyen

tükrözési egyenes tartalmazza a fixpontot és valamelyik csúspontot



a) $D_3 = \{ 1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{tükörösök}}, \underbrace{C, C^2}_{\substack{\downarrow 120^\circ\text{-os} \\ \downarrow 240^\circ\text{-os}}} \}$: harmadfokú diederocsoport

σ szimmetriatengelyek forgatás forgatás
 $\oplus$ irányba $\oplus$ irányba

b) D_n : n -edfokú diederocsoport (valójában n -szög szimmetriacsoportja)



$\rightarrow$ itt is van TKP, ami invariáns marad

$|D_n| = 2n \leftarrow n$ db tükrösítés és n db forgatásból áll
 $\uparrow$
 csoport rendje : hány eleme van

- ált. bnr nem kommutatívok a diederocsoportok

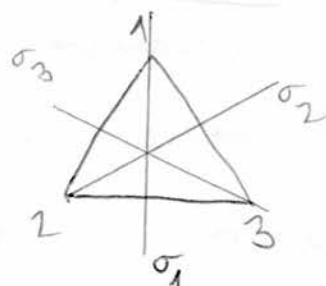
Szorzótábla (Cayley-tábla) véges csoportokra

D_3	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
1	1	σ_1	σ_2	σ_3	C	C^2
σ_1	σ_1	1	C	C^2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	C^2	1	C	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	C	C^2	1	σ_1	σ_2
C	C	σ_3	σ_1	σ_2	C^2	1
C^2	C^2	σ_2	σ_3	σ_1	1	C

a csoportelemek

köziötti szorzás eredményét

tartalmazza



σ_1 : $1 \leftrightarrow 1$
 $2 \leftrightarrow 3$

σ_2 : $2 \leftrightarrow 2$
 $1 \leftrightarrow 3$

σ_3 : $3 \leftrightarrow 3$
 $1 \leftrightarrow 2$

$\sigma_1 \sigma_2$: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 1$

$C: 1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 1$

assoc.

$$\sigma_1 \cdot C = \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2) = (\sigma_1^2) \sigma_2 = \sigma_2$$

alt. tulajd.:

• inversek létezése $\Rightarrow \forall$ csoportelem 1-nel rendelkező inverze van

• a szorzótábla az általa:

$\rightarrow$ szimmetrikus $(\Leftrightarrow)$ kommutatív csoport

$\rightarrow$ nem szimmetrikus $(\Leftrightarrow)$ nem -||- csoport

C_3	1	C	C^2
1	1	C	C^2
C	C	C^2	1
C^2	C^2	1	C

forgási szimmetriák csoportja

3. óra

d) hm:



szorzótábla

szimmetriák $\rightarrow$ csúspontok permutációja

1) Homomorfizmus: (a geometriai transzformációk helyett a permutációk szorzatait vizsgáljuk)

def: olyan leképezés 2 csoport között, amely művelettartó, azaz

$$\phi: G \rightarrow H$$

$$\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y) \quad x, y \in G$$

G-beli szorzás H-beli szorzás

- Elöl következik:

• $\phi(1_G) = 1_H$ egységelem egységelemre képeződik le

• $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ inverz inverzre —

- De a kapcsolat G és H között nem egyértelmű, sors:

pl. $E := \{1\}$ a sorsos műveletével

$$\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$$\phi: G \rightarrow E$$

$$x \mapsto 1$$

ez teljesíti a homomorfizmus feltételét

||

2) Isomorfizmus

(ez már egyértelmű kapcsolat 2 csoport között)

- def: bijektív homomorfizmus

- G és H izomorf, jelölés: $G \cong H$, ha $\exists \phi: G \rightarrow H$ izomorfizmus

- tulajdonságok:

① $G \cong G$

② $G \cong H \Rightarrow H \cong G$

③ $G \cong H$ és $H \cong K \Rightarrow G \cong K$

(ekvivalencia reláció, de nem az, mert a 2 csoport nem egy halmazon belül van).

- $G \cong H \Rightarrow |G| = |H|$
(sármoráguk megegyezik)

$|G|$: a csoport rendje, az
elemek száma

3) Isomorfia-elv: egymással isomorf csoportok csoportelméleti szempontból nem különböznek.

4) Feladat isomorfiaira:

① $\text{Sym}(X) \cong \text{Sym}(Y)$ akkor és csak akkor, ha $|X| = |Y|$

$\Downarrow$
a szimmetrikus csoportok csak akkor különböznek, ha eltérő elemszámaik

$\Downarrow$
n-edfokú szimmetrikus csoport, $S_n = \text{Sym}(\{1, \dots, n\})$

② $D_3 \cong S_3$ (magasabb rendű szim. csoportokra már nem igaz)

$T \cong A_4$ ^{4 elemű}
(tetraéder) (alternáló csoport)
csoportja

$\{\phi: G \rightarrow G\} = \text{Aut}(G) : G$ automorfizmusai (autom.-ok)

• G -ből G -be való (homom.) izomorfizmusok összessége

• G automorfizmusai maguk is csoportot alkotnak kompozíció műveletével:

→ egyértelmű az identitás leképezés

→ $\forall$ bijektív leképezésnek $\exists$ inverze

= az $\text{Aut}(G)$ a csoport szimmetriastruktúrája

	1	c	c ²
1	1	c	c ²
c	c	c ²	1
c ²	c ²	1	c

→ ha csak a forgatásokkal foglalkozunk,
 azok is csoportot alkotnak
 (a tükrözések önmagukban nem, mert a tükr.
 megfordítja a sorrendet, ezért 2 tükr. sorozat
 egy forgatás lehet csak)

Részcsoport: csoportelemek olyan halmaza, amely maga is
 - bel.: csoportot alkot az eredeti művelet megszüntetésével

$$H \subseteq G \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} x, y \in H \Rightarrow xy \in H \\ \textcircled{2} x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{array}$$

- jelölés: $H < G$

- példák: $\{1, c, c^2\} < D_3$

• $\{1\} < G$: az G triviális részcsoportha

• $G < G$ (nem feltétlenül kell kisebbnek lennie)

- tulajdonságok:

① $G < G$

② $H < G$ és $G < H \Rightarrow G = H$

③ $H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$

④ $|H| \leq |G|$ pl. $(2\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Z}, +)$, de számosságuk megegyezik

⑤ Részcsoporthok metszete is részcsoportha.

pl.: $H_1 < G$ és $H_2 < G$

• $x, y \in H_1 \cap H_2$

$\downarrow$
 $x, y \in H_1, H_2 \Rightarrow x, y \in H_1 \cap H_2, x^{-1} \in H_1 \cap H_2$
 $\uparrow$

• $H_1 \cup H_2 \rightarrow$ ez általában már nem lesz ^{új részcsoport} (ez mindig)

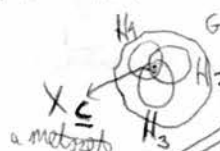
részcsoporthoz ^{új} uniója általában nem részcsoporthoz

- Legyen X a G csoport elemeinek tetszőleges részhalma:

$\langle X \rangle = \cap H$ neve az X részhalmas által generált

ilyen részhalmasok metszete

$\begin{cases} H < G \\ X \subseteq H \end{cases}$ részcsoporthoz (H: részcsoporthoz)



$\langle X \rangle$ maga is részcsoporthoz, mert metszet (l. 13. ld.)

ez az X -et tartalmazó legkisebb részcsoporthoz G -nek.

- $H < G$ és $X \subseteq G$ hogy $\langle X \rangle = H$, akkor X egy generátor rendszer H -nak.

↑
itt $\langle X \rangle = H$
(akkor használjuk,
ha X maga
nem részcsoporthoz)

Ciklikus csoport:

1) def.: olyan csoport, amely generálható egyetlen elemmel!

- pl. $(\mathbb{Z}, +)$ $[1]$ generálja az egész csoportot.

Négyzetes ciklikus csoportnak is nevezzük

2) ciklikus csoportok szerkezete:

$\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3, \dots$

→ ha G véges, akkor csak véges számú különböző x hatvány

létezik (adott kitevő után ismétlődni kezdnek).

Legkisebb pozitív egész, amelyre $x^n = 1$ a csoport rendje.

- ha $|G| = \infty$, akkor $\phi: G \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$

$x^k \mapsto k$

• bijektív

• "művelettartó"

$$\phi(x^k x^n) = k+n = \phi(x^k) + \phi(x^n)$$

- Ha $|G| < \infty, |G| = n$:

$$\{x^0, x^1, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\phi: G \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$$

$$x^k \mapsto k$$

$\left. \begin{array}{l} (\mathbb{Z}_n, +) \text{ modulo} \\ n \text{ egészek} \\ \text{csoportja} \end{array} \right\}$

$$x^k x^l = x^{k+l} = x^{(k+l) \bmod n} \quad 0 \leq k, l < n$$

(ismétlődés miatt)

$\Rightarrow$ végtelen ciklikus csoport izomorf $(\mathbb{Z}, +)$ -al

véges $-||-$

$-||-$ $(\mathbb{Z}_n, +)$ -al

$\Downarrow$

ciklikus csoportokat $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$ -el is jelölhetjük (azonosíthatjuk)

3) pl. $\{1, c, c^2\} < D_3$

$$\langle \{c\} \rangle = \langle \{c^2\} \rangle = \langle \{c, c^2\} \rangle$$

$\left. \begin{array}{l} \text{ciklikus részcsoport} \end{array} \right\}$

4) $x \in G$ elem rendje az $\langle x \rangle$ ciklikus részcsoport elemszáma

Részcsoportok II:

1) $H < G$ és $K < H \Rightarrow K < G$

$\Rightarrow$ Részcsoportok összessége egy reszben rendezett halmaz.

Áll: részcsoportok látszó allokációk, vagyis léteznek minimumok és maximumok

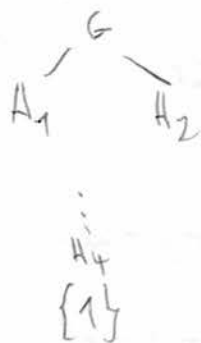
• $\min \{H_i\} = \bigcap_i H_i$

• $\max \{H_i\} = \langle \bigcup_i H_i \rangle \Rightarrow$ részcsoportból

(az $\bigcup_i H_i$ önmagában nem elég, pl. $\{1, \sigma\}, \{c, 1, c^2\} \rightarrow$ de $c \cdot \sigma$ már nincs az úniónban)

2) Hasse-diagramm (részcsoportok hálójának jellemzése):

$H < G$ részcsoportok összessége



(akkor rajzolunk vonalat, ha a magasabb szinten álló tartalmazza az alsó részcsoportként)

- akkor lesznek egy áll a diagrammba két részcsoport ($K < H$) köre, ha $K < H$, és ha $K < M < H$, akkor $K = M$ vagy $M = H$ (nincs köztük még egy részcsoport, ami egyikről nagyobb, másikról kisebb)



4. óra

1) Mellékantályok:

a) $H < G, x \in G \quad xH = \{xh \mid h \in H\}$

x -hez és H -hoz tartozó baloldali mellékantály

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

x -hez és H -hoz — " — jobboldali — " —

a bal és jobboldali mellékosztályok tulajdonságai megegyeznek,
 köztük dualitás van $\Rightarrow$ elég az egyik mellékosztállyal foglalkozni
 $\Rightarrow$ Mostantól a baloldali m.o.-okkal foglalkozunk

b) tulajdonságai:

- Particionálják a csoportot: minden csoportelem tagja egyik
 (csoportbeli) mellékosztálynak, és két mellékosztály vagy egybeesik,
 vagy disjunkt $\downarrow$

• legalább annak tagja, amiben "0" és "1"

• ha $z \in xH \cap yH$

$$z = xh_1 = yh_2 \stackrel{1.2.1}{\Rightarrow} h_1, h_2 \in H$$

$$y = x \cdot \underbrace{(h_1 \cdot h_2^{-1})}_{h_3} = x \cdot h_3 \Rightarrow y \in xH$$

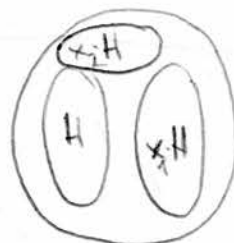
$$yH = \{ yk \mid k \in H \} = \{ x(h_3k) \mid k \in H \} = xH$$

$\hookrightarrow$ egybeesnek, ha van metszet

$\Rightarrow$ "nyíleg" osztályozást valósítanak meg a $\sim$ -ok, az egy mellék-
 osztályon tartó elemek ekvivalenciát valósítanak meg

- Minden mellékosztály számossága megegyezik, mis.:
 G

• Trivialis mellékosztály: $\underbrace{e \cdot H}_{\text{egység}} = H$



• $x \cdot H = \{ xh \mid h \in H \}$

$xh \mapsto h$, bijekció H és xH között $\Rightarrow$ azonos a
 elemszámuk.

