ELŐADÁS

- Atomfizika (atomfizika. ecte. hu / atomkvantum)
  1, atomok felfedezése, atommodellek
  2, atomosság makroszkopikus jelenségekben
  3, atomok energiaszintjei
  4, impulzusmomentum, spin
  5, elektromágneses tér részecsketermészete
  6, anyaghullámok
  7, H-atom energiaszintjei
- Kvantumfizika
  8-9, Részecske-hullám dualitás
  10-11, Schrödinger-egyenlet elemi tulajdonságai + megoldásai
  12-13, Azonos részecskék kvantumfizikája (összefont állapotok)
- Vizsga: 2+2 számolós feladat / 4+4 elvi kérdés } 100 perc, írásbeli
  - min 10% → else új vizsga (de elégséges csak 25-30%-tól)
  - megajánlott jegy → el lehet fogadni
  - javító vizsga: szóbeli
  - december 21-én Pesz
    január 6-án „új" vizsga (bárki újraírhatja)
    ↕ szóbeliek
  - január 28 UV (írásbeli)

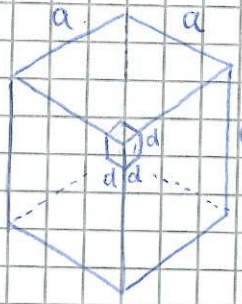
Atomok felfedezése

- 1789, Lavoisier - anyagmegmaradás kémiai reakciókban
- 1799, Proust - állandó arányok törvénye reakciókban
- 1804, Dalton - többszörös állandó arányok törvénye (atomok elképzelésének ötlete)
  ↳ adott arányú anyagok reagálnak egymással
- 1811, Avogadro - azonos nyomású, hőmérsékletű, térfogatú gáz ugyanannyi anyagmennyiség van

- 1827, Brown-mozgás → nem élet
  → nem csillapodik, időfüggetlen
  → véletlenszerű
  → nem függ a folyadék anyagától (csak viszkozitástól)
- 1834, Faraday → elektrolízis
  → adott áram ~ adott anyagkiválás

◦ atomok mérete

- becslés: víz → $L_f = 2260 \frac{kJ}{kg}$
  ↳ felületi feszültség → $72\ mJ/m^2 = \gamma$



→ felmelegítjük molekula nagyságú kis kockákra

$$\frac{a^3}{d^3} 6d^2 \cdot \gamma = L \cdot a^3 \cdot \rho$$

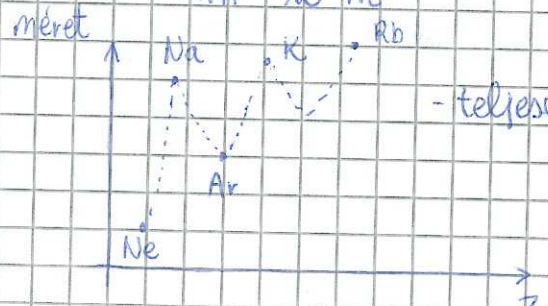
$\frac{a^3}{d^3}$ db, ennyi cella van a felületen

$$\frac{6\gamma}{L\rho} = d$$

↳ $d \hat{=} 1{,}9 \cdot 10^{-10}\ m$

- atomok mérete valóban 10^{-10} m nagyságrendbe esik

$$1\,\text{Å} = 10^{-10}\ m$$

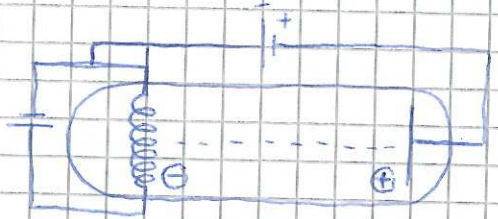


- teljesen kaotikus, ∅ d ~ Z arány!

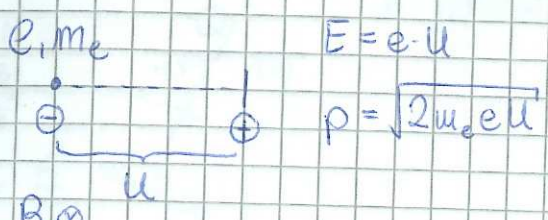
→ H-re: $r_{Bohr} = 0{,}511$ Å

◦ Elektronok felfedezése

- katódsugárcső → katódsugárzás (fémből kilépő e⁻-ok igazolása)



- részecskék elektromos töltést hordoznak → B eltéríti
- töltés/tömeg arányát határták meg rajta



$E = e \cdot U$

$p = \sqrt{2 m_e e U}$

R sugarú pályára áll

$$R = \frac{p}{eB} = \frac{\sqrt{2Ue}}{B} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{e}}$$

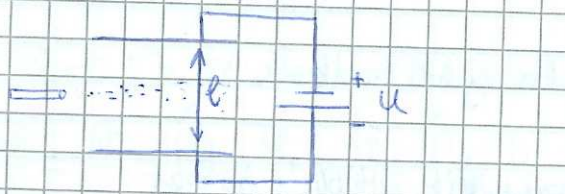
mérhető ezt megkapjuk

- Millikan kísérlet (1913)

→ „$e = 1{,}59 \cdot 10^{-19}\,C$" ezt mérte

→ $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C$ a valós érték, ma

- porlasztóval nagyon kicsi olajcseppeket állított elő



1, $U = 0$

$m = \frac{4}{3} R^3 \pi \varrho$

$F_g = \frac{4}{3} R^3 \pi \varrho g \downarrow \quad F_S = 6\pi v R \cdot \eta \uparrow$ (apparat beáll az egyensúlyi sebesség

$\frac{4}{3} R^3 \pi \varrho g = 6\pi v R \cdot \eta$

végeredményben a levegő viszkozitása volt rossz

2, $U \neq 0$

$F_e = \frac{eU}{\ell} \quad F_g = \frac{4}{3} R^3 \pi \varrho g \quad F_S = 6\pi v' R \eta$

$F_e = F_g + F_S$

→ találat jellemző időtartamokat arra, hogy mennyi idő alatt csapódnak bele a kondenzátor lapjába

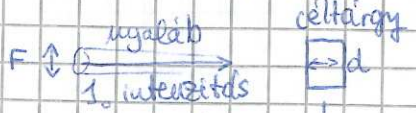
$$q = \frac{\ell}{U}\left(\frac{4}{3} R^3 \pi \varrho g + 6\pi \eta R v'\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{v \eta}{\varrho \cdot g}}$$

⇒ kijött, hogy a töltések valamilyen kis töltésegységek az egész számú többszöröse

Rutherford-kísérlet

→ hatáskeresztmetszet



$[I_0] = \frac{1}{s}$ $\quad [n] = \frac{1}{m^3}$ (szórócentrum/m^3)

ezek mik? → függ a szórás fajtájától

β: események gyakorisága $[\beta] = \frac{1}{s}$ (esemény/s)

pl. adott detektor által érzékelt részecske

vékony céltárgy: $\beta = I_0 \cdot n \cdot d \cdot \sigma$

folyamathoz tartozó hatáskeresztmetszet, $[\sigma] = m^2$

$$\beta = \frac{I_0}{F} \cdot \overbrace{F \cdot d \cdot n}^{N_{szóró}} \cdot \sigma$$

V

$\frac{I_0}{F} = \Phi$, fluxus az a térfogat, amivel a ugalab érintkezik

$$\boxed{\beta = \Phi \cdot N_{szóró} \cdot \sigma}$$

↳ folyamathoz hozzárendelt „céltábla", ha ezt eltaláljuk, akkor végbemegy a folyamat

- legyen egy db szórócentrum



detektor térszögelemei: $\frac{A}{D^2} = \Delta\Omega$

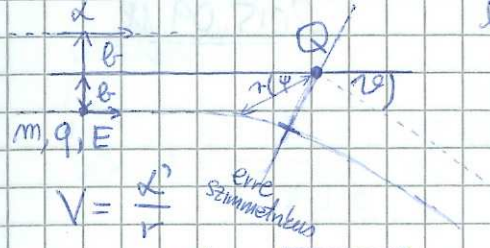
detektorba-szórás: $\sigma_d = \Delta\Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta, \varphi)$

differenciális szórási hatáskeresztmetszet



atommag (α részecskét az elektronok Ø nagyon zavarják)

- amíg el nem ér ⇒ olyan, mintha csak a középpontba ütődik a töltés



b: ütközési paraméter

$$V = \frac{\alpha'}{r}$$

$$J = m r^2 \dot{\varphi} = \sqrt{2 m E'} \cdot b$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha'}{r}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2E'}{m}} \frac{b}{r^2}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2\alpha'}{m}\frac{1}{r} - \frac{2E}{m}\frac{b^2}{r^2}} = \quad \left(\text{legyen } \gamma = \frac{\alpha'}{2E}\frac{1}{b}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2E'}{m}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - 2\gamma\frac{b}{r}}$$

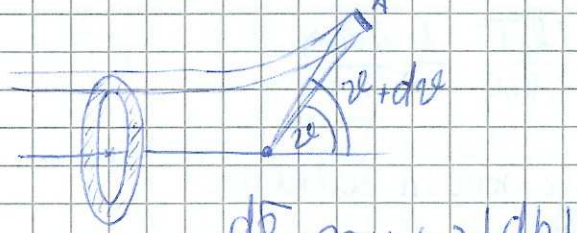
$$\nu = \pi - 2\int_{r_0}^{\infty} dr \frac{d\varphi}{dr}$$

ahol $\dot{r} = 0$, tehát ahol a legközelebbi van egyenáshoz a 2 részecske

$$\frac{\nu}{2} = \frac{\pi}{2} - \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\pi}{2} - \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{b}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - 2\gamma\frac{b}{r}}} = (\dots)$$

$r = \frac{b}{x}$ helyettesítéssel

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\alpha'}{2E} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}}$$



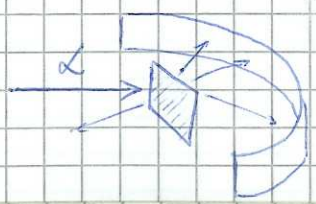
$$\frac{d\sigma}{d\nu} = 2\pi b(\nu) \left|\frac{db}{d\nu}\right|$$

gömbi koord.: $d\Omega = \sin\nu \, d\varphi \, d\nu$

$$\downarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin\nu} \frac{d\sigma}{d\nu} \frac{1}{2\pi}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha'^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\nu}{2}}}$$

(Rutherford) pontszerű ütközés differenciális hatáskeresztmetszete



2015.09.18.