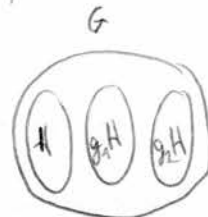
számosságuk

($\Rightarrow$ a mellékosztályok számossága osztója a csoport rendjének)
 és fordítva
 (l. 18. ld.)

⇒ Mellekordályok halmaza (kötési halmaz): G/H

→ H reszcsoport indexe G -ben $= [G:H] = G/H$ számossága

• Mivel kisebb egy reszcsoport indexe, annál kisebb
szempelt ~ Hasse-Diagramon



pl. most $G/H=3$

• $[G:G]=1$

• $[G:[1_G]] = |G|$

⇒ a ~~reszcsoport~~, mellekordályokra bontás adott H reszcsoporthoz tartozik

2) Lagrange-tétel:

Ha G véges csoport, akkor $|G| = |H| \cdot [G:H]$ minden $H < G$
reszcsoport (reszcsoport rendje osztja a csoport rendjét).

Következmény:

✓ prímszámú csoport ciklikus

$|G| = p \quad H < G \quad |H| = 1 \text{ vagy } p$

$\{1\} < G \quad g \in G \quad \langle g \rangle = G$

pl. D_3

	1	c	c ²	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	c	c ²	σ_1	σ_2	σ_3
c	c	c ²	1	σ_3	σ_1	σ_2
c ²	c ²	1	c	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	c	c ²
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	c ²	1	c
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	c	c ²	1

$N = \{1, c, c^2\}$

$H_1 = \{1, \sigma_1\}$

- N mellékortályai:

$$N, x \in D_3 \rightarrow xN$$

$\Downarrow$

$$\sigma_1 N = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_2 N = \sigma_3 N$$

$$G/N = \{N, \sigma_1 \cdot N\}$$

különböző elemek tartoznak ugyanaz a mellékortály!

$$N \cdot \sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_1 N$$

(alt. ban ez nem igaz, hogy a bal- és jobboldali mellékortályok megegyeznek)

- H_1 mellékortályai: $H_1 = \{1, \sigma_1\}$

$$C \cdot H_1 = \{C, \sigma_3\}$$

$$\sigma_2 H_1 = \{\sigma_2, C^2\}$$

$$\Rightarrow G/H_1 = \{H_1, CH_1, \sigma_2 H_1\}$$

$\Downarrow$

$$H_1 \sigma_2 = \{\sigma_2, C\}$$

3) Normális részcsoport:

$$a) x \cdot N = N \cdot x \quad \forall x \in G \quad N \triangleleft G \quad (\text{bal- és jobboldali mellékortályok megegyeznek})$$

Pl. $\{1\}, G \rightarrow$ triviális norm. részcsoport

$\Downarrow$

$\forall$ csoportban van norm. részcsoport

b) Minden részcsoport normális, ha G csoport kommutatív

c) $N \triangleleft G$ $x \equiv_N y$ ha ugyanazon mellékortály elemei
(részcso.) (ekvivalencia van x és y között) (N-szeletti bontásban)

$\rightarrow$ Normális részcsoport esetén es kompatibilis a csoportművelettel

(azaz kongruencia-reláció):

$$x_1 \equiv_N y_1 \text{ és } x_2 \equiv_N y_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \equiv_N y_1 \cdot y_2$$

equiv. ortályok

Lehetővé teszi az művelet bevezetését az ekvivalencia-
osztályok halmazaiban:

G_1, G_2 ekvív. osztályok (N mellékosztályai)

$G_1 \cdot G_2 = x_1 \cdot x_2$ -t tartalmazó osztály, ha $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$

$\Downarrow$
d) ' G/N ' faktorcsop.: N ^{normális részcsopt} mellékosztályai, mint ekvivalencia-
osztályok, és a közöttük bevezetett fenti szorzásművelet
struktúrája (csopottja).

4) $G/N = \{xN\}$ melléko. $\left\{ \begin{array}{l} X, Y \subseteq G \\ X \cdot Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\} \end{array} \right.$

a) $(xN)(yN) = (xy)N$
(ez is komplexus szorzás)
 $\Downarrow$

komplexus szorzat

$\rightarrow$ a csoportszorzás kiterjesztése a
részalmaszókra

b) Tétel

Egy részcsopt akkor normális, ha amely két mellékosztályának
komplexus-szorzata is mellékosztály.

c) példa:

D_3 normális részcsoptjai:

$\{1\}, D_3, N = \{1, c, c^2\}$ $\leftarrow$ már látható, hogy $\{1, \sigma_1\}$ "nem normálisak"

$$G/\{1\} \stackrel{N}{=} G$$

$$G/G \stackrel{N}{=} \{1\}$$

D_3/N	N	$\sigma_1 N$
N	N	$\sigma_1 N$
$\sigma_1 N$	$\sigma_1 N$	N

N : forgatások részcsoportja $\rightarrow$ a faktorcsoport geometriai tartalommal rendelkezik
(irányítástól)

$\sigma_1 N$: (irányításra ~~át~~ tükrözések)
(2 faktorcsoport elem $\rightarrow$ irányításra ~~át~~ tükrözések leképezések)

$\boxed{+}$ ha irányításra $\rightarrow +1$
-||- ~~át~~ $\rightarrow -1$

	$+1$	-1
$+1$	1	-1
-1	-1	1

azaz $\phi: D_3 \rightarrow \{+1, -1\}$ ^{altern} homomorfizmus
 $x \mapsto$ paritás (x) ^{a faktorcsoport (D_3/N) és $\{+1, -1\}$ között}

$\forall$ faktorcsoport meghatároz egy természetes homomorfizmust

$N \mapsto +1$ ^{körött}
 $\sigma_1 N \mapsto -1$

$\downarrow$

5) Természetes homomorfizmus: $N \triangleleft G$

a) $\pi_N: G \rightarrow G/N$ homomorfizmus $\pi_N(xy) = (xy)N =$
 $x \mapsto x \cdot N$
 $= (xN) \cdot (yN) = \pi_N(x) \pi_N(y)$

($\forall$ csoportelemhez hozzárendeljük a hozzá tartozó ^(N-el definiált) mellékrendelt)

b) Természetes homomorfizmus képe:

$\pi_N(G) = G/N$ (a teljes faktorcsoport) $\Rightarrow$ szürjektív homomorfizmus

c) Homomorfizmus-tétel

Tetszőleges $\phi: G \rightarrow H$ homomorfizmus esetén a

$\text{Ker } \phi = \{x \in G \mid \phi(x) = 1_H\}$ egy normális részcsoportja G -nek,

ϕ magja (azon elemek halmaza,
melyek a H -beli egységre képeződnek le)

és: $G/\text{Ker } \phi \stackrel{N}{=} \phi(G)$
 faktorcsoport homomorf
 képek
 (a $\text{Ker } \phi$ normális
részcsoport, mellékantizymai)

Bizs:

$x, y \in \text{Ker } \phi$, azaz $\phi(x) = \phi(y) = 1$

• $x^{-1} \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = 1$ (műveletesség miatt)

• $x \cdot y \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y) = 1$ (11-)

$$\phi(G) = \{ \phi(x) \mid x \in G \}$$

$$\phi(x) \quad \phi(y) \quad x, y \in G$$

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy) \in \phi(G)$$

"Áramerősség":

homomorf képek = faktorcsoportok (izomorfizmus erejéig)

d) Korrespondencia-tétel:

egy-egyértelmű kapcsolat van $\phi(G)$ részcsoportjai és G

azon részcsoportjai között, amelyek tartalmaznak $\text{Ker } \phi$ -t.

5. óra
"Bonyolultabb" csoportok előállítására

Direct csoport

- 1) G és H csoportok $G \times H$ direct csoportja (x, y) $x \in G, y \in H$ alakú rendezett párok csoportja. A nyituk értelmezett művelet:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

kiegészíti a csoportaxiómákat:

• asszociatív

$$((x_1, y_1) (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 x_2, y_1 y_2) (x_3, y_3) = ((x_1 x_2) x_3, (y_1 y_2) y_3)$$

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) = (x_1, y_1) (x_2 x_3, y_2 y_3) = (x_1 (x_2 x_3), y_1 (y_2 y_3))$$

• egységelem:

$$(1_G, 1_H) \xrightarrow{\text{mis.}} (1_G, 1_H) (x, y) = (x, y)$$

• inverz:

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$$

- 2) A direct csoport "műveleti" tulajdonságai:

($\mathbb{Z}$ valójában nem művelet, mert műveletek egy halmazon a csoportok)

① $G \times H \cong H \times G$

② $(G \times H) \times K \cong G \times (H \times K)$

③ $G \times \{1\} \cong G$

④ inverz nincs! Mis.: $|G \times H| = |G| \cdot |H|$

$\Rightarrow$ ha lenne inverz, annak elemeinek száma $|G|$ lenne,
ami nem egész

$$3) G \times H = \{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$$

$$\hat{G} \equiv \{(x, 1_H) \mid x \in G\} \quad \hat{H} = \{(1_G, y) \mid y \in H\}$$

Így: $\hat{G} < G \times H$ his: $(x, 1_H) \cdot (y, 1_H) = (xy, 1_H)$

$$\hat{H} < G \times H$$

- Sőt, normális réssoportok:

$$(g, h) \in G \times H$$

mert ha $g \rightarrow$ az összes
completemmel lezárson, akkor normális
completemmel

$$(g, h) \cdot \hat{G} = \{(g, h) \cdot (x, 1_H) \mid x \in G\} = \{(gx, h) \mid x \in G\} = \{(x, h) \mid x \in G\}$$

$$\hat{G}(g, h) = \{(x, 1_H)(g, h) \mid x \in G\} = \{(x, h) \mid x \in G\} //$$

hasonlóan $\hat{H}$ -ra.

$$\Rightarrow \hat{G} \triangleleft G \times H$$

$$\textcircled{1} \quad \hat{H} \triangleleft G \times H$$

$$\phi: G \times H \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto x$$

homomorfizmus

mert $\phi((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \phi(x_1 x_2, y_1 y_2) = x_1 x_2 = \phi(x_1, y_1) \cdot \phi(x_2, y_2)$

• $\phi(G \times H) = G$ (a kép teljes G csoport, mert x megfigyelt az egész G -n)

• $\text{Ker } \phi = \{(x, y) \in G \times H \mid \phi(x, y) = 1_G\} = \{(1_G, y) \mid y \in H\} = \hat{H}$

$$\textcircled{2} \quad G = \phi(G \times H) \cong G \times H / \hat{1}$$

$$\hookrightarrow G \times H / \hat{1} \cong H$$

$$\textcircled{3} \quad \hat{G} \cong G \text{ és } \hat{H} \cong H$$

$$\pi: \hat{G} \rightarrow G$$

$$(x, 1_H) \mapsto x \quad \text{izomorfizmus}$$

$$\textcircled{4} \quad \hat{G} \cap \hat{H} = \{ (1_G, 1_H) \} \quad \text{trivialis a metszetük}$$

$$\textcircled{5} \quad \langle \hat{G} \cup \hat{H} \rangle = G \times H$$

$$\hat{G} \cup \hat{H} = \{ (x, y) \mid x=1_G \text{ vagy } y=1_H \}$$

$$(x, 1_H), (1_G, y) \text{ -t tartalmazza } (\forall x \in G, y \in H \text{-ra})$$

de ekkor szorzatuk is eleme $\hat{G} \cup \hat{H}$ -nak

$$(x, 1_H) \cdot (1_G, y) = (x, y)$$

$\Rightarrow$ együttesen generálják az egész csoportot

$\textcircled{6}$ elemeik páronként kommutálnak

$$(x, 1_H) (1_G, y) = (x, y) = (1_G, y) (x, 1_H)$$

= Ha egy csoportban található két normális részcsoport, melyek

elemei páronként kommutálnak, metszetük trivialis, és

amelyek együttesen generálják az egész csoportot, akkor a csoport

isomorf a direkt szorzatokkal.