Atomosság makroszkopikus jelenségekben

→ Brown - mozgás
→ Sörétzaj
→ Fényszórás (égkék)
→ Gázok kinetikus modellje

---

a) Brown - mozgás

- rendezetlen mozgás
- időben nem csillapodik
- de nem „elő"
- nagyobb T → intenzívebb
- csak a folyadék viszkozitásától függ
- nagyobb szemcsékre kisebb a hatás
- 2 közelítés készült: Einstein; Langevin

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta R} t$$ (elmozdulás négyzetének (>0) várható értéke)

(η: viszkozitás, R: szemcse mérete)

- Einstein: ozmózisnyomás

$$\rightarrow p(x) = \nu(x) \cdot k_B T \rightarrow F = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\nu(x)} = -\frac{k_B T}{\nu(x)} \cdot \frac{\partial \nu(x)}{\partial x}$$

($\nu(x)$: pollenek sűrűsége)

→ Stokes-tö: $F_i = 6\pi\eta R v$

$$v = \frac{1}{6\pi\eta R} F = -\frac{k_B T}{6\pi\eta R} \cdot \frac{1}{\nu(x)} \frac{\partial \nu(x)}{\partial x}$$

→ adott felületen mennyi részecske halad át?

$$\nu(x) v = -\frac{k_B T}{6\pi\eta R} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

$\nu(x) v = j$

→ Kontinuitási - egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underline{j} = 0$$

$$\frac{\partial \nu(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \nu(x) = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}}$$

Diffúziós eh.: ①

$$\dot{\nu} = D\nu''$$

$$\downarrow$$

$$\nu(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$ megoldás → $t=0$ · Dirac-delta

↓

Gauss eloszlás kiszélesedik az idő múlásával

$$\rightarrow \sigma^2 = 2Dt$$ szórásnégyzet = $\frac{\text{várható}}{\text{eltérés}}$

$$\downarrow$$

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \frac{k_B T}{3\pi\eta R} t$$

// $\langle x^2 \rangle = \int x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$ //

- Langevin-levezetés

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta R\dot{x} + F_x(t)$$ (véletlen erő)

$$\downarrow \cdot 2x$$

$$2mx\ddot{x}\dot{x} = -12\pi\eta R x\dot{x} + 2xF_x(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x^2 = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$$

$$\downarrow$$

$$x\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}x^2 - 2\dot{x}^2\right)$$

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\dot{x}^2 = -6\pi\eta R\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2 + xF_x(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle - \langle m\dot{x}^2\rangle = -6\pi\eta R\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle + \underbrace{\langle xF_x(t)\rangle}_{\emptyset}$$

$\langle m\dot{x}^2\rangle$ ugyanúgy E_{kin} : k_BT a kinetikus gázelméletből

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle = k_BT - 3\pi\eta R\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = k_BT\cdot\frac{1}{3\pi\eta R} + C_0\cdot\exp\left\{-\frac{6\pi\eta R}{m}t\right\}$$

C_0: konstans

- második tag elenyészően időnél (eredetileg mi volt a részecskénél : ez idővel egyre jelentéktelenebbé válik)

$\dot{\nu} = D\nu''$

$\downarrow$

$\nu(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ megoldás $\rightarrow t=0$ Dirac-delta

$\downarrow$

Gauss eloszlás kiszélesedik az idő múlásával

$\rightarrow \sigma^2 = 2Dt$ szórásnégyzet = várható eltérés

$\downarrow$

$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \frac{k_B T}{3\pi\eta R} t$

$\| \langle x^2 \rangle = \int x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \|$

- Langevin-levezetés

$m\ddot{x} = -6\pi\eta R\dot{x} + F_x(t)$ (véletlen erő)

$\downarrow \cdot 2x$

$2m\ddot{x}\dot{x} = -12\pi\eta R\dot{x}x + 2xF_x(t)$

$\frac{d^2}{dt^2}x^2 = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$

$\downarrow$

$x\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}x^2 - 2\dot{x}^2\right)$

$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\dot{x}^2 = -6\pi\eta R\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2 + xF_x(t)$

$\downarrow$

$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle - \langle m\dot{x}^2\rangle = -6\pi\eta R\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle + \langle xF_x(t)\rangle$ ($\langle xF_x(t)\rangle = 0$)

$\langle m\dot{x}^2\rangle$ ugyanaz E_{kin}: k_BT a kinetikus gázelméletből

$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle = k_BT - 3\pi\eta R\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = k_BT\frac{1}{3\pi\eta R} + C_0 \cdot \exp\left\{-\frac{6\pi\eta R}{m}t\right\}$ (C_0: konstans)

- második tag lecsökken időben (eredetileg mi volt a részecskénél: ez idővel egyre jelentéktelenebbé válik)

Binomiális eloszlás

- p vsz. „igen" ; $1-p$ vsz „nem" (független események)
- N kísérlet mellett vsz-gel lesz m „igen" ($m \leq N$)

$$\boxed{P_m^{(N)} = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}} \qquad \sum_{m=0}^{N} P_m^{(N)} = 1$$

- várható érték?

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{N} P_m^{(N)} \cdot m = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} \cdot m =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m \cdot z^{m-1} p^m (1-p)^{N-m} \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{d}{dz} \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} (zp)^m (1-p)^{N-m} \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{d}{dz} (1-p+zp)^N \Big|_{z=1} = N(1-p+2p)^{N-1} \cdot p \Big|_{z=1} =$$

$$= \underline{\underline{Np}}$$

- szórás?

$$\langle m^2 \rangle = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m^2 p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m(m-1) p^m (1-p)^{N-m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m p^m (1-p)^{N-m}}_{Np} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m(m-1) z^{m-2} p^m (1-p)^{N-m} \Big|_{z=1} + Np =$$

$$= \left| \frac{d}{dz} \right|^2 \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} (zp)^m (1-p)^{N-m} \Big|_{z=1} + Np =$$

$$= \frac{d^2}{dz^2} (1-p+zp)^N \Big|_{z=1} + Np = N(N-1) p^2 (1-p+zp)^{N-2} \Big|_{z=1} + Np =$$

$$\boxed{\langle m^2 \rangle = N(N-1)p^2 + Np}$$

- szórásnégyzet def: $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

$\langle x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2\rangle = \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2 = \underline{\underline{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}}$

→ m szórásnégyzete:

$$\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2 = N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = \underline{\underline{Np - Np^2}}$$

○ Poisson-eloszlás: Binomiális határesete

$N \to \infty$, $p \to 0$ } de $Np = \lambda$ const.

- ilyen pl. a radioaktív bomlás
- m esemény valószínűsége

$$p_m = \lim_{N\to\infty} \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} = \lim_{N\to\infty} \binom{N}{m} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-m} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-m)!} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{N^m} \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-m} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-m}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{N!}{(N-m)!N^m}}_{\to 1} = \underline{\underline{\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}}$$

- várható érték: λ
- szórásnégyzet: $\lambda \to \sigma = \sqrt{\lambda}$
- relatív ingadozás $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (fluktuáció)

→ gázok sűrűségingadozása

- V térfogatban átlagosan N db molekula, ennek ingadozása $\sqrt{N}$
- Pl levegő, $d = 500\,nm$ kockában $\rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \approx 0{,}05\,\%$

b) Sörétzaj

ennek van bizonytalansága, hiszen Q nem folytonos, töltéshordozókból (e) áll.

áram: $I = \frac{Q}{t}$

$$n = \frac{I\cdot t}{e} \to \sqrt{n} = \sqrt{\frac{I\cdot t}{e}}$$ (ø teljesen független események ...)

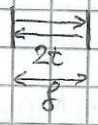
kicsi áramsűrűségeknél jó ~ elektronok nagyjából függetlenek

áramingadozás: $\Delta I = \frac{\Delta n \cdot e}{t} = \sqrt{\frac{I\cdot e}{t}}$

$$\frac{\Delta I}{I} \to \sqrt{\frac{e}{It}}$$

- adott f frekvencián erősítve

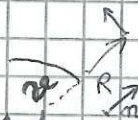
$t = \frac{1}{2f}$ jellemző idő



$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\frac{2ef}{I}} \rightarrow (\Delta I)^2 = \frac{2ef}{S} I$$

arányos a teljesítménnyel → teljesítményspektrum

c) Fényszórás



- rezgő dipólus: $\uparrow q, \omega$ → mekkora az elektromos tér nagy R távolságban

$$E = \frac{d_0 \omega^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\vartheta}{c^2 R} \sin(\omega t) \qquad d(t) = d_0 \sin(\omega t)$$

$$\underline{B} = \frac{1}{c} \underline{n} \times \underline{E}$$

Poynting-vektor: $\underline{P} = \frac{1}{\mu_0} \underline{E} \times \underline{B}$

$$|\underline{P}| = \frac{1}{\mu_0} |\underline{E}||\underline{B}| = \frac{1}{\mu_0 c} |\underline{E}|^2 = c\varepsilon_0 \frac{d_0^2 \omega^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{\sin^2\vartheta}{c^4 R^2} \sin^2(\omega t)$$

atomi polarizálhatóság: γ

$d = \gamma E_{be}$

- modell: z = kitérés

$$m_e \ddot{z} = -eE_{be}\sin(\omega t) - m_e \omega_0^2 z \quad \text{(rugós közelítés)}$$

$$z = \sin(\omega t)\left(-\frac{eE_{be}}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$d = E_{be} \sin(\omega t) \underbrace{\frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Legyen $E_0 \sin(\omega t)$ a fény leve

$$P_{fény} = c\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \rightarrow \bar{P}_{fény} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$$

$$\bar{P}_{kisugárzott} = c\varepsilon_0 \frac{\gamma^2 E_0^2 \omega^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{c^4 R^2} \cdot \frac{1}{2}$$

Összes kisugárzott teljesítmény:

$$\int_{\text{Sugárgömb}} \bar{P}_{\text{kisug}} = c_0 \varepsilon_0 \frac{\gamma^2 E_0^2 \omega^4}{2c^4 (4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{\text{Összes kisugárzott teljesítmény}}{P_{\text{fény}}} = \sigma = \frac{\gamma^2 \omega^4}{c^4 (4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{8\pi}{3}$$

bejövő teljesítmény

hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \underbrace{\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{m_e c^2}\right)^2}_{r_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{8\pi}{3} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{8\pi}{3}$$

r_e: klasszikus elektronsugár

$r_e = 2{,}81 \cdot 10^{-15}\,m$

1, Szabad e^-: $\omega_0 = 0$ (Ø visszatérítő hatás)

$\rightarrow \sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$

2, $\omega << \omega_0$: Rayleigh

$$\rightarrow \boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} r_e^2}$$

↳ jobban szórja a kék fényt mint a vöröset ($f_{kék} > f_{vörös}$)

N: részecskeszámsűrűség

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = N\sigma \rightarrow \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} N$$