- direkt szorzatok "majdnem" kommutatív csoportok (sz. elemül)
- kommutatív csoportok direkt szorzata kommutatív (sz. elemül)

4) Példa: legyen n és m relatív prím

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = ?$$

(ciklikus csoportok)

$$\mathbb{Z}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_m = \{1, y, y^2, \dots, y^{m-1}\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \{(x^k, y^l) \mid 0 \leq k < n, 0 \leq l < m\}$$

Tekintsük az (x, y) elemet:

$$(x, y)^0 = (1, 1)$$

$$(x, y)^1 = (x, y)$$

$$(x, y)^k = (x^k, y^k)$$

$$(x, y)^n = (1, y^n)$$

(Kérdés:

$\mathbb{Z}_n$ cikl. csoport

$$x^n \stackrel{?}{=} 1 = x^0$$

nem lehetne $x^n = x^k$? (ak $k < n$)

$$\text{nem, mert } x^n \cdot x^{-k} = 1$$

$$x^{n-k} = 1$$

↓

csak $n-k < n$ elemek

lehetnek a csoportnak)

Ha n és m relatív prím $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$ (egész):

$$an + bm = 1$$

$$(x, y)^{an} = (x^{an}, y^{an}) = (1, y^{1-bm}) = (1, y)$$

$$(x, y)^{lm} = (x^{lm}, y^{lm}) = (x^{1-an}, 1) = (x, 1)$$

$\Downarrow$

$$(x^k, y^l) = (x, 1)^k \cdot (1, y)^l = (x, y)^{lk+al}$$

$\Rightarrow (x, y)$ hatványai között van $(x, 1), (1, y) \Rightarrow$ az összes $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ csoportelem megkapható a hatványaikból $\Rightarrow (x, y)$ generátor $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}}$$

ha relatív prím számú ciklikus csoportokat direkt szorzunk, megszerjük is ciklikus csoportot lesz

lepl. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_4$ nem izomorfak
Klein-féle csoport

(izomorfia esélyig)

5) Tetszőleges elemszámu ciklikus csoportok direkt szorzata általában nem ciklikus, de mindig kommutatív (Abel-csoport).

6) Frobenius-Stickelberger-tétel: minden vég Abel-csoport elbőll prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzataként, sorrendtől eltekintve egyértelműen.

$$G \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \quad (p_i - k \text{ prímhatvány})$$

$\Rightarrow$ prímhatványok jellemzik az Abel csoportok.
(nem prímek!)

7) Ha G nem véges, de végesen generált Abel-csoport, akkor G prímszámúrendű ciklikus csoportok és véges sok végtelen ciklikus csoport szorzataként áll elő.

$$|G| = \prod_i p_i^{k_i}$$

Féldirekt szorzat

1) Def.: G és H csoportok, $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(H)$
(automorfizmus csoport)

$$\{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$$

$$g \mapsto \alpha_g$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, \alpha_{x_2}(y_1) y_2)$$

$\alpha_g: H \rightarrow H$ automorfizmus

(bijektív és művelettartó leképezés) ($\forall g$ -beli elemhez egy ilyen automorfizmus rendelődik)

- Specialisan: $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(H)$

$g \mapsto \text{identitás}_H$ (minden elemet invariancia
visszátbocsát)

akkor spec.-an a direkt szorzatot kapjuk vissza.

- Rendezett párok csoportot alkotnak

$$|G \rtimes_{\alpha} H| = |G| \cdot |H|$$

$\uparrow$
nem szimmetrikus a művelet! (mint a direkt szorzat)

$$2) \quad \hat{G} = \{ (x, 1_H) \mid x \in G \} \quad \hat{H} = \{ (1_G, y) \mid y \in H \}$$

recesszordok a feldolgozó szorítás

$$\hat{G} \cong G \text{ és } \hat{H} \cong H$$

$$- \text{DE } \hat{H} \triangleleft G \times_{\alpha} H \quad (\text{csak } \hat{H} \text{ lesz normális rés.})$$

$$(G \times_{\alpha} H) / \hat{H} \cong G$$

$\hat{G}$ és $\hat{H}$ metszete triviális, együttes generálójuk a feldolgozó szorítás, az elemek nem kommutálanak páronként.

3) Példák:

① Euklideszi mozgások (izomorfia) csoportja =
transzlációk és rotációk feldolgozó szorítása

② Poincaré - csoport

③ Kristályok szimmetriacsoportja

6. óra

Centralizátorok

1) $x \in G$ ^{centralizátor} $C_G(x) = \{ y \in G \mid xy = yx \}$

$\rightarrow$ azon elemek halmaza, melyek kommutálhatóak az x elemmel

2) All: $C_G(x) \leq G$ (normális)

$$y_1, y_2 \in C_G(x) \Rightarrow xy_1 = y_1x$$

$$xy_2 = y_2x$$

(zártaság)

$$y_1 y_2 \in C_G(x)$$

$\Uparrow$

$$x(y_1 y_2) = (xy_1)y_2 = (y_1x)y_2 = y_1(xy_2) = y_1(y_2x) = (y_1 y_2)x$$

$$y \in C_G(x) \quad xy = yx$$

$$y^{-1}(xy)y^{-1} = y^{-1}(yx)y^{-1}$$

$$y^{-1}x = xy^{-1}$$

$\Downarrow$

$$y^{-1} \in C_G(x) \quad (\text{inverz } \checkmark)$$

3) $X \leq G$ valószínűleg centralizátor:

$$C_G(X) = \{ y \in G \mid xy = yx \quad \forall x \in X \} = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$$

4) Példák:

$$C_G(1) = G$$

$$C_G(G) = Z(G) \quad \text{az egész csoport a } G \text{ csoport}$$

centruma

centrális elem: amelyik felcserél minden csoportelemmel
(ezek elemei $Z(G)$ -nek)

= a centralizátorok a kommutativitást mérik

5) Ha G kommutatív, akkor minden csoportelem centrális

$$\boxed{Z(G) = G}$$

6) Centrum mindig normális részcsoport

$$x \in G \quad x \cdot Z(G) = \{xy \mid y \in Z(G)\} = \{yx \mid y \in Z(G)\} = Z(G) \cdot x$$

baloldali m.o. jobboldali m.o.

7) Normalizátor

Legyen $H < G$ egy részcsoport

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\} \quad \text{a } H \text{ részcsoport normalizátora}$$

$$N_G(H) < G$$

- Ált. ban egy adott részcsoport centralizátora kisebb, mint a normalizátora: $C_G(H) < N_G(H)$

$$x \in C_G(H) \quad xH = \{xh \mid h \in H\} = \{hx \mid h \in H\} = Hx$$

DE fordítva nem igaz: attól, hogy a bal- és jobboldali melléko. megegyeznek, a csoportok külön-külön nem ^{szigorú} kommutálnak

- (Ált. ban) $C_G(H) < N_G(H)$ normális részcsoportja a normalizátornak

- $H \triangleleft N_G(H)$: a normalizátor a legkisebb olyan részcsoportja

G -nek, amelyben H normális, vagyis:

$$N_G(H) = \bigcap_{H \triangleleft K < G} K$$

Kommutátor (derivált) részcsoport

1) Két elem felcserélhető, ha $xy = yx$

$$xyx^{-1}y^{-1} = 1$$

$[x, y]$: két csoportelem kommutátora

$\Rightarrow$ Ha a kommutátor az egységelemet adja, akkor a két elem kommutál,

ha nem, akkor nem

2) $\{[x, y] \mid x, y \in G\} \rightarrow$ ez egy önmagában nem részcsoport, mert

két kommutátor szorzata nem feltétlenül kommutátor $\Rightarrow$

viszont tekintetjük azt a ^{legkisebb} részcsoportot, amely tartalmazza az

összes ilyen kommutátort (a körte halmaza által generált részcsoport)

$$G' = \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle$$

kommutátor - csoport = derivált részcsoport

$G' \triangleleft G$ normális részcsoport

G/G' kommutatív

- Ha G Abel-csoport, akkor $\forall$ kommutátor az egységelem $\Rightarrow$
 $\Rightarrow G' = \{1\}$ trivialis

- Ha G nem Abel-csoport $\Rightarrow$ vesszük G' -t, és ennek is meghatározzuk a deriváltját (kommutátorok kommutátorait) ... $\Rightarrow$

3) Derivált lánc: $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$, $G^{(n)} = G^{(n-1)'} \mid$

$$G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \dots$$

- véges csoportban véges sok lépéssel vége van a derivált lánc

$\hookrightarrow$ Ha véges sok lépés után $G^{(n)} = \{1\}$: feloldható csoport

(pl. Abel-csoport is ilyen)

("sorozlag" kommutátor)

$\hookrightarrow$ Ha véges sok lépés után $G^{(n)} \neq \{1\} \rightarrow$ ilyen (derivált) normális részcsoportot kapunk 1-ami "önmagja deriváltja"

- ∞ csoportban lehet végtelen a deriváltlánc

(Megj.: a feloldható csoport kapcsolata van a polinomok megoldhatóságával)

4) Feit - Thompson-tétel: minden páratlan rendű csoport feloldható

Konjugált osztályok

1) $x^y = yx$

$$y^{-1}x y = x$$

x^y : x konjugáltja y által

$\Rightarrow x$ akkor cserél fel y -al, ha $x^y = x$

2) $X, Y \subseteq G$ $X^Y = \{x^y \mid x \in X, y \in Y\}$

3) $x \in G$ konjugált osztály: $x^G = \{x^y \mid y \in G\}$

$\Rightarrow \forall$ csoportelemhez rendelhető ilyen konj. osztály
osztály, mert ekvivalencia relációból van szó

- a konjugált osztályok particionálják a csoportelemek halmazát:

- $\forall$ csoportelem eleme mely konjugált osztálynak

- két konjugált osztály vagy megegyezik, vagy diszjunkt

Biz.: $z \in x^G \cap y^G$ (teh. van metszet)

$$z = x^g = y^h \quad z, g, h \in G$$

$$g^{-1}xg = h^{-1}yh$$

$$x = (gh^{-1})y(hg^{-1}) = (hg^{-1})^{-1}y(hg^{-1}) = y^{(hg^{-1})}$$

$$x^G = \{x^k \mid k \in G\} = \{(y^{(hg^{-1})})^k \mid k \in G\} = \{(k^{-1}gh^{-1})y(h^{-1}gk) \mid$$

$$k \in G\} = \textcircled{*}$$

Ha k szögletes G -n (ahogy meg is van), akkor h, g -től függően $(k^{-1} g h^{-1})$ és $(h^{-1} g k)$ szögletes a csoportokban

$$\Rightarrow \langle y^{\bar{k}} \mid \bar{k} \in G \rangle = y^G$$

$$\Rightarrow x^G = y^G, \text{ ha a metszet nem üres.}$$

4) Tulajdonságok:

- Centralis elemek konjugált osztályai egyeleműek

$$z \in Z(G) \Rightarrow z = z \Rightarrow z^G = \{z\}$$

- Trivialis ^{konjugált} osztály: $\{1\}$ (ez is centralis, ezért egyelemű a konj. oszt. a)

- Kommutatív csoportban (Abel - csoport) minden elem önmaga alkot egy konjugált osztályt

$$- x^1 = x$$

Példák az eddigi fogalmakra:

D_3 -ban

1) D_3 konjugált osztályai:

$$x y = y x \text{ esetén } x^y = x$$

	1	c	c ²	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	1	1	1	1
c	c	c	c	c	c ²	c ²
c ²	c ²	c ²	c ²	c	c	c
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	σ_1	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	σ_3	σ_2	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_3

← az egyelemű konj. osztályai

$$c^{\sigma_1} = \sigma_1^{-1} \cdot c \cdot \sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) = c^2$$

(amikor egy forgatást egy tükrözéssel megkonjugálom, az ellentétes irányú forgatást kapjuk vissza)

$$\Rightarrow 1^G = \{1\} \quad 1 \text{ elemű} \quad c^G = (c^2)^G = \{c, c^2\} \quad 2 \text{ elemű}$$

$$\sigma_1^G = \sigma_2^G = \sigma_3^G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad 3 \text{ elemű}$$

(geometria jelölés: a forgatások, tükrözések és az identitás saját konjugált osztályokba rendezkednek)

a) konjugált osztály elemszáma:

$$|x^G| = [G : C_G(x)] = \text{az elem centralizátorának indexe}$$

osztály ~ csoport rendje

$$b) C_{D_3}(1) = D_3 \quad 6 \text{ elemű, indexe } 1 = 6:6$$

$$C_{D_3}(c) = \{1, c, c^2\} = C_{D_3}(c^2) \quad 3 \text{ elemű, indexe } 2 = 6:3$$

$$C_{D_3}(\sigma_1) = \{1, \sigma_1\}$$

$$C_{D_3}(\sigma_2) = \{1, \sigma_2\}$$

2 elemű, indexe 3 = 6:2

$$C_{D_3}(\sigma_3) = \{1, \sigma_3\}$$

$\Rightarrow$ adott elem konjugált elemosztályának elemszáma megegyezik az elem centralizátorának indexével

c) Egy $\mathcal{N}$ részcsoport akkor normális, ha konjugált osztályok uniója

Biz.: $N \triangleleft G \iff xNx^{-1} = N \quad \forall x \in G$

$$N = x^{-1}Nx = \{h^x \mid h \in N\}$$



$\Rightarrow$ azaz minden elem minden konjugáltja eleme a normális részcsoportnak

pl. $\{1, \sigma_1\}$ nem normális, mert nem tartalmazza $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$ -t és $\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_3$ -t, melyek σ_1 konjugáltjai

d) $Z(G) = 1$ elemű konjugált osztályok uniója

7. ór

Konkrét csoportok tulajdonságai

Permutációk hatáskor

0) D_3 

a csoportok meghatározásánál igazából a ^{csoportok} permutációival dolgozunk

$$\phi: D_3 \rightarrow \text{Sym}(\{1, 2, 3\})$$



homomorfizmus

1) Permutációs hatás (def.):

$\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ az X véges halmaz feletti permutációs hatás G -nek. (A G csoportot egy véges halmaz permutációinak fektetjük meg).

2) Tulajdonságok:

a) Hatás helye = tartóhalmaz (X) eleme

b) $g \in G \quad \phi(g) \in \text{Sym}(X)$

$x \in X$ a tartóhalmaz eleme

$\phi(g): X \rightarrow X$

$(\phi(g))(x)$

$x \mapsto gx$

$\boxed{gx}$ jelölés: $\phi(g)$ hatás (permutáció)

szoros jelölés értelme:

$\phi(gh) = \phi(g) \cdot \phi(h)$

(nem valódi

x -re

szoros!)

$\phi(gh): x \mapsto (gh)x$

$\phi(g) \cdot \phi(h): x \mapsto g(hx)$

} asszociatív

c) Pálya: $x \in X$ pont pályája = $Gx = \{gx \mid g \in G\}$

$Gx \subset X$

(a transzformációkkal kapott lehetséges végpontok)

3) p.



$\psi: D_3 \rightarrow \text{Sym}(\{I, II, III\})$ is permutációs hatás

• csúcsokból kételemű halmazai:

$\{1, 2\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\}$

$\pi: D_3 \rightarrow \text{Sym}(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$ is perm. hatás

↓
 → nem ad új információt, mert:

- a csúspontok képlemei halmazai megfeleltethetők
 ~ kihagyott csúspontoknak
- az oldalak megfeleltethetők melyik végpontjainak

⇒ ekvivalens hatások:

$\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ és $\psi: G \rightarrow \text{Sym}(Y)$ ekvivalens, ha
 $\exists$ olyan $\alpha: X \rightarrow Y$ bijektív leképezés, hogy:

$$\alpha \circ \phi(g) = \psi(g) \circ \alpha \quad \forall g \in G$$

↑
kompozíció

4) Permutációs hatások összege

a) Legyen $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ és $\psi: G \rightarrow \text{Sym}(Y)$ összege, ha $X \cap Y = \emptyset$

$$\phi \oplus \psi: G \rightarrow \text{Sym}(X \cup Y)$$

$$g \in G \quad (\phi \oplus \psi)(g): X \cup Y \rightarrow X \cup Y$$

$$\begin{array}{c} X \qquad Y \\ \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \quad x \mapsto \begin{cases} \phi(g)(x) & x \in X \\ \psi(g)(x) & x \in Y \end{cases}$$

az X és Y halmazokban

külön-külön transformáljuk az elemeket a halmazokon belül

b) Tulajdonságok:

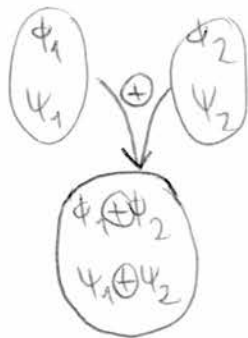
- fokszám összeadódik

- $\phi_1 \cong \psi_1$ és $\phi_2 \cong \psi_2$, akkor $\phi_1 \oplus \phi_2 \cong \psi_1 \oplus \psi_2$
 $\uparrow$
 ekvivalencia

• $\phi \oplus \psi \cong \psi \oplus \phi$

• $\phi_1 \oplus (\phi_2 \oplus \phi_3) \cong (\phi_1 \oplus \phi_2) \oplus \phi_3$

a hatások ekvivalenciaosztályain is értelmez a művelet



I Tetraédres hatás előáll tranzitív hatások összegként, sorrendben eltekintve egyetelműen.

D Tranzitív hatás: csak 1 pályája van

I Véges G csoport esetén csak véges sok inekvivalens tranzitív hatás van $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^m n_i \phi_i$$

↓
multiplicitás

5) Coset-hatások:

a) $H \triangleleft G$ véges indexű részcsoport = $\times$

G/H : H baloldali mellékosztályainak halmaza

= véges halmaz, mert $|G/H| = H$ indexe

Def.

$$\phi_H: G \rightarrow \text{Sym}(G/H) \quad \times H = \{xh \mid h \in H\}$$

$$\phi_H(g): \times H \rightarrow (gx)H$$

részcsoport $\rightarrow$ részcsoport mellékosztályainak halmaza $\rightarrow$ a permutációk
a mellékosztályok halmazán hatnak, is ez értelmes,

Mis:

$$\phi_H(gh) = \phi_H(g) \circ \phi_H(h) \rightarrow \phi_H(g)((hx)H) = (g(hx))H$$

$$\Rightarrow xH \rightarrow \underbrace{(gh)x}_\text{csopotelem} H$$

Valójeg egyik mellékosztályból a másikba megyünk!

b) $\sqsubseteq \phi_H$ Coset-hatás tranzitív permutációs hatás, mis.

$$xH \rightarrow yH$$

$$\phi_H(yx^{-1})$$

(csak egy elem van, amivel beszorozva a másik mellékos.-t $(yH \cdot b)$ kapjuk)

c) Minden tranzitív hatás ekvivalens egy Coset-hatással

Biz.:

Stabilizátor részcsoport: $x \in X \quad G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

az x stabilizátora

-4-

$\hookrightarrow$ (ez a csoportunk részhalmaza $\leftrightarrow$ teljes a tartó részhalmaza)

A stab. részcso. mindig részcsoptja G -nek, mis

$$g, h \in G_x \quad gx = x \quad hx = x \quad (gh)x = g(hx) = gx = x$$

$$x \in X \quad g \in G$$

$$G_{gx} = \{ h \in G \mid h(gx) = gx \} = \{ h \in G \mid g^{-1}(hgx) = g^{-1}(gx) = x \} =$$

↑
az eltranszformált

pont stabilizátora

$$= \{ h \in G \mid (g^{-1}hg)x = x \} =$$

$$= g G_x g^{-1} \quad \text{az } x \text{ stabilizátorának}$$

konjugáltja

$\Rightarrow$ egy tetőz. tranzitív hatás pontjainak stabilizátorai

egymással konjugált részcsoptok, és amely pont

stabilizátorához tartozó Coset - hatás ekvivalens a tranzitív
hatással.

egy-egyértelmű kapcsolat tranzitív hatások és részcsoptok
konjugált osztályai között

b) Cayley-tétel:

minden véges csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

$$\phi_{\{1\}}: G \rightarrow \text{Sym}(G/\{1\})$$

Coset-hatás izomorfizmus

6) Hatalis különböző polinok száma?

a) $\phi = \bigoplus_{i=1}^m n_i \phi_i$, ahol ϕ_i transzitiv hatalis (1 polinál)

polinok száma = $\sum_{i=1}^m n_i \rightarrow$ hgy: átl, ha a multiplicitás nem ismert

b) Cauchy - Frobenius-lemma:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

ahol $\text{Fix}(g) = \{x \in X, gx = x\}$

(lyan x -ek melyeket g önmagába visz le)

$$|\{(g, x) \mid g \in G, x \in X, gx = x\}| = \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid gx = x\}| =$$

Most g -t fixáltuk le,
és x -et öregeztük

$$= \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

x -t fixáljuk le, majd x -re

öregeztük:

$$\sum_{x \in X} |\{g \in G \mid gx = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

$\downarrow$
 x polinok halmaza
 $\downarrow$
 x polinok száma

$$X = \bigcup_{\alpha=1}^r X_{\alpha} \rightarrow \text{hatalis kül. polinok}, \quad G_x = g G_x g^{-1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^r \sum_{x \in X_{\alpha}} |G_x| = \sum_{\alpha=1}^r |X_{\alpha}| \cdot |G_x| = |G| r$$

egy polinok belüli stabilizátorok - 43

$$x \in X_x$$

x - adalék polyn G_x

$$|X_x| = [G:G_x] \quad |G/G_x| = [G:G_x]$$

$\uparrow$
index

Lagrange-tétel miatt:

$$|G| = [G:G_x] |G_x|$$

1) $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ és $\psi: G \rightarrow \text{Sym}(Y)$ hatások sorozata:

a) Def $\phi \otimes \psi: G \rightarrow \text{Sym}(X \times Y)$

$$(\phi \otimes \psi)(g): X \times Y \rightarrow X \times Y$$

$$(x, y) \mapsto (gx, gy)$$

← a két hatás tartóinak
kompozícióján így hat
a sorozathatás

b) tulajdonságok:

- • $\phi_1 \cong \psi_1$ és $\phi_2 \cong \psi_2$, akkor $\phi_1 \otimes \phi_2 \cong \psi_1 \otimes \psi_2$

• $\phi \otimes \psi \cong \psi \otimes \phi$

• $\phi_1 \otimes (\phi_2 \otimes \phi_3) \cong (\phi_1 \otimes \phi_2) \otimes \phi_3$

ekvivalenciaosztályokon is értelmezhető

- abszolút összeadhatóság

c) $\phi_1 \otimes (\phi_2 \oplus \phi_3) \cong (\phi_1 \otimes \phi_2) \oplus (\phi_1 \otimes \phi_3)$

distributív

Burnside - gyűjtő

(Véges csoport $\rightarrow$ transitív hatások $\rightarrow$ trans. hatások ekvivalenciaor-
tályai $\rightarrow$ összeadás és szorzás ekvivalenciaortályokon)

1) hatások ekvivalencia-ortályai összeadással és szorzással
valószínű nem gyűjtő, mert nincs benne zérus elem
(nincs olyan hatás, ami 0 elemre halmazon hat (permutáció))

Véges csoport esetén $\rightarrow$ véges sok transitív hatás van:

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^m n_i \phi_i \quad \psi = \bigoplus_{i=1}^m k_i \phi_i \quad (\phi_i \text{ transitív hatás})$$

$$\phi \otimes \psi = \bigoplus_{i,j=1}^m n_i k_j \underbrace{(\phi_i \otimes \phi_j)}_{\text{és nem feltétlenül transitív}}$$

és is hatás $\rightarrow$ felbontható transitív hatásokra

$$\phi_i \otimes \phi_j = \bigoplus_{l=1}^m N_{ij}^l \phi_l$$

strukturállandók

$$= \bigoplus_{i,j} n_i k_j \bigoplus_l N_{ij}^l \phi_l = \bigoplus_l \left(\sum_{i,j} n_i k_j N_{ij}^l \right) \phi_l$$

(olyan, miáltal a transitív hatások "bázisvektorok" lesznek, amik
 $\forall$ hatás felbontható $\rightarrow$ hatások szorzataiban "bázisvektorok"
szorzatait kell kiszámolni)

8.óra

Representációelmélet

1) $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(\underbrace{X}_{\text{halmaz}})$
 X szimmetria csoportja

Milyen szimmetriái lehetnek egy strukturálisan halmaznak?
 Az elemek felcserélése szimmetria $\Rightarrow$ permutációk ^{szim.} csoportjai
 egy tetsz. halmaznak.

Egy specifikus halmaznak lehetnek egyéb szimmetriái $\rightarrow$ az
 eredeti permutációcsoport egy részcsoportját résziük

$\phi: G \rightarrow \text{Hom}(X)$ X : topologikus tér
 invar. ^{invar.} homomorfizmusok

$\phi: G \rightarrow GL(V)$ V : lineáris tér
 • nem inverz $\rightarrow$ bijektív
 • lineáris operátorok

repr.-elmélet: (szimmetriák)
 Az eredeti csoportot egy absztrakt szimmetriacsoportnak
 feleltetjük meg (homomorfizmus), hogy az absztrakt
 csoportokat vizsgálhassuk. Mik lehetnek ezek a homomor-
 fizmusok?

2) Ábrázoláselmélet

G csoport ábrázolása a V lineáris térben, azaz $\rho: G \rightarrow GL(V)$ homomorfizmust vizsgáljuk (ρ : Darstellung, előállítás).

(azaz a reprezentációk közül csak az operátorokra való leképezéseket tekintjük)

pl. Kvantumelméletben az állapotok lineáris térben alkotnak.

Szimmetria transzformációk lineáris operátorokkal írhatók le.

(unitér vagy antiunitér)

$\rho: G \rightarrow U(\mathcal{H})$: szimmetriacsoport ábrázolódik a Hilbert-térben.
 $\uparrow$
 Hilbert-tér

$$\rho: G \rightarrow GL(V) \quad \rho(1) = \mathbb{1}, \quad \rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$$

(egységelem
= egységpr.)

$$\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1}$$

inverz képe az eredeti elem képeinek inverze

Lineáris tér jellemző a skalárszorzás teste és a dimenziója
 (bázis számossága)!

3) Ekvivalens ábrázolások

a) Matrix ábrázolás: V lineáris tér bázisát $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

azaz kihasználva az operátor felírható mátrixként

$$\text{ábr. ok} \quad \rho(x) \cdot b_i = \sum_j D_{ij}(x) \cdot b_j$$

mátrixokkal való
 $\Rightarrow$ (ábrázolással nem elég megadni az operátorábrázolást leírni,
 az adott V -térben bázist is kell választani!

Bázis csere végrehajtva a V -térben:

$$\{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \{b_1^1, b_2^1, \dots, b_n^1\}$$

$$\exists \text{ olyan } A \in GL(V), \text{ hogy } b_j^1 = A b_j$$

az új bázisban az ábrázolási operátorok mátrixelemei:

$$D'_{ij}(x) = [A^{-1} D(x) A]_{ij} \quad D'(x) = A^{-1} \cdot D(x) \cdot A$$

DE ezek csak formálisan különböző ábrázolások, gyakorlatilag
 a báziscserevel nem kapunk lényegesen új esetet.

$$D'(x) = A^{-1} \cdot D(x) \cdot A \rightarrow D(x), D'(x) \text{ ekvivalens ábrázolások}$$

b) két különböző lineáris tér értelmezett

$$D_1: G \rightarrow GL(V_1) \text{ és } D_2: G \rightarrow GL(V_2) \text{ ábrázolás ekvivalens,}$$

ha $\exists A: V_1 \rightarrow V_2$ invertálható lineáris operátor, hogy

$$A D_1(x) = D_2(x) \cdot A \quad \forall x \in G$$

= Ábrázolásekvivalencia feladata: határozzuk meg a G csoport
 összes ábrázolását ekvivalencia erejéig.

4) Példák ábrázolásra:

1. Definíciós ábrázolás

V lineáris tér feletti $GL(V) \supset G$ részcsoportja esetén

$$D: G \rightarrow GL(V) \\ x \mapsto x$$

2. Permutációs ábrázolás:

$$\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X) \quad \text{permutációs hatás}$$

$$V = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\} \quad D_\phi: G \rightarrow GL(V) \\ x \mapsto D_\phi(x)$$

$$D_\phi(x) \cdot f: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$p \mapsto f(x^{-1}p)$$

egyetlen elem ábrázolása úgy hat egy x -en, hogy az argumentumot eltolásosítja

$$D_\phi(xy) \cdot f: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$p \mapsto f(y^{-1}(x^{-1}p))$$

$\parallel$

$$(D_\phi(x) \circ D_\phi(y))f = D_\phi(x) \cdot \{D_\phi(y)f\} \quad x \mapsto \mathbb{C}$$

$$p \mapsto D_\phi(y)f(x^{-1}p) = f(y^{-1}(x^{-1}p))$$



Állásuk origójuk a háromszög súlypontját.

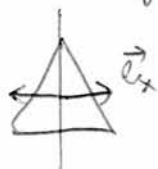
Az így ezzel a választással kétdimenziós lineáris térnek tekinthető, bázisa $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

$$D: D_3 \rightarrow GL(V)$$

$$D(1) = 1$$

$$D(\sigma_1) = \begin{matrix} \vec{e}_x \mapsto -\vec{e}_x \\ \vec{e}_y \mapsto \vec{e}_y \end{matrix}$$

$$D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$D(\sigma_2) = \begin{matrix} \vec{e}_x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \vec{e}_x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \vec{e}_y \\ \vec{e}_y \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_y \end{matrix}$$



$\rightarrow D(\sigma_3)$ hasonló megfontolásokkal, vagy a csoportelemek közötti relációkkal kijön

$$D(c) = \dots$$

matricákkal

$\Rightarrow$ a geometriai transzformációkat leírásához már (lineáris operátorokkal) elegendő le.

5) Alapvető tétel: komplex számtest

($\forall$ polinomnak $\exists$ gyöke és $\forall$ Cauchy-sorozatnak van limite)

6) Ábrándosk direkt összege:

$$D_1: G \rightarrow GL(V_1) \text{ és } D_2: G \rightarrow GL(V_2)$$

$$(D_1 \oplus D_2): G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

ahol $V_1 \oplus V_2 = \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$ rendezett párok halmaza

$$g \mapsto (D_1 \oplus D_2)(g) \quad (D_1 \oplus D_2)(g): V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$$

$$(x, y) \mapsto (D_1(g)x, D_2(g)y)$$

Ha $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis V_1 -nek

és $\{f_1, \dots, f_m\}$ — V_2 -nek,

akkor $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m)\}$ bázis $V_1 \oplus V_2$ -nek.

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

⇒ önmagában vonatkozóan blokkdiagonális ábrázolási mátrix

$$\begin{matrix} (e_1, 0) \\ (e_2, 0) \\ \vdots \\ (e_n, 0) \\ (0, f_1) \\ \vdots \\ (0, f_m) \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right)$$

b) Tulajdonságok:

① Belátható, hogy ha $D_1 \cong D_2$ és $D_3 \cong D_4$, akkor $D_1 \oplus D_3 \cong D_2 \oplus D_4$

② $D_1 \oplus D_2 \cong D_2 \oplus D_1$

③ $D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$

7) Inducibilis ábrázolások

$D: G \rightarrow GL(U)$ $W < V$ lineáris altér

akkor invariáns altér, ha $\forall x \in G$ és $\forall v \in W$ esetén

$$D(x)v \in W.$$

Ábrásolás reducibilis, ha $\exists$ nemtriviális invariáns altér,
elle késo esetben irreducibilis.

(véges esetben ez azt jelenti, hogy reducibilis, ha felírható blokkláng-
nális alakban) $\rightarrow \infty$ esetben ez már nem igaz!

↓

Maschke-tétel: Véges csoport $\forall$ komplex ábrásolása felbontható
irreducibilis ábrásolások direkt összegére, sorrendtől elte-
kintve egyértelműen.

$$D = \bigoplus_{i=1}^r n_i I_i \quad I_1, \dots, I_r : \text{irreducibilis ábrásolások}$$

↓
multiplicitás

↓

az adott ábr. irreducibilis dekompozíciója

$\Rightarrow$ véges csoport esetén ha ismerjük az irreducibilis ábrásolások
ismerjük az összes ábrásolást

(Végtelen Lie-csoportoknál ugyanez az állítás igaz, csak ∞
sok irreducibilisre bontható)

Általános ∞ csoportnál a dekompozícióban szerepel olyan
reducibilis ábr., ami nem bontható fel irreducibilisre
direkt összegre !)

0) (hom.):

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ homomorfizmus

dimenzió, skalárok teste (komplex, valós)

ábrázolások ekvivalenciája

$\rho_1: G \rightarrow GL(V_1)$ és $\rho_2: G \rightarrow GL(V_2)$

$\rho_1 \cong \rho_2$, ha $\exists$ bijektív $A: V_1 \rightarrow V_2$

$$A \rho_1(g) = \rho_2(g) A \quad \forall g \in G$$

megj.:
(duván szöve a bázistranszformációval van mit: ez nem ad új
ábrázolást, csak a mátrix más lesz)

• Maschke-tétel: réses csoport $\nmid$ ábrázolása irreducibilisek
száma "öröge".