$\sim$ sokan események egyenletesen

ezt így kéket-e szórni? Az egyes elektronokat nem relektjük függetlennek → egymásra mozgó "oszcillátorok" hozzádiktálnak egy plusz elektromos "lent a kijövőhöz" $\rightsquigarrow$ törésmutató

Valódi kép: részecskeszámingadozás → fénytörés változik

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \qquad \varepsilon_r \cong 1 + N\gamma \frac{1}{\varepsilon_0}$$

külső $\vec{E}$ polarizáció által létrehozott $\vec{E}$

$$\left(\text{Clausius-Mossotti}: \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\gamma}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6\pi N} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left[\frac{(\varepsilon_r - 1)(\varepsilon_r + 2)}{3}\right]^2 \cdot N k_B T \beta_T$$

kompresszibilitás

↳ fluktuáló közeg fluktuál $\Rightarrow$ ez okozza gyakorlatilag a fényszórást

Gázok energiaeloszlása

Boltzmann-eloszlás

E energiájú állapot: $W \sim e^{-\frac{E}{k_B T}}$ valószínűség

M csoport: beosztom az energiaszinteket

Állapotok száma a csoportb: $G_1, G_2 \dots G_M$

Energia: $\epsilon_1, \epsilon_2 \dots \epsilon_M \rightarrow$ állandó

részecskeszám: $N_1, N_2 \dots N_M \rightarrow \sum_i N_i = N$ } $\sum_i N_i \epsilon_i = E$ állandó

megvalósuló állapot → max. entrópia

→ Ha 1 állapotban max. 1 részecske:

$\frac{G_1!}{(G_1 - N_1)! N_1!}$ féle képpen helyezkedhetnek el

→ Ha több is lehet

$\frac{(G_1 + N_1 - 1)!}{(G_1 - 1)! N_1!}$

$N_1 \ll G_1$: $\frac{G_1^{N_1}}{N_1!}$

$\Rightarrow \frac{G_1^{N_1} \cdot G_2^{N_2} \cdot \dots}{N_1! N_2! \dots}$ hogyan tudjuk megfelelően választani?

$\ln \frac{G_1}{N_1} = \alpha - \beta E_1$ akkor leggyakrabban fordul elő

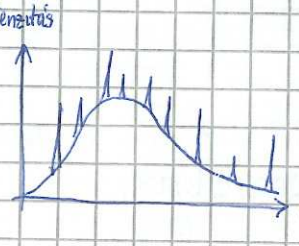
$W \sim e^{\alpha - \beta E_1}$ $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Atomok energiaszintjei

[2015.09.25.]

- Színképvonalak

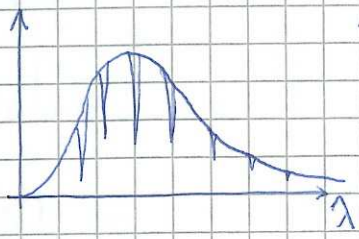
  - Nap emissziós spektruma (pl. prizmán felbonthatjuk → látható fényspektrum)
  - emissziós spektrum: van egy alapgörbe, amin kiugrások vannak minden esetben
  - Vonalak helyét csak az anyag határozza meg



pl.

- abszorbciós spektrum: 

- abszorbciós spektrum vonalai ott vannak pontosan, mint az emissziós vonalak



- alapgörbe: hőmérsékleti sugárzás (Planck-görbe)

- színképvonalak anyagra jellemzőek → így találták ki, hogy milyen anyagokból áll a Nap

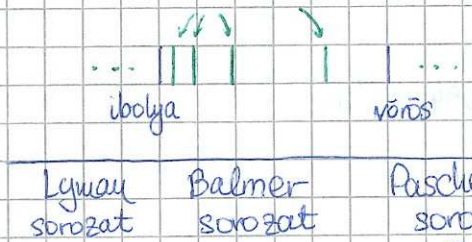
- Eleinte nem tudták megmagyarázni (nem volt kvantumos atommodell, a Rutherford-modell ø tudta megmagyarázni)

- spektrum-termek: τ_n, τ'_m

$$f_{nm} = \tau_n - \tau'_m$$

↑ frekvenciák kijöttek ilyen termek különbségeként, sokkal kevesebb term kellett az összes frekvencia megjegyzéséhez
→ ma már tudjuk, hogy ezek pont az atomi energiaszintek

- Hidrogén színképvonalai



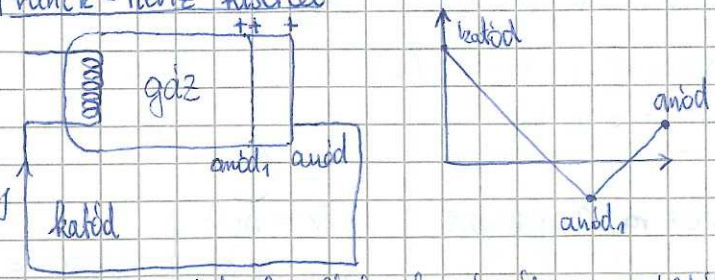
→ $\tau_n \sim \frac{1}{n^2}$ $\left(\tau_n = \frac{3{,}28 \cdot 10^{15}}{n^2}\right)$ → H színképvonalait ilyenek különbségeiként meg lehet kapni

↳ Balmer: $3{,}28 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 3,4,5\ldots$

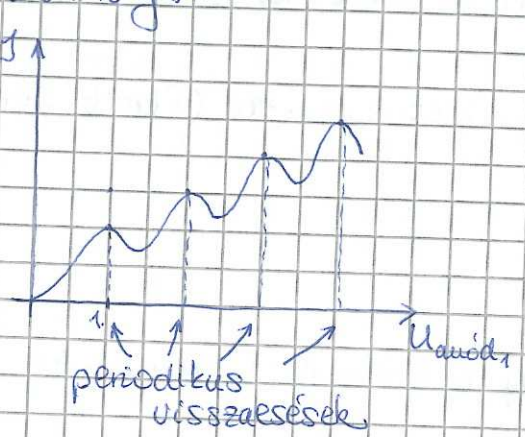
↳ Lyman: $3{,}28 \cdot 10^{15}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 2,3,4,5$

→ ezek: Rydberg-Ritz-féle kombinációs szabály

□ Franck-Hertz kísérlet



anód₁ feszültség függvényében vizsgálták az áramot



pl. $U_{Hg} = 4{,}9\,V$

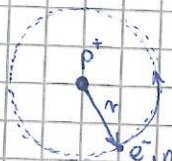
$U_{anód}$ ↑ → gyorsító feszültség ↑ → elektronok egyre gyorsabbak, gázzal eleinte rugalmasan ütköznek, majd gerjesztő elektronokba mennek át...
→ gerjesztés csak meghatározott energiaszinteken jöhet létre → szép periodikus szerkezet
→ gerjesztésnél a gáz elkezd világítani a megfelelő színnel

⇒ diszkrét energiaszintjei vannak az atomoknak

↓

2 ilyen közötti átmenetkor: színképvonalaknak megfelelő fotonokat bocsát ki

- Fekete-test sugárzás
  - Max Planck: $\hbar\omega$ energiacsomagok [1900] ($\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,Js$)
    ↑ oszcillátor frekvenciája
  - Einstein: fény = foton
    ↳ $E_f = \hbar\omega$
    ↑ fény frekvenciája
  - Színképvonalak: $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ Niels Bohr
- H-atom Bohr-modellje



$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

e^-, m_e – elektronok impulzusmomentuma: (L)

$$\boxed{L = m_e v \cdot r = n\hbar}$$

egész számú hullámhossz férjen rá a pályára: $2\pi r = n\lambda$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \Bigg\} \; m_e v r = n\hbar$$

$v = \frac{n\hbar}{m_e \cdot r}$

↓

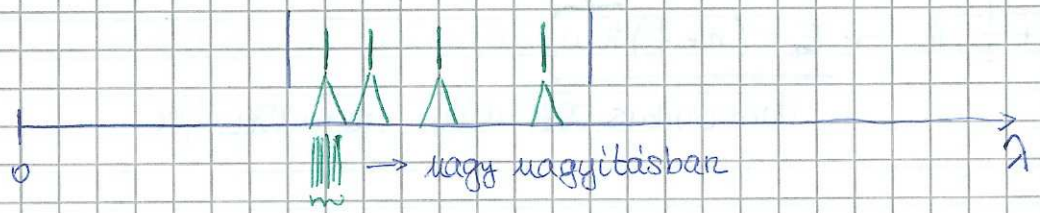
$$m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{n^2\hbar^2}{m_e} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} = r$$

$$r_B = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 0{,}51\ \text{Å}$$

$$E = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r}\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = -\underbrace{\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{2\hbar^2}}_{13{,}6\,\text{eV}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$f_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \frac{13{,}6\,\text{eV}}{h}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$ H színképvonalai

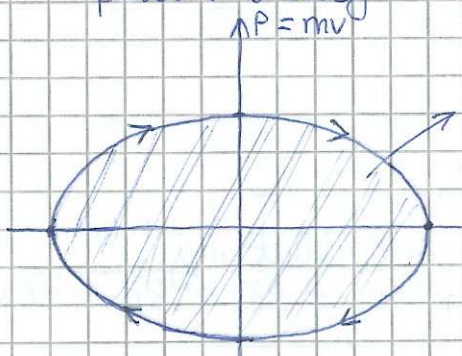


igazából nem 1 vonal, hanem n darab különböző szint összessége ⇒ ezt hívják finomszerkezetnek

- Sommerfeld – ellipszis alakú pályák?
  - ↳ kvantumfeltétel:

Sommerfeld-féle kvantumfeltétel

periodikus mozgás (1D)



$J = \oint p\,dx$ „hatásváltozó"

($p \cdot x$:= hatás)

- kvantumfeltétel:

$J = n \cdot h$ (eredetileg ezt tették fel Sommerfeldék)

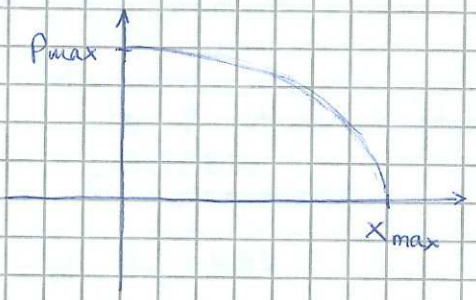
Schrödinger-eq.-ből ma: $J = \left(n + \frac{1}{2}\right) h$ [ilyen pályák valósulnak ki]

• Harmonikus - oszcillátor PÉLDA

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\downarrow$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$