• Irreducibilis ábrázolás:

nincs nemtriviális invariáns altér

↑

(egyetlen egy ábrázolóoperátor sem van
ki ből)

↓

ha lenne invariáns altér, akkor kiegészíthetnénk az
értelmezési tartományt erre + újabb ábrázolást kapnánk

• reducibilis dekompozíció:

$$D = \bigoplus_{i=1}^r n_i I_i$$

↑
multiplicitások (egy ined. ár. többször is szerepel)

1) Schur-lemma: Ha $D: G \rightarrow GL(V)$ irreducibilis, és
 $A: V \rightarrow V$ olyan lineáris operátor, amely $\forall$ ábrándási
operátorral felcserél, azaz:

$$AD(g) = D(g)A \quad \forall g \in G$$

akkor A az egységoperátor skalárszorosa, vagyis:

$$A = \lambda \cdot \text{identitás}_V$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

kvantumrendszer szimmetriája: Hamilton-operátorral fel-
cserélhető

(ugyanis időfejlődés a Hamilton-hatáshoz $\rightarrow$ sima, az
időfejlődéssel felcserélhető $\Rightarrow$ Hamiltonnal kommutál
+ skalárszorozhatóság miatt szimmetriák uniterek

$\Rightarrow$ a szimmetriák tehát névbe a Hamiltonna igaz a
Schur-lemma $\rightarrow$ a szimmetriákon a Hamilton $\lambda \cdot I$ lesz,
azaz 1 sajátértéke lesz $\Rightarrow$

a Hilbert - tér 10-s alteri fognak a hullámok -eknek
(sajátállapotok) megfelelni.

projektor áll

2) Projektív ábrázolás (ábr. elm. kritériumok) csak az irreducibilis altereken
kaptunk, nem magukon az
 $D(xy) = \alpha(x, y) D(x) D(y)$ állapotokon, ekkor
konstans más egyéig lehet. $D: G \rightarrow GL(V)$ pedig skalarmód egyéig
ha különbség α -kat választunk, hat. ha az ábrázolás
más komplex nordszám $\Rightarrow$ más ábrázolást kaptunk

α : az ábrázolás kociklus

- Feltételek:

$$\bullet D(1) = id_V \quad y=1 \Rightarrow D(x) = \alpha(x, 1) D(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{normalizációs feltétel} \begin{cases} \alpha(x, 1) = 1 \\ \alpha(1, x) = 1 \end{cases}$$

$$\bullet D(x(yz)) = \alpha(x, yz) D(x) D(yz) = \alpha(x, yz) \alpha(y, z) D(x) D(y) D(z)$$

$$\Downarrow$$

$$D(xy)z = \alpha(xy, z) D(xy) D(z) = \alpha(xy, z) \alpha(x, y) D(x) D(y) D(z)$$

$$\boxed{\alpha(x, yz) \alpha(y, z) = \alpha(xy, z) \alpha(x, y)}$$

kociklus-
egyenlet

- Projektív ábrázolások ekvivalenciája:

$$D_1: G \rightarrow GL(V_1) \quad \alpha_1 \quad \text{és} \quad D_2: G \rightarrow GL(V_2) \quad \alpha_2 \quad \text{kociklussal}$$

ekvivalens, ha $\exists$ bijekció $A: V_1 \rightarrow V_2$, és $\lambda: G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\boxed{\lambda(x) \cdot A D_1(x) = D_2(x) A} \quad \forall x \in G$$

= lényegében átskálázzuk a projektív ábrázoló operátort,
hogy egyikből a másikat megkapjuk

(kvantummechanikában $\rightarrow$ a projektív ^{dr.} olyan, mintha nem normalizáltak le
az állapotokat!)

$\downarrow$
konstans konstans kijönnek

$$D: G \rightarrow GL(V) \quad \text{és} \quad \tilde{D}: G \rightarrow GL(V) \quad \lambda: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \lambda(x) D(x)$$

$$D \equiv \tilde{D}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}(xy) &= \lambda(xy) D(xy) = \lambda(xy) \alpha(x,y) D(x) D(y) = \\ &= \alpha(x,y) \lambda(xy) \frac{\tilde{D}(x)}{\lambda(x)} \cdot \frac{\tilde{D}(y)}{\lambda(y)} \end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}(x,y) = \alpha(x,y) \frac{\lambda(xy)}{\lambda(x)\lambda(y)}$$

kohomológ cociklusok
 $\uparrow$
ezek lényegében nem térnek el egymástól

cociklusok kohomológia osztályai $\hookrightarrow$ projektív ábrázolások

Csoportok fölébe eső kohomológia ontályok
 véges halmazaik alkotnak.

$$M(G) = H^2(G) \quad \text{Schur-multiplikátor}$$

$$\alpha(x, y) \alpha(x, y, z) = \alpha(y, z) \cdot \alpha(x, y, z) \quad (\text{cociklus egyenlet})$$

$$\tilde{\alpha}(x, y) \stackrel{!!}{=} \alpha_1(x, y) \cdot \alpha_2(x, y) : \text{cociklusok pontonkénti szorzata}$$

megint cociklus

↓ művelet a halmazon

Véges ~~Abel~~ - csoport a Schur-multiplikátor

($\Rightarrow$ Schur-multiplikátor $\rightarrow$ Abel-csoport $\rightarrow$ cociklus kohomológia
 ontályai $\rightarrow$ projektív ábrázolások)

- Univerzális fedőcsoport

A G univerzális fedőcsoportja $\hat{G}$, ha

$$\textcircled{1} \text{ Van olyan } N < Z(\hat{G}), \text{ melyre } N \cong H^2(G)$$

↑
centrum

$$\textcircled{2} \hat{G}/N \cong G$$

Ekkor egy-egyértelmű megfeleltetés létezik G projektív
 ábrázolásai és $\hat{G}$ közönséges ábrázolásai között.

$\Rightarrow$ Ha megtalálom az univerzális fedőcsoporthat, akkor nem kell a projektív ábrándozásokkal foglalkozni, csak az un. fedős. ábrándozásaival.

pl. 50 (3): forgáscsoport $SU(2)$ - multiplikációra kételemű, univerzális fedőcsoportja $SU(2)$

($spin < \begin{cases} even: \text{trivi. kociklusokhoz tartozó hom. osztály} \\ odd: \text{nemtrivi. kociklusokhoz tartozó homológia osztály} \end{cases}$)

$\Downarrow$

erőtel a közműveltség ábrándozásokkal fogunk foglalkozni

3) Ábrándozások tenzorozata

Def. Összetett rendűre állapothoz az alrendűreket állapottérreinek tenzorozata.

a) Lineáris tenz. tenzorozata:

V lineáris tér $\mathbb{C}$ felett

lineáris funkcionál : $\phi: V \rightarrow \mathbb{C}$ $\phi(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha \phi(V_1) + \beta \phi(V_2)$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad V_1, V_2 \in V$

lineáris funkcionálok tenz. a V duálisa.

V^* : V duálisa

$$(V^*)^* = V \quad x \in V \quad \tau_x: V^* \rightarrow \mathbb{C} \\ \phi \mapsto \phi(x)$$

Dualis tér: $D^V(g): \phi: V \rightarrow \mathbb{C} \quad D^V(g): V^* \rightarrow V^*$
 $x \mapsto \phi(D(g)^{-1}x)$

$D^V: G \rightarrow GL(V^*)$ homomorfizmus

duális (kontragradiens) albranda

(pl. vektorkalák antivektorkalák $\rightarrow$ duális albranda)

b) Bilineáris funkcionálal

$\beta: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ leképezések:

$$\beta(\lambda v_1 + \mu v_2, v_3) = \lambda \cdot \beta(v_1, v_3) + \mu \beta(v_2, v_3)$$

$\Rightarrow B(V_1, V_2)$ lineáris tér.

c) $V_1 \otimes V_2 = B(V_1, V_2)^*$ tenzoralk

V_1 bázisa $\{e_1, \dots, e_m\}$

V_2 bázisa $\{f_1, \dots, f_n\}$

$e_i \otimes f_j: B(V_1, V_2) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\beta \mapsto \beta(e_i, f_j)$$

$\Rightarrow e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2$

bázist alkotják a
tenzoralknak

- $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$

- ha $\rho_1: G \rightarrow GL(V_1)$ és $\rho_2: G \rightarrow GL(V_2)$ ábrázolások

akkor:

$$\rho_1 \otimes \rho_2: G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

legyen $\{e_i\}$ mint

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) \cdot e_i \otimes f_j \mapsto \rho_1(g) \cdot e_i \otimes \rho_2(g) \cdot f_j$$

- Tenszorokommutatív és asszociatív, és distributív

~ direkt összege.

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \cong \rho_2 \otimes \rho_1$$

(fizikában ez nem mindenhol teljesül pl. ha nem bozonokat vagy fermionokat, hanem egzotikus gázcsoportokat nézünk)

10.óra

(A köciklus fontos fizikai jellemző)

Tensorszorzat

1) $D_1: G \rightarrow GL(V_1)$ $D_2: G \rightarrow GL(V_2)$

$D_1 \otimes D_2: G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$\begin{matrix} \text{bázis} \\ \uparrow \\ e_i \otimes f_j \in V_1 \otimes V_2 \end{matrix}$

$\beta \mapsto \beta(e_i, f_j)$

$(D_1 \otimes D_2)(g): e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g)e_i \otimes D_2(g)f_j$ bilineáris funkcionál

$\left[(D_1 \otimes D_2)(g) \right]_{e_i \otimes f_j}^{\alpha \otimes \beta} = \left[D_1(g) \right]_i^\alpha \cdot \left[D_2(g) \right]_j^\beta$ matricák Kronecker-szorosa

(matricelemek kiszámítása)

2) Tensorszorzat műveleti tulajdonságai:

a) $D_1 \otimes D_2 \cong D_2 \otimes D_1$

$D_1 \otimes (D_2 \otimes D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \otimes D_3$

$1 \otimes D \cong D \otimes 1 \cong D$ ahol $1: g \mapsto 1$

(egységelemes: $\forall$ csoportelemek)

$D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) \cong (D_1 \otimes D_2) \oplus (D_1 \otimes D_3)$ 1-et rendel)

b) $D_1 = \bigoplus_i n_i I_i \rightarrow$ irreducibilis ábrák (I_i)

$D_2 = \bigoplus_i m_i I_i$

$D_1 \otimes D_2 = \bigoplus_{i,j} n_i m_j I_i \otimes I_j \Rightarrow$ elég $(I_i \otimes I_j)$ -ket ismerem

$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}^k I_k$ mivel $I_i \otimes I_j$ is ábrák $\rightarrow$ ined-en dekomponálható

N_{ij}^k : k -edik együtthatók

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}^k I_k \quad : \text{kirish szabaly}$$

Clebsch-Gordan-sor

Adott csoport ábrázolásainak ekvivalencia - osztályai
 direkt összeg és tenzor szorzat műveleteivel k -edik
 gyűrű (permutációs hatásoknál hasonló fogalom volt -
 Burnside-gyűrű)

3) ^{pl.} $\rho: G \rightarrow GL(V)$ ábrázolás $\rho \otimes \rho: G \rightarrow GL(V \otimes V)$

általában reducibilis

$$\tau: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

$$e_i \otimes e_j \mapsto e_j \otimes e_i$$

felcserélő operátor

$$\tau^2 = \text{id}_{V \otimes V}$$

lehetőséges sajátértékek: ± 1

$$V \otimes V = \mathcal{S}^2 V \oplus \mathcal{A}^2 V$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \tau \rightsquigarrow \text{e.} +1 & & \tau \rightsquigarrow \text{e.} -1 \end{array}$$

V szimmetrikus antiszim.
 négyzet négyzet

(szim. operátorok) (antiszim. $n-k$)

(sajátértékek $\rightarrow$ egyik saját-
 értékben az egyik, másikon
 a másik sajátértékkel
 hat az $n-k$.)

$$(D \otimes D)(g) \circ \tau: e_i \otimes e_j \mapsto D(g)e_j \otimes D(g)e_i$$

$$\tau \circ (D \otimes D)(g): e_i \otimes e_j \mapsto D(g)e_j \otimes D(g)e_i$$

$\Rightarrow$ ha önmagával képezem az α ábrázolás $\otimes$ -át, $\exists \tau$:

τ felcserél $\forall$ ábrázolási operátorral

$\Rightarrow \tau \nmid$ vektorokból $(D \otimes D)(g)$ ugyanolyan vektortérbe viszi

$\Rightarrow (D: G \rightarrow GL \text{ ábrázolás}) \quad S^2 V$ és $\Lambda^2 V$ invariáns altere $D \otimes D$ -nek.