$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad p_{max} = \sqrt{2mE}$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega^2}{2E}x^2 = 1$$

$$\frac{p^2}{p_{max}^2} + \frac{x^2}{x_{max}^2} = 1$$

ellipszis

$$J = \oint p\,dx = \pi x_{max} p_{max} = \frac{2\pi E}{\omega}$$

$$\frac{2\pi E}{\omega} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \;\Rightarrow\; \underline{\underline{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}}$$

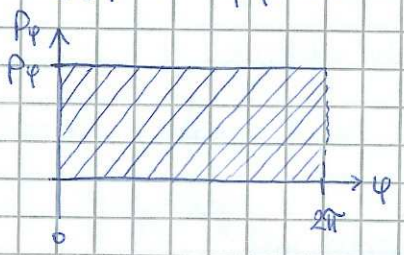
Harmonikus oszcillátor energiaszintjei

• „Rotátor" PÉLDA

$$E = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 \qquad p_\varphi = \Theta\dot{\varphi} \;\rightarrow\; p_\varphi = \text{const.}$$

$$\downarrow$$

$$J = \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi 2\pi$$



L impulzusmomentum

$$J = p_\varphi 2\pi = n\cdot\hbar$$

$$\underline{\underline{L = n\hbar}} \quad \text{(Bohr ugyanezt mondta} \Rightarrow \text{kijött)}$$

$$E = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{(\underbrace{n_r + m_\varphi}_{n})^2} \quad \text{energiaszintek}$$

$\downarrow m_\varphi = 0, 1, \ldots n-1$

↳ adott energiájú állapot n féle képpen valósulhat meg!
↳ de még mindig nem értjük a finomszerkezeti különbségeket

- relativisztikusan:

$$E = \left\{\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} m_e c^2$$

α finomszerkezeti állandó

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Ha $\mathcal{L}$ kicsi: $E \approx \left\{1 - \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{(n_r - \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} - 1\right\} m_e c^2 =$

$$= \frac{\alpha^2}{2} m_e c^2 \frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} \approx \frac{\alpha^2}{2} m_e c^2 \frac{1}{(n_r + n_\varphi)^2}$$

$$\frac{\mathcal{L}^2}{2} m_e c^2 = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e c^2}{2} \frac{1}{\hbar^2 c^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{2\hbar^2} = 13{,}6\ \text{eV}$$

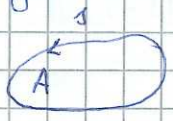
- Relativisztikusan látszik, hogy az Energiaszintek nem pontosan ugyanazok; $\mathcal{L}$ kicsi közelítéssel visszakapjuk a nemrelativisztikus számolást

Impulzusmomentum

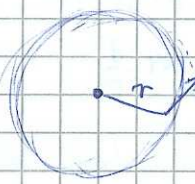
- Stern - Gerlach - kísérlet | Einstein - de Haas ~~mágn~~ kísérlet

→ Bevezetés

- mágneses momentum



$|\mu| = 1\ \text{A}$



$$I = \frac{q \cdot v}{2\pi r} \rightarrow \mu = \frac{qv}{2\pi r} r^2 \pi = \left[\frac{qvr}{2} = \mu\right]$$

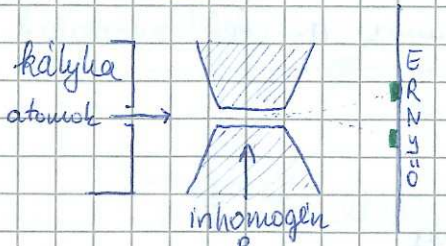
$$[L = mvr]$$

$$\boxed{\mu = \frac{q}{2m} L} \rightarrow \mu_{össz} = \frac{q}{2m} L_{össz.}$$ több részecskére

↖ eltérítés

- inhomogén $\underline{B}$ térben F erő hat μ-re

$$F_z = \partial_z B_e \mu_e$$



eltérülés mértéke nem kiszámított bármekkora

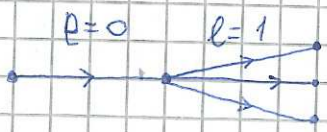
Stern - Gerlach - kísérlet

- nézték, hogy az atomnyaláb hány részre szakad

„ $L = \ell \cdot \hbar$ " igazából: $L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$

↳ ℓ egész szám

$-|\ell| \leq m \leq |\ell|$ → m $2\ell+1$ féle lehet



... pl. Oxigén 5 részre szakad

→ μ tényleg kvantált ✓

Ag atomokat mértek → de 2 pontra szakadtak ⇒ ?

⇓

e saját impulzusmomentumának bevezetése (SPIN)

⇓

Saját mágneses momentuma is lesz

→ kiderült, hogy a páratlan számú elektronnal rendelkező atomok páros részre oszlanak, páros számú —"— páratlan részre szakadnak

→ H-atom 2 részre hasad

e spinje kétféle lehet: ↑ vagy ↓

e mágneses momentuma $\approx \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$

S: spin

$\mu_e \stackrel{?}{=} \frac{e}{2m_e} S_e$

↑

$\pm\frac{\hbar}{2}$ lehet

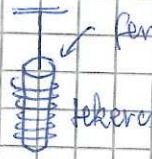
$|\mu| = g \cdot \frac{e}{2m_e} \frac{\hbar}{2}$ ⇒ μ_B így jön ki

↑

$g \approx 2$ g → azt fejezi ki, hogy az elektron ∅ egy pörgő golyó

→ van-e mechanikai impulzusmomentuma az elektronoknak?

Einstein - de Haas kísérlet



→ M mágnesezettség

$[M] = J/T$

→ felmágnesezték a hengert, majd gyorsan megfordították a mágnesezettséget

$M = N \cdot \mu$

- mágnesezettséget átbillentse → elfordult a henger

mechanikai imp.nom. $\exists = N \cdot S = \frac{2m_e \mu_e}{g \cdot e} N = \frac{2m_e}{g \cdot e} M$

- elektronok tényleg hordoznak mechanikai impulzusmomentumot
- elsőre kijött → $g = 1,6$; később további effektusok figyelembe vételével ⇒ $g = 2$, később jött ki ($g \approx 2$)

2015. 10. 02.

↑ Dirac-egyenletből is kijött

- neutronra, protonra:

$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N} \approx 5 \cdot 10^{-27}\ J/T$ (mag-magneton → egység)

$\mu_p = 2,79 \mu_N$

$\mu_n = -1,91 \mu_N$ → semleges, mivel van egyáltalán spinje

pálya-impulzusmomentum: $\ell = 0, 1, 2 \ldots$; $s = \frac{1}{2}$

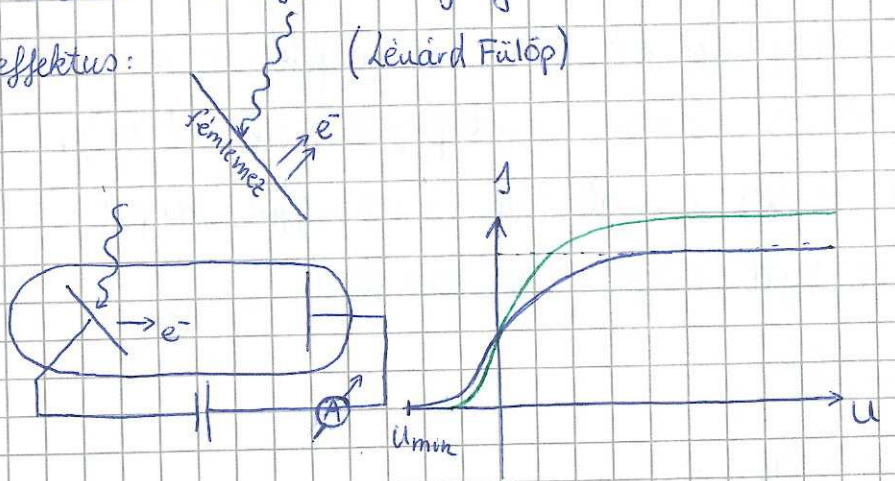
$L^2 = \hbar^2 (\ell + 1) \ell$

$L_z = m\hbar$ ⇝ $m = -\ell \ldots \ell$

↳ kitüntetett irány? → nem, a határozatlanság miatt egy kitüntetett tengelyt megnévve a többi tengelyre nem fogjuk tudni

FÉNY (EM-SUGÁRZÁS) RÉSZECSKETERMÉSZETE

- 1800-as évek → interferencia: fény = hullám (Maxwell → EM hullám)
- fotoeffektus: (Lénárd Fülöp)



$|I|$ az intenzitással arányos

U_{min}: ∅ függ az intenzitástól ⇝ $U_{min} = \frac{a}{\lambda} - b$

$eU_{min} = E_{e,kin}$

$E_{kin} = \hbar\omega - W_{kilépési}$

↓

~eV; anyagfüggő

Einstein 1905:

fény: fotonok

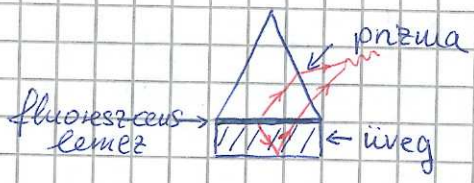
$E = \hbar\omega$, $p = \frac{E}{c}$

(puszta a fotoeffektusból nem következik egyértelműen a fény részecsketermészete)

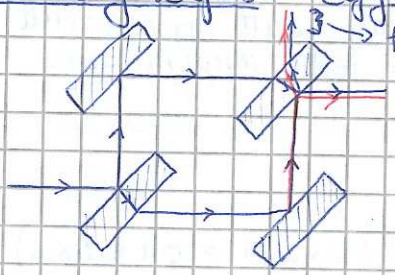
Selényi - kísérlet

↳ megcáfolta Einstein „tűsugárzás" - elméletét (fotonok ~ buborékcsomagok, és csak kis térszögben képes interferenciára)

↳ nagyszögű interferenciát figyelt meg



Jánossy Lajos → egyfotonos interferencia megfigyelése



- egyszerre egy-egy fotont belőve felfelé soseni volt érzékelés, hanem mindig jobbra érkezett meg, mintha tényleg interferálna és az egyik irányba kioltaná saját magát interferenciával.

$E = \hbar\omega \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}$

$2\pi r = n\frac{h}{p} \quad L = n\hbar$ Bohr-modell

$L = n\hbar \qquad r \cdot p = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$

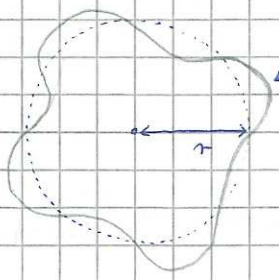
↗ L

de Broglie:

$p \leftrightarrow \lambda$

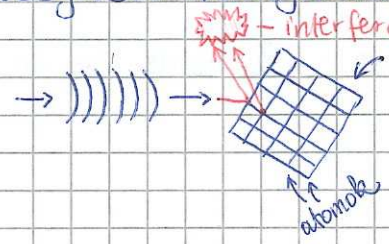
$\lambda = \frac{h}{p} \quad (p = \frac{h}{\lambda})$

↑ deBroglie hullámhossz



← egész számú · $\frac{\text{hullámhossz}}{2}$

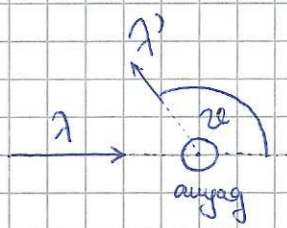
- anyagvizsgálat röntgensugárzással (Comptou-sg.)



- ha jól világították meg, az interferenciaképből → anyagszerkezet
- Compton: koherens mellett inkoherens szóródás is van

↓

random szóródás
→ ∅ interferál



$$\lambda - \lambda' = \lambda_e (1 - \cos\vartheta)$$

↓

elektron Compton hullámhossza: $\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,m$

$$\frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi c}{\omega'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\vartheta)$$

$$\omega' = \omega \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)}$$

$E = \hbar\omega$

$$\hbar\omega = \hbar\omega' \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)}$$

→ kis intenzitásra is teljesül, amit már klasszikusan meg se lehet magyarázni, nagy intenzitásra klasszikusan is kijön

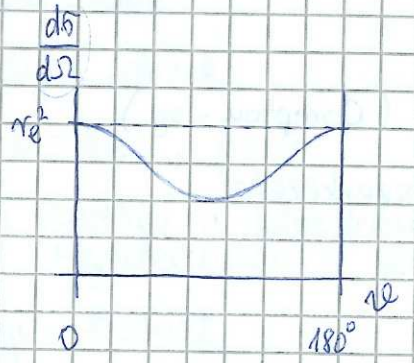
→ Röntgensugárzás is fotonokban terjed

Klasszikusan:

Thomson-képlet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\vartheta) \rightarrow \sigma_{Thomson} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{m_e c^2} = 2{,}81 \cdot 10^{-15}\,m$$

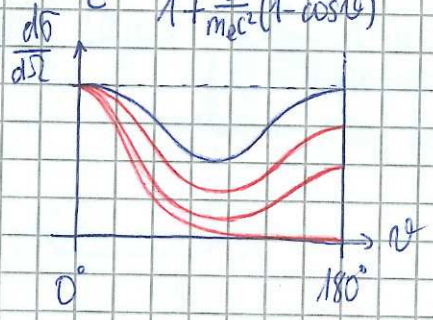


visszaszórás ~ előreszórás szimm.

valóságban - kvantumos leírás:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2\vartheta\right]\left(\frac{E'}{E}\right)^2$$ Klein-Nishina képlet

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1+\frac{E}{m_e c^2}(1-\cos\vartheta)}$$



Fotoeffektus kiegészítés



$J = 1000 \frac{W}{m^2}$

$n = 10^{28} - 10^{29} \frac{elektron}{m^3}$

$\varrho_{vas} = 7800 \frac{kg}{m^3}$ $(A = 56)$

t ideig $\rightarrow W_{kilépési} = \frac{J \cdot t \cdot A}{A \cdot n}$ ↓ klasszikus várakozás

$\lambda = 500\,nm$

$\Downarrow$

$t_{klass} = 0{,}8\,s$ ↓

Valóságban: $\sim 10^{-12}\,s$ után már vannak kilépő elektronok

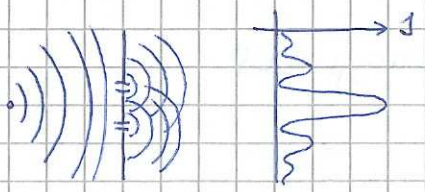
Anyaghullámok

1, fotonokra: $E = h\nu \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$

2, Bohr-modell: $p_{elektron} = \frac{h}{\lambda_{elektron}}$

Davisson-Germer-kísérlet

↳ elektronok is tudnak interferálni



fény → Young-kísérlet

($p_{el} = ?$ $E = ?$)

$\lambda_{fény} = 500\,nm$ $\quad p = \frac{h}{\lambda}$ $\quad E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e}\frac{1}{\lambda^2}$

$\lambda_{el} = 500\,nm \Rightarrow E \cong 6 \cdot 10^{-6}\,eV$

↳ ezred K-es hőfok kéne vagy olyan közeli rések, amit nem lehet gyártani (azóta ezt is megoldották)

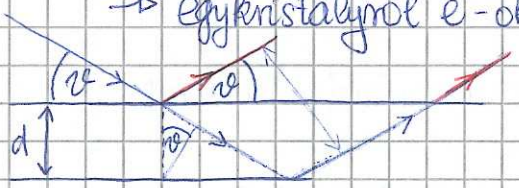
↳ természetben vannak ilyen kicsi rácsok (kristályok)

↳ szerencsés véletlen miatt fedezték fel

↳ Nikkellel vizsgáltak e⁻ szórást

↳ jó közelítéssel egykristály oxidréteg volt a fém felületén

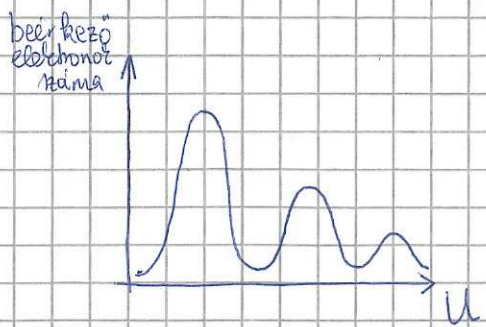
→ egykristályról e⁻-ok visszaverődése interferenciát mutat



- a második kristálysíkról visszaverődő hullám több utat tesz meg ⇒ interferencia feltétele:

$$2d\sin\vartheta = n\lambda$$

(n: adott ϑ-ra, adott λ tartozik)



$d = 0{,}091\,nm$

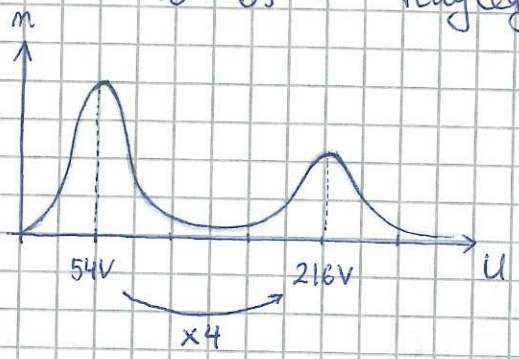
$U = 54\,V \rightarrow e^-$ gyorsítófeszt. $\rightarrow E = 54\,eV \rightarrow$ itt látták interferenciát $65°$-ban!

$E_e = 54eV \rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \underline{0{,}167\,nm}$

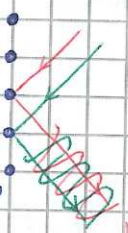
$2 \cdot 0{,}091\,nm \sin\vartheta = 0{,}167\,nm$

$\downarrow$

$\vartheta = 65° \checkmark$ tényleg ennyi volt



- neutronok
  - ↳ egykristályokon őket is szóratni próbálták
  - ↳ ők is interferáltak ... $\Rightarrow$ neutron is hullám
  - ↳ $\lambda = h/p$
- atomok, molekulák
  - ↳ ezekhez is lehet $\lambda = \frac{h}{p}$ hullámhosszat rendelni
  - ↳ nehezebb ezt megmutatni $\rightarrow$ egykristállyal Ø működik
  - ↳ spec rácsokkal vizsgálták



egykristály külső rétege, atomok nem tudnak belefelé menni

interferencia, ha útkülönbség $= n \cdot \lambda \Rightarrow$ erősítés

↳ még fullerénnel is megmutatták a hullámtermészetet

- kétréskísérlet $\rightarrow$ akkor is interferenciakép, ha csak egyesével küldjük a részecskéket
- Schrödinger:

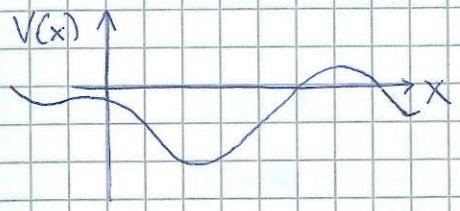
$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \underbrace{e^{i\underline{k}\underline{r}}}_{\downarrow} \quad |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$|p| = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}|\underline{k}| = \hbar|\underline{k}|$$

$$\underline{p} = \hbar \underline{k}$$

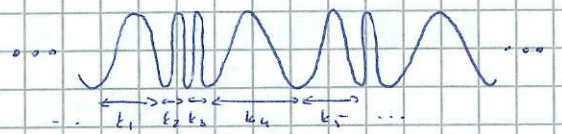
$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

külső potenciális energia



klasszikusan: $E_{kin} = E - V(x)$

- ötlet: „hullám, aminek k-ja helyről helyre változik"



$$\underline{\nabla}(e^{i\underline{k}\underline{r}}) = i\underline{k}e^{i\underline{k}\underline{r}}$$

$$\Delta(e^{i\underline{k}\underline{r}}) = -k^2 e^{i\underline{k}\underline{r}}$$

$$\frac{1}{e^{i\underline{k}\underline{r}}}\Delta(e^{i\underline{k}\underline{r}}) = -k^2 \quad \text{helyfüggetlen!}$$

$$\frac{1}{\psi(\underline{r})}\Delta\psi(\underline{r}) = -k^2(\underline{r})$$

$$\frac{1}{\psi(\underline{r})}\Delta\psi(\underline{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}E_{kin}(\underline{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\underline{r}))$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\underline{r}) + V(\underline{r})\psi(\underline{r}) = E\psi(\underline{r})}$$

SCHRÖDINGER-EGYENLET

Anyaghullámok: kísérleti tény

2015. 10. 09.

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

mi hullámzik?

Ψ: amplitúdó

$P = |\Psi|^2$ valószínűség adott helyre

$\int$

$$S = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad (S \sim E^2)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

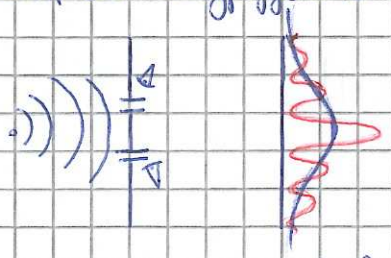
Ψ: szabad terjedés $\sim e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

$$\underline{k} = \frac{\underline{p}}{\hbar}\ ;\ \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\,\Psi_1^* \Psi_2}$$

interferencia tag $\sim \cos(k_1 - k_2)r$

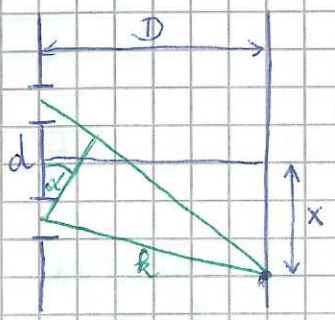
Mi van, ha megfigyelem az elektront?