$(D \otimes D)(g)$ megszorítva az értelmezési tartomány $S^2 V$ -re egy $S^2 V \rightarrow S^2 V$ operátort kapunk.

Ezáltal egy ábrázolást kaptuk G -nek: $S^2 D: G \rightarrow GL(S^2 V)$
(nimm. négyzet ábrázolás).

hasonlóan: $\Lambda^2 D$ is ábrázolás

$$\Rightarrow D \otimes D = S^2 D \oplus \Lambda^2 D \quad D \otimes D \text{ reducibilis}$$

fiz. alkalmazás:

- ① Pauli-elv: 2 megkülönböztethetetlen alrendszerből álló rendszer Hilbert-tér az egyes alrendszerek téreinek (anti-) szimmetrikus négyzete.

 $\downarrow$
 boszrok

 $\downarrow$
 fermionok

(csak az (anti) szimmetrikus hullámf. -eket kell venni
a kisebb csoportból)

2. $H < G$ részcsop. , $D: G \rightarrow GL(V)$
 $D_H: H \rightarrow GL(V)$

$\uparrow \quad x \mapsto D(x)$

leábrázolás, megszámlálás
(a feltételtelekkel)

Megszámlálás tulajdonságai:

① $K < H < G$

transitivitás

$(D_H)_K = D_K$

$\uparrow$
a közbeeső lépés kihagyható
(egyképpen K -m is normalizálható)

② $(D_1 \otimes D_2)_H = (D_1)_H \otimes (D_2)_H$

$(D_1 \oplus D_2)_H = (D_1)_H \oplus (D_2)_H$

$\Rightarrow D = \bigoplus_i n_i I_i$

$D_H = \bigoplus_i n_i (I_i)_H$

$(I_i)_H = \bigoplus_{\alpha} B_{i\alpha}^{\alpha} E_{\alpha}$ ahol E_{α} -k a H részcsop. irreducibilis
 $\downarrow$ leábrázolásai
multiplicitások

(ined.)
leábrázolási szabályok: a nagy csoport V leábrázolásának megszámlálása
a részcsop. a részcsop. irreducibilis leábrázolásaitól tevődik össze.
- 64 -

Invariánselmélet alaptétele:

Ha G egy végren generált csoport, akkor pontosan akkor

van $\exists G$ eleminek olyan végességhalmaza, hogy

a G csoport alt n dimenziós $D_1: G \rightarrow GL(V_1)$ és $D_2: GL(V_2)$

ábrázolása akkor és csak akkor ekvivalens, ha

$$\text{Tr } D_1(g) = \text{Tr } D_2(g)$$

$$\forall g \in G$$

Ha G véges, akkor két ábrázolás ekvivalencia eppen az

ábrázolási operátorok spúri megegyeznek. (!!!)

Ábrázolási karakter

$$1) \quad \begin{array}{ll} D: G \rightarrow GL(V) & \chi_D: G \rightarrow \mathbb{C} \sim \\ g \mapsto D(g) & g \mapsto \text{Tr } D(g) \end{array}$$

$\Rightarrow$ Két ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens, ha karakterik megegyeznek.

$$2) \quad D_1: G \rightarrow GL(V_1) \text{ és } D_2: G \rightarrow GL(V_2)$$

$$\text{Tr } (D_1 \oplus D_2)g = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} V_1 \oplus V_2 = \tau$$

$$\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} \quad (\sim \text{karakterek összeadódnak})$$

$$\bullet (D_1 \otimes D_2)(g): e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g) e_i \otimes D_2(g) f_j$$

$$\sum_{\alpha} (D_1(g))_{i\alpha} e_{\alpha} \otimes \sum_{\beta} (D_2(g))_{j\beta} f_{\beta}$$

$$\sum_{\alpha, \beta} (D_1(g))_{i\alpha} (D_2(g))_{j\beta} e_{\alpha} \otimes f_{\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(D_1 \otimes D_2)(g) = \sum_{i,j} (D_1(g))_{ii} (D_2(g))_{jj} = \text{Tr} D_1(g) \cdot \text{Tr} D_2(g)$$

$$X_0^*(g) = X_0(g^{-1})$$

$$\bullet X_{(H)} = (X_0)_H \leftarrow X_0^{-t}, \text{ mint kv. } -t \text{ megszorítom } H\text{-ra}$$

3) Ábrázolási karakterek tulajdonságai

① $X_0(1) = \text{Tr } D(1) = \dim D \rightarrow$ pozitív egész lehet csak

② $\underline{X_0(g^h)} = \text{Tr } D(h^{-1}gh) = \text{Tr} \{ D(h^{-1}) D(g) D(h) \} = \text{Tr}(D(g) D(h) D(h^{-1})) =$
 $= \text{Tr } D(g) = \underline{X_0(g)}$

$g, h \in G \Rightarrow$ konjugált elemek a karakter meggyesik!

! Ábrázolási karakter osztályok, egymással konjugált elemek azonos értéket vesz fel.

③ Véges csoport esetén $X_0(g^{-1}) = X_0(g)^*$

hisz $\exists$ olyan N egész, hogy $g^N = 1 \Rightarrow D(g^N) = \text{id}$
 $\parallel D(g)^N$

$D(g)$ ábrázolási operátor sajátértékei N -edik ~~egy~~ egységiek.

$\Rightarrow D(g^{-1})$ sajátértékei ezeknek a komplex konjugáltjai.

$$\Downarrow$$

$$(4) |\chi_0(g)| \leq \dim D$$

10. óra

Karaktertábla

0) adott elemre:

$$D = \bigoplus_i n_i I_i \quad (\text{ired. dekompozíció}) \quad \begin{matrix} \text{ired} \\ (i \rightarrow \text{ábrázolás}) \end{matrix}$$

$\Downarrow$ (2. előző óra $\rightarrow$ karakterek összeadódnak)

$$\chi_D = \sum_i n_i \chi_i$$

$\Rightarrow$ a karakterek lényeges információkat hordoznak

1) Karaktertábla:

	$\{1\}$ $\swarrow$ est. máskis	C_2	$\dots$	C_r $\swarrow$ konjugált elemosztályok $\rightarrow$ a karakterek megegyeznek 1 osztályon kívül
1	1	1	$\dots$	1
I_2	$\vdots$			
$\vdots$	$\dim I_i$	$\chi_i(C_j)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$		
I_r		$i.$ ábr. karakter értéke a $j.$ osztályon		

konjugált osztályok száma = irreducibilis ábrázolások száma

(lásd. első kérdés)

1. sor $\rightarrow 1$ (egységábr. spura)

1. oszlop $\rightarrow \dim I_i$, mert az egységábr. $\forall$ egységábr. ábr. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Sp} = \dim I_i$$

pl. D_3 karaktertáblája

	$\{1\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{c, c^{-1}\}$
$\frac{1}{1}$	1	1	1
$\frac{1}{1^*}$	1	-1	1
$\frac{2}{2}$	2	0	-1
	(6)	(2)	(3)

itt. ha
az ábr. ábr. ábr.
a dimenziókat
jelöljük, ha

több azonos dim. van $\rightarrow$ jelek (*)

+ ábr. ábr. $\rightarrow$ nem számok

↑
mértékszámok

itt. ha nem egész, és nem is
valószínű a karakterek

abszolútérték²

↓

mértékszámok $\times$ konjugált

ostály száma = csoport rendje!

$$\sum_i |X_i(c_j)|^2 \cdot |c_j| = |G|$$

↓
nem
lym, mint a normált
vektorok lennének

- ha az oszlopokat vektorok tekintjük, és vesszük a skalár
szorzatukat $\Rightarrow 0$ -t kapunk (magic módon).

miel:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{első ort. reláció miatt})$$

$\Rightarrow$ irreducibilis ábrák karakterei ortogonális bázis alkotnak az osztályf.-ek tén.

$\Rightarrow$ tets. osztályf. kifejtése irred. ábr.-k karakterivel (linearkomb.)

d) Burnside-tétel:

$$\sum_i |X_i(1)|^2 = |G| \quad \leftarrow \text{másként ortogonalitást alkalmazva az első oszlopra}$$

$$\text{Ugyanakkor: } \boxed{\sum_i (\dim I_i)^2 = \sum_i |X_i(1)|^2 = |G|}$$

Burnside-tétel

3) Reducibilis ábrák irreducibilis dekompozíciója:

$$a) D = \bigoplus_i n_i I_i \quad X_0 = \sum_i n_i X_i$$

$$\langle X_0, X_j \rangle = \sum_i n_i \langle X_i, X_j \rangle = n_j$$

$\uparrow$

a bázison való kifejtés együtthatói

b) Típus mátrixok számolása:

$$I_i \otimes I_j = \bigoplus_k N_{ij}^k I_k$$

$$X_{I_i \otimes I_j} = X_i X_j = \sum_k N_{ij}^k X_k$$

$$\underline{\underline{\langle X_i X_j X_k \rangle = \langle \sum_l N_{ij}^l X_l X_k \rangle = \sum_l N_{ij}^l \langle X_l X_k \rangle = \underline{\underline{N_{ij}^k}}}}$$

a csoport karakteriből kiszámíthatóak a lineáris (Clebsch-Gordan) együtthatók.

4) Elágazási szabályok:

$$\begin{array}{ccc} H < G & G \text{ irreducibilisei } \{I_1, \dots, I_r\} \\ \uparrow \text{ részcsoporth} & H & \text{---} \{E_1, \dots, E_q\} \end{array}$$

$$(I_i)_H = \bigoplus_{\alpha} B_i^{\alpha} E_{\alpha}$$

$$(X_i)_H = \sum_{\alpha} B_i^{\alpha} X_{E_{\alpha}}$$

$\text{Tr } I_i(x) \rightarrow$ meghatározzuk a karakter értékesítését az adott részcsoporthon

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ = \langle (X_i)_H, X_{E_{\beta}} \rangle = \sum_{\alpha} B_i^{\alpha} \underbrace{\langle X_{E_{\alpha}}, X_{E_{\beta}} \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = \underline{\underline{B_i^{\beta}}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} X_i(x) \overline{X(x)}_{E_{\beta}}}}}$$

5) Szimmetrizált négyzetek:

$$D \otimes D = S^2 D \oplus \Lambda^2 D \quad \text{szim. és antiszim. szorzások}$$

$$\begin{array}{l} g \text{ csoportelemre} \\ X_{D \otimes D} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} \right) = X_D^2(g) \Rightarrow \begin{array}{l} X_{S^2 D} = \frac{1}{2} (X_D^2(g) + X_D(g^2)) \quad \text{így lesz csak szim.} \\ X_{\Lambda^2 D} = \frac{1}{2} (X_D^2(g) - X_D(g^2)) \end{array} \end{array}$$

6) Ábrándási operátorok mátrixelemei általában komplex számok.