$I = I_1 + I_2$ ← ∅ interferenciatag

∅ interferencia ⇒ tudtuk, hogy hol ment át az elektron ⇒ csak egyenként össze tudjuk adni a valószínűségek

- nem tudjuk úgy megfigyelni az elektront, hogy ne hamuk vele kölcsön, és elrontuk az interferenciaképet
- logikailag se stimmelne, ha tudnánk hogy az e-ok melyik résen mentek át, de mégis interferenciát kapnánk



$$d \sin\alpha = n\lambda$$

$$d \sin\alpha = n\frac{k}{2\pi}$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+D^2}} \approx \frac{x}{D}$$

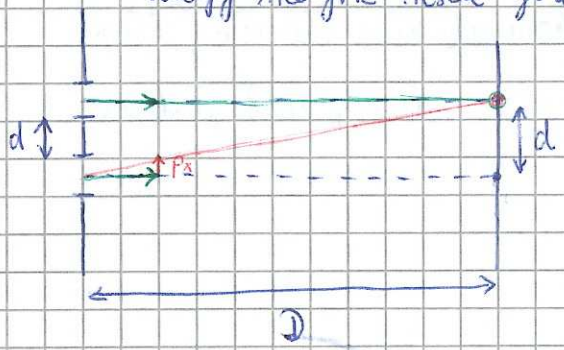
x: ahol erősítések lesznek

$$x = D \sin\alpha \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{d}$$

↳ távolságuk: $\frac{2\pi}{k} \cdot \frac{D}{d} = \Delta x$

$$k\hbar = p$$

$p_x \sim k\hbar \frac{d}{D}$ → akkora impulzust kap függőleges irányban, hogy pl. mérőleges beesésre már nem tudjuk eldönteni, hogy melyik résen jött át az elektron



$$\Delta x = k\hbar \frac{d}{D}$$

Interferencia feltétele, hogy fennmaradjon

↳ zavarok p_x elérjék a képet, de túl nagy ne legyen

- $\frac{p_x}{p}$ szöggel fog eltérni, ha ez nagyobb, mint $\frac{\Delta x}{D}$, akkor el fog mosódni az interferencia

↓

$$p_x \leq \frac{\Delta x}{D} p = \frac{\Delta x}{D} k\hbar$$

- résekben mérjük az impulzusváltozást
  - ↳ ahogy az elektron áthalad a réseken, ütközik velük, ezért valamennyi impulzust átad a rácsnak
  - ↳ igazából nem határozhatjuk közösen az e^--val, csak megmértünk valamit, ami egyébként is bekövetkezett volna
- Heisenberg-féle határozatlansági elv
  - egyszerre nem tudhatom egyszerre megmérni egy részecske helyét és impulzusát tökéletes pontossággal
- Ha két és x irányú impulzusát még tudjuk olyan pontossággal mérni, hogy még ne másodjon el az interferenciakép → $k\hbar\frac{d}{D}$ pontossággal
- Amikor fényjelvillantással mértük, hogy hol megy át az elektron → ~~valamely~~ egyre kisebbekre vehetjük a fotonok energiáját, hogy kölcsönhatáskor egyre kevésbé zavarja meg az elektronokat → ha eljutnánk arra az impulzusértékre, ahol már interferenciát kéne látnunk, a megvilágító fény hullámhosszának akkorának kéne lennie, hogy már nem tudnám megmondani, hogy hol jött át!

$$\Delta p_x \leq p\frac{\Delta x}{D}$$

$$p\frac{2\pi}{k}\frac{1}{d} = \frac{2\pi\hbar}{d}$$

$$d\,\Delta p_x \leq 2\pi\hbar$$

↑

Ha ezt tudom, akkor az impulzust nem fogom tudni pontosan, és fordítva

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p \geq \hbar}$$ ⇝ kb. így kell kinézzen

$\Psi \sim e^{i(kx-\omega t)}$ szabad részecske

$\Psi(x,t)$

$|\Psi|^2$: valószínűség-sűrűség (részecske megtalálási valószínűsége)

↳ Niels Bohr ↳ x és $x+dx$ között a megtalálási valószínűsége $|\Psi(x)|^2 dx$

ugye $e^{ikx} \rightarrow |\Psi|^2 = 1$?

↳ mindenhol egyforma a megtalálási valószínűsége → $\Delta x = \infty$, de tudjuk, hogy $\Delta p = 0$, hiszen $p = \hbar k$-ból indultunk ki ($\infty \cdot 0 \doteq \hbar$?)

$$\Psi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{ik_2 x}$$

$p_1 = \hbar k_1 \leftrightarrow p_2 = \hbar k_2$

melyik impulzus milyen valószínűséggel van ⇝ A-tól függ

↓ végtelen állapotra → folytonos index miatt integrálás

$$\Psi(x) = \int \frac{A(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dk \quad \leftrightarrow \quad A(k) = \int dx \, \frac{\Psi(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

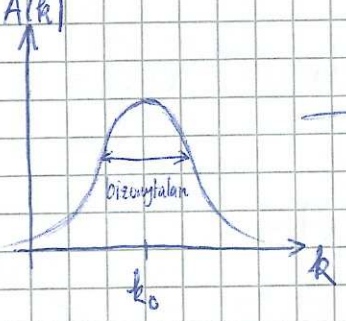
Fourier-transzformáció

Pl. ha $A(k) = \delta(k-k_0) \rightarrow \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x}$

↓

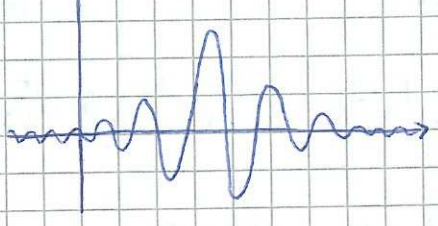
$A(k)$ „kiterjedtebb", akkor nem csak egy síkhullám lesz, hanem valami általánosabb

↳ $A(k)$



$\Psi(x)$

hullámcsomag



$\psi(x)$ adott: $|\psi(x)|^2 dx \sim P(x)$ P.

$\langle x \rangle = ? \rightarrow \int x |\psi(x)|^2 dx$

- szórásnégyzet $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, A(k) e^{ikx} \quad \sim \text{koordináták valószínűségeloszlása}$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} \psi(x) \quad \sim \text{impulzusok valószínűségeloszlása}$$

$P(x) \sim |\psi(x)|^2 dx$ helybizonytalanság

$P(k) \sim |A(k)|^2 dk$ impulzusbizonytalanság

$$\langle k \rangle = \int k |A(k)|^2 dk$$
$$\langle k^2 \rangle = \int k^2 |A(k)|^2 dk$$

$$\langle k \rangle = \int dk\, A^*(k)\, k\, A(k)$$
$$\langle p \rangle = \int dk\, A^*(k)\, \hbar k\, A(k) \quad \Big\} p = \hbar k$$

$$\langle p \rangle = \int dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{ikx} \psi^*(x) \cdot \hbar k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx' e^{-ikx'} \psi(x') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dx\, dx'\, dk\; e^{ikx} e^{-ikx'} \hbar k\, \psi^*(x) \psi(x') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dx\, dx'\, dk\; e^{ikx} \psi^*(x) \psi(x') \cdot i\hbar \frac{d}{dx'} e^{-ikx'} = \quad \text{parc. der.}$$

$\psi(x)$ tűnjön el a végtelenekben $\rightarrow$ ez oké ✓

$$= -\frac{1}{2\pi}\int dx\,dx'\,dk\; e^{ikx} e^{-ikx'} \psi^*(x)\, i\hbar \frac{d}{dx'}\psi(x') =$$

$$\# \quad \frac{1}{2\pi}\int dk\; e^{ik(x-x')} = \delta(x-x') \quad \#$$

$$= \int dx'\,dx\, \psi^*(x) \cdot -i\hbar \frac{d}{dx'}\psi(x')\,\delta(x-x') =$$

$$= \int dx\, \psi^*(x)(-i\hbar)\frac{d}{dx}\psi(x) = \langle p \rangle$$

$$= \int dx\, \psi^*(x)\, \hat{p}\, \psi(x) = \langle p \rangle$$

operátor: $\boxed{\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}}$ IMPULZUSOPERÁTOR

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \int \psi^*(x)\, \hat{x}\, \psi(x)\, dx$$

$\boxed{\hat{x} = x\cdot}$ HELYOPERÁTOR

$$\langle p^2 \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, \hat{p}^2\, \psi(x) = \int dx\, \psi^*(x)\left(-\hbar^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

$$(\Delta x)^2 := \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$(\Delta p)^2 := \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$$\int \left|\frac{d}{dx}\psi(x) + \alpha x \psi(x)\right|^2 dx \geq 0$$

↑ Weil ötlete - keresünk ilyen alakban

$$\int \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx} + \int \frac{d\psi^*}{dx}\alpha x \psi + \int \frac{d\psi}{dx}\alpha^* x \psi^* + |\alpha|^2 \int x^2 |\psi|^2 \geq 0$$

$$|\alpha|^2 \int x^2|\psi|^2 + \alpha \int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi + \alpha^* \int \frac{d\psi}{dx} x\psi^* + \int \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx} \geq 0$$

~~Oldjuk meg~~ α-nak másodfokú fv-e

→ írjuk fel a diszkriminánsát: (ha ≤ 0, akkor nem lehet negatív, amit akarunk)

$$\left(\int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi + \int \frac{d\psi}{dx} x\psi^*\right)^2 - 4\int x^2|\psi|^2 \int \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx} \leq 0$$

$$\left(\int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi\right)^2 + \left(\int \frac{d\psi}{dx} x\psi^*\right)^2 + 2\int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi \int \frac{d\psi}{dx} x\psi^* \leq 4\int x^2|\psi|^2 \int \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx}$$

/ $\int \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx} = -\int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2}$, ha ψ leesik ∞-ben /

⊕

/ $\int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi + \int \frac{d\psi}{dx} x\psi^* = \int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi - \int \psi \frac{d}{dx}(x\psi^*) =$

$= \int \frac{d\psi^*}{dx} x\psi - \int \psi^*\psi - \int \psi x \frac{d\psi^*}{dx} = -\int \psi^*\psi$ /

⊗

⊗ ⊕

$$\left(-\underbrace{\int \psi^*\psi}_{1}\right)^2 \leq 4\int x^2|\psi|^2 \int \psi^* \frac{d^2}{dx^2}\psi$$

$$\int x^2|\psi|^2 \int \psi^* \cdot (-\hbar^2)\frac{d^2}{dx^2}\psi \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$\langle x^2 \rangle$ $\qquad$ $\langle p^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Ha a diszkrimináns $= 0$ → van egy zérushely