→ Milyen tudunk olyan látszólagos bizonyítani, hogy minden mátrixelem valóban legyen?

- Való ábrándás: minden ábrándási operátor minden mátrixelemre való

↓
• Szükséges felt.:

Való ábrándás karaktere csak való értékkel vehet fel.

Ez nem elégséges felt.

• Irreducibilis ábrándások esetén:

$$D \otimes D^* = \bigoplus_i \lambda_i I_i$$

$$X_{D \otimes D^*}(g) = X_D(g) X_{D^*}(g) = |X_D(g)|^2$$

$$\langle X_{D \otimes D^*}, X_1 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |X_D(x)|^2 = \langle X_D, X_D \rangle = 1 \Rightarrow X_{D \otimes D^*}$$

Itt. X_D való értékű:

X_1

tartalmazza

X_1 -et (1

$$\text{Ekkor } X_{D^*} = \overline{X_D} = X_D \Rightarrow D^* \cong D \text{ (ekvivalencia)}$$

egyértékűséggel)

$\Rightarrow$ Ha X_D való értékű irred. ábr. esetén, akkor $D^* \cong D \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_{D \otimes D} = |X_D(g)|^2 \Rightarrow \langle X_{D \otimes D}, X_1 \rangle = 1$$

$\Rightarrow D \otimes D$ tartalmazza az egységábrándást, és ez vagy $5^2 D$ -ben, vagy $1^2 D$ -ben fordul elő. $\Downarrow$

0 akkor valós, ha $\sum^2 0$ tartalmassa 1-et

Ellenkező esetben 0 pseudo-valós.

- Valós
 - Pseudo-valós
 - Komplex
- } lehet egy állr.

↓

Frobenius - Schur - indikátor

$$\gamma_i = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in G} \chi_i(x^2) = \begin{cases} +1 & \rightarrow \text{valós} \\ -1 & \rightarrow \text{pseudo-valós} \\ 0 & \rightarrow \text{komplex} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{az állr.} \end{array} \right.$$

$$\langle \chi_{\sum^2 0}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in G} \left\{ \frac{1}{2} \chi_0(x)^2 + \chi_0(x^2) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{x \in G} \chi_0 \cdot \overline{\chi_0^*}(x) + \frac{1}{2|G|} \sum_{x \in G} \chi_0(x^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma_0$$

$$\frac{1}{2} \langle \chi_0, \chi_{\sum^2} \rangle = \frac{1}{2}$$

ha χ_0 valós $\rightarrow$ ha 0 valós, akkor $\sum^2 0$ tartalmassa 1-et $\Rightarrow$

$$\langle \chi_{\sum^2 0}, \chi_1 \rangle = 1 \text{ kell legyen} \Rightarrow \gamma_0 = 1$$

$\rightarrow$ ha 0 pseudo-valós, akkor $\sum^2 0$ nem tartalmassa

1-et ($\sum^2 0$ tartalmassa) $\Rightarrow \langle \chi_{\sum^2 0}, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow \gamma_0 = -1$

11. óra

Lie - csoportok

1) Kontinuum "elemű" csoportok $\rightarrow$ nem tudjuk felsorolni az elemeket
DE megfigyelhetjük "hogy" a valós számhalmaz elemeinek $\rightarrow$
paraméterezés (lehet több paraméter is).

$\Rightarrow G$ kontinuum számosságú csoport

$g \in G$ véges számú valós paraméterrel jellemezhető $(\rightarrow$ értéket
vektorokba íratjuk)

$\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ $g(\vec{\alpha})$: $\vec{\alpha}$ -hoz tartozó csoportelem
paramétervektor

$$\begin{aligned} g(\vec{\alpha}) \cdot g(\vec{\beta}) &= g(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) & \Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g(\vec{\alpha})^{-1} &= g(\Psi(\vec{\alpha})) & \Psi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mindkét} \\ \text{vektorok-ek} \\ \text{ijének le a} \\ \text{csoportműveleteket} \end{array} \right.$$

- Asszociativitás: $(g(\vec{\alpha}) \cdot g(\vec{\beta})) \cdot g(\vec{\gamma}) = g(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) \cdot g(\vec{\gamma}) =$
 $= g(\Phi(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \vec{\gamma}))$

és $g(\vec{\alpha})(g(\vec{\beta}) \cdot g(\vec{\gamma})) = g(\Phi(\vec{\alpha}, \Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma})))$

$\Rightarrow \Phi(\vec{\alpha}, \Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma})) = \Phi(\Phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \vec{\gamma})$

- A paraméterek nem adottak, általában mi választjuk a
paraméterezést $\Rightarrow$ szokásos választás: $\boxed{g(\vec{0}) = 1}$

akkor $\Phi(\vec{\alpha}, \Psi(\vec{\alpha})) = \vec{0}$

↓

innen^{!!} Φ és Ψ már nem tetszőleges fv.-ek

- 2) A folytonos csoportoknál ilyen tulajdonságok is vizsgálhatók, mint a folytonosság Φ, Ψ -re, vagy a differenciálhatóság.

↓ Lie-csoport:

Mind Φ , mind Ψ konvergens Taylor-sorba fejthető $\vec{0}$ körül.

Elegendes feltétel, hogy folytonos második deriváltak létezzenek.

3) Példák:

1. Vektorsíkok összege: $(\mathbb{R}, +)$ vektorsíkok additív csoportja.

• $g(\alpha) = \alpha$ $g(\alpha) g(\beta) = g(\alpha + \beta)$

• $g(\alpha)^{-1} = -\alpha =$ $\Phi(\alpha, \beta) \stackrel{\downarrow}{=} \alpha + \beta$

$= g(\alpha) \Rightarrow \Psi(\alpha) = -\alpha$

- kommutatív Lie-csoport, egydimenziós

Csoport dimenziója: a csoportelemek megkülönböztethetőségéhez szükség paraméterek minimális száma.

2. $U(1) = 1 \times 1$ -es unitér mátrixok

→ egységnyi abszolútértékű komplex számok multiplikatív csoportja

$$g(\alpha) = e^{i\alpha} \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$g(\alpha)g(\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = g(\alpha+\beta) \quad \mathbb{F}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

$$g(\alpha)^{-1} = e^{-i\alpha} = g(-\alpha) \quad \Psi(\alpha) = -\alpha$$

A leképezések ugyanazok, de a 2 csoport nem izomorf,
(mint $(\mathbb{R}, +)$ -nél)

mert $U(1)$ paramétertartománya véges!

$\Rightarrow$ 1 dimenziós Lie-csoport, lokálisan izomorf $(\mathbb{R}, +)$ -nal,
de nem izomorf vele.

4) Eddig a csoportelemeket egy n dimenziós geometriai (euklideszi) objektum pontjainak feleltettük meg.

Topológiai tulajdonságok

1. kompaktság: (minden nyílt lefedésből kiválasztható egy
véges lefedés)

euklideszi térben egy halmaz akkor kompakt, ha korlátos
és zárt

$\Rightarrow U(1)$ kompakt, $(\mathbb{R}, +)$ nem kompakt

2. összefüggőség: bármely két csoportelem "összeköthető" folytonos
görével (pl. $U(1)$, $(\mathbb{R}, +)$ összefüggők).

3) Példák (folyt.)

3. $O(3)$ 3×3 -as szimmetrikus mátrixok

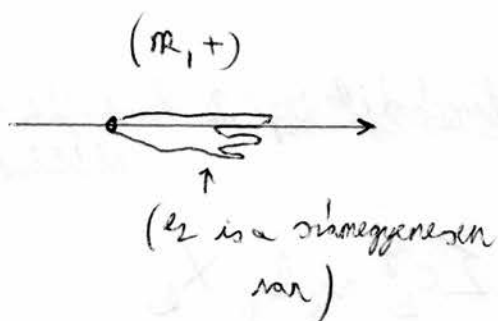
$$O O^T = \mathbb{1} \quad \det O = \pm 1$$

nem össefüggő

4) Top. tulajdonságok

3. Egyszerű össefüggőség:

Csoporthoz definiált minden zárt görbe folytonosan összeküldhető.



5) Kanonikus paraméterezés:

1. áll.: Tetel. Lie-csoportban létezik olyan paraméterezés, amelyre

$$\Psi(-\vec{\alpha}) = -\vec{\alpha}$$

strukturállandók

$$\Phi_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \alpha_i + \beta_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k} C_i^{jk} \alpha_j \beta_k + \text{magasabb rendű tagok}$$

(ez nev. kanonikus paraméterezésnek)

2. áll.: Magasabb rendű tagokat meghatározva a koordinátikus tag.

$\Rightarrow$ a legegyszerűbb struktúraállandókon van (lineáris tagok triviálisak)

Struktúraállandók a lokális izomorfia-értékű jellemzők.
Milyen tulajdonságokat kell teljesíteniük?

1. $C_{ij} + C_{ji} = 0$ antiszimmetria

Lie-algebra:

Legyen $X_1, \dots, X_n$ egy bázis $\mathbb{R}^n$ -nek

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k$$

(2 bázisvektorhoz hozzárendeljük a többi bázisvektor lin. komb.-ját adott együtthatókkal)

$\hookrightarrow$ Például:

$$A = \sum_i a_i X_i \quad B = \sum_i b_i X_i \quad \underbrace{[A, B]}_{\text{kommutátor}} = \sum_k C_{ij}^k a_i b_j X_k$$

kommutátor művelet tulajdonságai: Lie-egyes Lie-algebrák

① $[A, B] = -[B, A]$ antiszimmetria

② $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ Jacobi-azonosság

$\Rightarrow$ Tetrislevegő antiszimmetrikus és Jacobi-azonosságot teljesítő kommutátor-művelet egy Lie-egyes struktúra-állandókat adja.

Lie-egyes Lie-algebrák jellemzői a Lie-egyes lokális izomorfia-tulajdonságait $\Rightarrow$ lokális a Lie-algebrák leírása a Lie-egyes.

⇒ Lokális helyzet vizsgálata lineáris algebrai eszközökkel

A forgáscsoport (Lie-csoportok alkalmazása)

Adott térbeli pont körüli forgatás

Forgatás, mint lineáris koordináta-transzformáció:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathcal{Q} \mathcal{Q}^T = \mathbb{1} \quad \text{ortogonális} \\ \text{(skalárszorosatlantó)}$$

$$\text{és } \det \mathcal{Q} = 1$$

⇒ forgáscsoport: 50 (3) csoport egy elemének feleltethető meg,
ugyanis jellemezhető 3 rögzített koordinátával (pl. Euler-szögek;
a középponton átmenő tengely (2 rögzített paraméter) körüli forgatás (+1
rögzített szögpar.)

• kompakt, összefüggő három dimenziós Lie-csoport

•  → forgástengely 2 félé rögzítéssel (az egyéghörön két ponttal) is kijelölhető → ezeket ekvivalenciáknak kell lenniük

⇓

nem egyszerűen összefüggő ⇒ tenzor és spinor reprezentációk

(megmutatható, hogy ha egy csoport egyszerűen összefüggő ⇒ nincs
triviális körcikk, és ha nem — II — ⇒ van

— II —

)

a Lie-algebra is egy 3 dim. lin. tér lesz (a paramétereket
3D térben vesszük)

$\Downarrow$

$\mathbb{R}^3$

és fogáscsoportra specializálunk

$$\boxed{[A, B] = A \times B}$$

$\downarrow$

ahon a lokális izomorfia megtalálunk két lokálisan izomorf csoport

lehetik: $SO(3)$ és $SU(2)$

$\uparrow$

Pauli-mátrixok Lie-algebraja

(ez megegyezik a kétféle Lie-algebrával)