↳ ebből: $\left|\frac{d\psi}{dx} + \alpha x\psi\right|^2 = 0$

$\Rightarrow \psi \sim e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ ← Gauss is kijött valamiért (később...)

minden fizikai mennyiség → operátor

hely: $\hat{x} = x \cdot$

impulzus: $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

energia: $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

3D impulzus:

$$\left.\begin{aligned} \hat{p}_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{p}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \underline{p} \Rightarrow \hat{\underline{p}} = -i\hbar \nabla$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$$

⇒ energia ⇝ Hamilton-operátor

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

Sajátállapotok

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi + \hat{V}(x)\Psi = E\Psi$$

$$\boxed{-\hbar^2 \Delta\Psi + V(x)\Psi = E\Psi}$$ SCHRÖDINGER-EQ

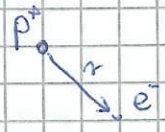
↳ energiaoperátor sajátállapotai / sajátértékei

energia lehetséges értékei pont ennek az operátornak a sajátértékei

$\hat{x} \cdot \hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$ nem kommutálnak

Ha két operátor ∅ kommutál ⇒ azokhoz tartozik egy bizonytalansági relációt, nem tudhatjuk egyszerre mindkettőt tetszőleges pontossággal

A határozatlansági reláció érdekes szemléletes alkalmazása



$$E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$ → $|E_{pot}|$ kisebb minél beljebb van, vissza ebben egyre pontosabban tudom, hogy hol van, viszont az impulzusbizonytalansága egyre nagyobb ⇒ E_{kin} nő

$$E_{kin} \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

$$\Delta p \cong \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

↓

$$E_{kin} \cong \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{(\Delta x)^2} \qquad \Delta x = \beta r$$

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{r^3}$$

$$r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{2}{\beta^2}$$

↓

$$E = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\beta^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^2\frac{\beta^4}{4} =$$

$$= -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{m}{2\hbar^2}\left[2\beta^2 - \beta^2\right] \rightsquigarrow \beta = 1 \Rightarrow \Delta x \approx r \quad \text{(ez jó)}$$

$\underbrace{\qquad}_{-13{,}6\,eV}$

(ez bűvészkedés volt! tudtuk minek kell kijönni, így bűvészkedtünk)

- legkellemesebb energiaszint $-13{,}6\,eV$-nél van, ez kijött

2015. 10. 16.

Hidrogén - atom

- Schrödinger - egyenlet $\rightarrow \Psi(\underline{r}) = ?$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(\underline{r})\Psi = E\Psi$$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad \text{↑ részletesen}$$

$$V(\underline{r}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\hbar c}}\cdot\frac{\hbar c}{r} = \frac{\alpha\hbar c}{r}$$

α finomszerkezeti állandó

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$V(\underline{r}) = \frac{Z\alpha\hbar c}{r}$$ általánosabban Z rendszámú atomra

$\Psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,Y(\vartheta,\varphi)$ alakban keressük a megoldást

- gömbi Laplace: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R''Y + \frac{2}{r}R'Y + \frac{1}{r^2}R\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial Y}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{Z\alpha\hbar c}{r}RY\right) = ERY$$

↓

Y: gömbfüggvények

$Y(\vartheta,\varphi) \equiv Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$

$\ell = 0, 1, 2 \ldots$

$m = -\ell, -\ell+1 \ldots \ell-1, \ell$; $(2\ell+1)$ db

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial y}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -\ell(\ell+1)y_{\ell m}$$

ℓ, m indexű gömbfüggvény

(Spherical Harmonics)

- Megoldás:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0}{Ze^2}\frac{\hbar^2}{m_e}, \quad \ell = 0, 1, \ldots n-1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \text{ főkvantumszám}$$

$$\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\,e^{-\frac{r}{na}}\left(\frac{2r}{na}\right)^{\ell}L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na}\right)\cdot Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$

$$L_a^b(x) = \frac{x^{-b}e^x}{a!}\left(\frac{d}{dx}\right)^a\left[e^{-x}x^{a+b}\right] \qquad (a \geq 0)$$

↑

módosított Lager polinom

$$E = -\frac{Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{m_e}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$ (azzal a feltétellel, hogy n-ben csak egy olyan kötött állapotú elektronokat szeretnénk)

$n = 1 \rightarrow \ell = 0, \quad m = 0$ (1)

$n = 2 \rightarrow \ell = 0, \quad m = 0$

$\ell = 1, \quad m = -1, 0, 1$ (4)

$n = 3 \rightarrow \ell = 0, 1, 2, \quad m = (\dots)$ (9)

$\vdots$

$n = n \rightarrow n^2$ lehetséges állapot tartozik ugyanahhoz az energiaszinthez

Általában is: „n" főkvantumszám, ℓ, m

↓ más fontosak, mint itt

↑ Energia m-től mindig független, de ℓ-től függhet

↑ H speciálisan egyiktől sem függ

- Δ operátor szögfüggő része igazából a teljesimpulzusmomentum ($\vec{L}$) ~~tagot~~ tartó négyzetéhez tartozó operátor. ℓ: pályaimpulzusmomentum
- m: $\vec{L}$ „z" komponense

$$\left.\begin{aligned} L^2 &= \hbar^2 \ell(\ell+1) \\ L_z &= m\hbar \end{aligned}\right\}$$ L_z nem mérhető egyszerre L_x, L_y-nal ⇒

ezért $m = \ell$ esetén sem lesz $L_z^2 = L^2$ pontosan,

hanem L^2 egy kicsivel nagyobb lesz

Saját impulzusmomentumnál → $S^2 = \hbar^2 s(s+1)$

$s = \frac{1}{2}$ ↑ $\quad S_z = s \pm \frac{1}{2}\hbar$

Teljes impulzusmomentum = Saját + Pályaimpulzusmomentum

$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ ↓ j, m ↘ $J^2 = \hbar^2 j(j+1)$

$J_z = m\hbar$

1 db e^--ra: $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots$

Energiaszintek finomszerkezete

→ kvantummechanika + relativitáselmélet

→ Dirac-egyenletből az energiaszintek:

$$E = mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\alpha Z)^2}{\left(n-j-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-(\alpha Z)^2}\right)^2}}}-1\right\}$$

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots$

↓

$j = \frac{1}{2}$ esetén: $\sqrt{1-(\alpha Z)^2}$ → 137 töltésű atommag problematikus lenne már (eddig a max 118 volt)

↳ magyon nem lenne stabil...

- fejtsük sorba!

$E \approx ?$

$$n-j-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-(\alpha Z)^2} \approx n-j-\frac{1}{2}+\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha Z^2}{2\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}\right) = n-\frac{(\alpha Z)^2}{2\left(j+\frac{1}{2}\right)}$$

↓ ^2

$$(\dots)^2 \cong n^2 - n\frac{(\alpha Z)^2}{j+\frac{1}{2}}$$

$$E \approx \underbrace{-\frac{m_e c^2}{2n^2}(\alpha Z^2)}\underbrace{\left\{1+\frac{(\alpha Z)^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)\right\}}$$

$$\frac{-m_e}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}$$

↓ finomszerkezet

pl. H-atomra:

$n=1$, $\ell=0$, $j=\frac{1}{2}$

$n=2$, $\ell=0,1$, $j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ⇒ ez már kétfelé hasad (eltérés kb $\frac{1}{30000}$ x-es)

„Relativisztikus korrekció", „spin-pálya-kölcsönhatás", „Darwin-tag"

↳ történetileg ezen korrekciókkal látták el az eredeti Schrödinger-egyenletet, amiből kijött a finomszerkezet, de csak a sorfejtett tag, nem a pontos Dirac-egyenletből származtatott tag.

1, Relativisztikus korrekció

$\hat{O}|v\rangle = \lambda|v\rangle$

perturbáció ↓

$\hat{O} + \delta\hat{O}; \quad \lambda + \delta\lambda$

$\delta\lambda = \langle v|\delta\hat{O}|v\rangle$

Ψ_1, Ψ_2

↓

$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1^* \Psi_2 \, d^3r$

$\delta\lambda = \int \Psi^* \delta\hat{O} \Psi \, d^3r$

(önadjungált operátorok !)

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$(\underline{\underline{A}} + \delta\underline{\underline{A}})(\underline{v} + \delta\underline{v}) = (\lambda + \delta\lambda)(\underline{v} + \delta\underline{v})$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \delta\underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \underline{\underline{A}}\,\delta\underline{v} + \cancel{\delta\underline{\underline{A}}\,\delta\underline{v}} =$

$= \lambda\underline{v} + \lambda\delta\underline{v} + \delta\lambda\,\underline{v} + \cancel{\delta\lambda\,\delta\underline{v}}$

$\cancel{\lambda\underline{v}} + \delta\underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \underline{\underline{A}}\,\delta\underline{v} = \cancel{\lambda\underline{v}} + \lambda\delta\underline{v} + \delta\lambda\,\underline{v}$

$\underline{v}\cdot\delta\underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \underline{v}\,\underline{\underline{A}}\,\delta\underline{v} = v^2\delta\lambda + \underline{v}\,\delta\underline{v}\,\lambda$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\underline{v}$

↓

$$\boxed{\delta\lambda = \frac{1}{v^2}\,\underline{v}\,\delta\underline{\underline{A}}\,\underline{v}}$$

1, $E = \frac{p^2}{2m} - \underbrace{\frac{p^4}{8m^3c^2}}_{\text{kis korrekció}} + (\dots)$ ← $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$ sorbafejtése

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$

↓

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\left(-\frac{1}{2mc^2}\right) + V(r)$

↓

$(E - V(r))^2$

$\delta\hat{H}$

$\delta E_{rel.} = \int \Psi^*_{nlm}\, \delta\hat{H}\, \Psi_{nlm}\, d^3r =$

$\pm \cancel{\frac{mc^2\alpha^4 Z^2}{2n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)}}$

$$\Delta E_{rel.} = -\frac{mc^2\alpha^4 Z^2}{2n^3}\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$$

2, Spin-pálya kölcsönhatás

→ mozgó e⁻ rendszeréből nézve a magnak van mágneses tere is, ami visszahat a spinre

$$\underline{B} = \frac{\underline{v}}{c^2} \times \underline{E} \; ; \quad \underline{E} = -\frac{\underline{r}}{r^3} \cdot \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\underline{B} = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{L}}{m_e c^2 r^3}$$

$$\underline{\mu}_e = g\frac{e}{2m_e} \cdot \frac{\hbar}{2}\underline{S} \rightarrow \underbrace{E}_{\text{energia}} = -\underline{\mu}\,\underline{B}$$

$$B = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} g \frac{\underline{L}\cdot\underline{S}}{2m_e^2 c^2 r^3} \cdot \frac{1}{2}$$

↳ bónuszkifut lejön : Thomas-precesszió

↓

ha : relativisztikus sebességösszeadás

$\underline{S}$: spin-impulzusmomentum

$\underline{L}$: pálya-impulzusmomentum

$$\underline{J}^2 = \hbar^2 j(j+1)$$
$$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$$
$$S^2 = \hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \frac{3}{4}$$

$$\underline{L}\,\underline{S} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{(\underline{L}+\underline{S})}_{\underline{J}}^2 - L^2 - S^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)$$

$$\Delta E^{LS}_{n,j=l+\frac{1}{2}} = l\,\gamma_{n,l}$$

$$\Delta E_{n,j=l-\frac{1}{2}} = -(l+1)\gamma_{n,l}$$

$$\gamma_{n,l} = \frac{mc^2 Z^2 \alpha^4}{2n^3} \cdot \frac{1}{2l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad \text{ha } l \neq 0$$

↳ ha $l=0$, nincs $\underline{L}\,\underline{S}$.

3, Darwin-tag

- $l=0$-s ~~tag~~ esetben van

→ elektron „reszkető" mozgása van ⇒ elkerüli pályán mozog és kicsit eltolja az $l=0$-s pályát (e⁻ rendszeréből az atommag mozdul el ⇒ potenciál változik)

→ „Zitterbewegung"

→ Ha a 3 korrekciót összeadjuk ⇒ megkapjuk a Dirac-egyenlet megoldásának sorfejtését.

Hiperfinom - felhasadás

↳ mag spinjének és az elektron spinjének kölcsönhatása

↳ proton: $\mu_p = g_p \frac{e}{2m_p} \cdot \frac{\hbar}{2}$ $(g_p = 5{,}59)$

$$\underline{\mu}_p = g_p \frac{e}{2m_p} \underline{S}_p$$

p↑ ↕e → $\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\underline{\mu}\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{\mu}}{r^5}$

$\Delta E \sim \underline{S}_p \underline{S}_e$ - nem mindegy, hogy a két spin egy vagy különböző irányba mutat

⇓

ezekhez is tartozik tehát 2 külön állapot, ami a hiperfinom felhasadást

$\Delta E_{hiperfinom} = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_e}{m_p} \alpha^4 m_e c^2 g_p \approx 5{,}88 \cdot 10^{-6}\,eV$

Hidrogénnél: 1420,2 MHz

↓

az ehhez tartozó egyéb-hossz : 21cm kb.

(Pioneer űrszondán ezt az egyéget használták)

↳ 

Cézium - 133 2 hiperfinom energiaszintje közötti frekvenciával van definiálva a másodperc.

Lamb - féle eltolódás (Lamb-shift)

állapot jelölés: nl_j

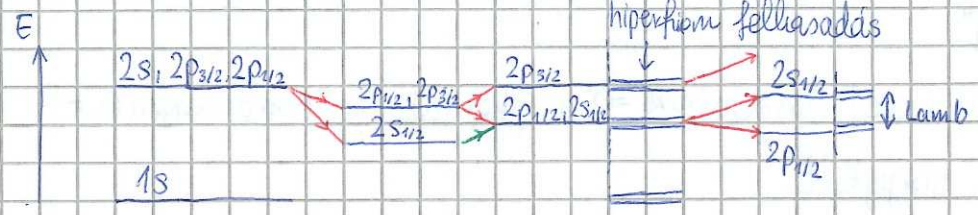
$l = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$s\ p\ d\ f\ g \ldots$

$j = l \pm \frac{1}{2}$ → $l=0$-ban csak $\frac{1}{2}$ lehet

$1S \Leftrightarrow n=1,\ l=0,\ j=\frac{1}{2}$

$2P_{3/2} \Leftrightarrow n=2,\ l=1,\ j=\frac{3}{2}$



Schrödinger Rel. Korr. LS, Dirac Lamb

Lamb shift : $2p_{1/2} \neq 2s_{1/2}$ Megjegyzés: teljesen ugyanaz kvantumelektrodinamika magyarázta meg

(vákuum: Opcionális energiája van, a fotonok kölcsönhatnak az elektronokkal)

$2s_{1/2}$ hosszú élettartamú állapot!

$\downarrow T_{1/2} \sim 0{,}1\,s$

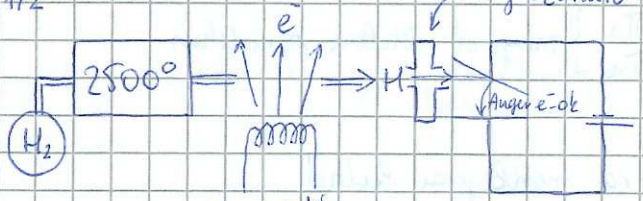
$1s_{1/2}$

$2p_{1/2}$

$\downarrow T_{1/2} \sim 10^{-9}\,s$

$1s_{1/2}$

pl.



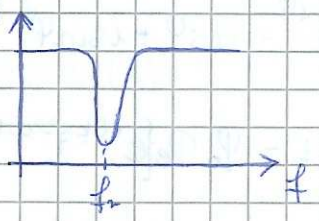
gerjesztés

↓ $2p_{1/2}$ gyorsan elbomlik

$2s_{1/2}$ csak lassan, még nem is bomlik el

- az elektródából a gerjesztett atomok e^--okat löknek ki, a keletkező áram arányos a hosszú gerjesztett H-ek számával
- üregrezonátor frekvenciával pont eltoljuk az Lamb-féle energiakülönbséget akkor gerjesztődnek a H-ek $2p_{1/2}$-be, így gyorsan el tudnak bomlani ⇒ áram csökken

$f_r = 1057{,}845\ MHz$



* $\mu_e = g \frac{e}{2m_e} \frac{\hbar}{2}$ $g = 2$

↖ Pontosan kijön a Dirac-egyenletből

de $g \approx 2$ → ennek is kvantumelektrodinamikai okai vannak

Hullám és részecske - dualitás

2015.11.06.

1, Hullám

- interferenciaképesség
- térben - időben periodikus változás

$$\Psi(\underline{x},t) = \underline{\Psi}_0 \cos(\underline{k}\underline{x} - \omega t + \delta(\underline{k}))$$

$\underline{k}$: hullámvektor

$\underline{k}\underline{x} \Rightarrow 2\pi n$
$\omega t \Rightarrow 2\pi n$
} ennyivel eltolva periodikus

- periodicitás $\underline{k}$-ra merőlegesen halad

$$x_{\parallel} = \underline{k}\,\underline{x}$$

$$\Delta x_{\parallel} = 2\pi n \frac{1}{|k|} = n\lambda$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$$ hullámhossz

- hasonlóan:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} n = nT \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$ periódusidő

- Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\Psi(\underline{x},t) = \underline{\Psi}_0 \operatorname{Re}\{e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t + \delta(\underline{k}))}\}$$

- Hullámintenzitás

$$J(\underline{x},t) \sim \underline{\Psi}(\underline{x},t)^2$$

↳ periódusidőre vett átlag:

$$J^T = \frac{1}{T}\int_0^T J(\underline{x},t)\,dt = \underline{\Psi}_0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\underline{\Psi}_0^*(\underline{x},t)\,\underline{\Psi}_0(\underline{x},t)$$

Complex amplitúdókat használva az exponensek megegyszerűsítik egymást, csak $\underline{\Psi}_0$-ak maradnak

$\underline{k}\underline{x}_0 + \omega t_0 + \delta(\underline{k}) = \underline{\Phi}_0$ adott $\underline{x}_0, t_0$ helyen

$$\underline{k}(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}) - \omega(t_0 + \Delta t) + \delta(\underline{k}) = \underline{\Phi}_0$$

$$\underbrace{\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\Delta x}}_{} - \omega \Delta t = 0$$

$$|k| \Delta x_{\parallel} = \omega \Delta t$$

$$\frac{\omega}{|k|} = \frac{\Delta x_{\parallel}}{\Delta t}$$

~ sebesség → állandó fázisú pontok sebessége ⇒ fázissebesség

Szuperpozíció

$$\underset{\sim}{\Psi}_{01} e^{i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_1(\underset{\sim}{k}))} + \underset{\sim}{\Psi}_{02} e^{i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_2(\underset{\sim}{k}))} = \underset{\sim}{\Psi}_{\text{ö}}(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$J^T = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\Psi}_{01} e^{-i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_1(\underset{\sim}{k}))} + \underset{\sim}{\Psi}_{02} e^{-i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_2(\underset{\sim}{k}))}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\underset{\sim}{\Psi}_{01} e^{i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_1(\underset{\sim}{k}))} + \underset{\sim}{\Psi}_{02} e^{i(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} - \omega t + \delta_2(\underset{\sim}{k}))}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\Psi}_{01}^2 + \underset{\sim}{\Psi}_{02}^2 + \underset{\sim}{\Psi}_{01}\underset{\sim}{\Psi}_{02} e^{-i(\delta_1(\underset{\sim}{k}) - \delta_2(\underset{\sim}{k}))} + \underset{\sim}{\Psi}_{01}\underset{\sim}{\Psi}_{02} e^{i(\delta_1(\underset{\sim}{k}) - \delta_2(\underset{\sim}{k}))}\right) =$$

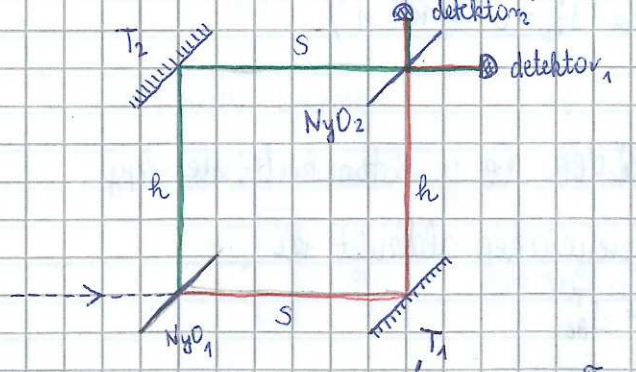
$$= J_1^T + J_2^T + \overbrace{\underset{\sim}{\Psi}_{01}\underset{\sim}{\Psi}_{02} \underbrace{\cos(\delta_1(\underset{\sim}{k}) - \delta_2(\underset{\sim}{k}))}}^{\text{Interferenciatag}}$$

$+1$ ↙ ↘ -1

konstruktív interferencia — destruktív interferencia

Interferométerek

- Mach - Zehnder (1891-92) interferométer



tükör: $\underset{\sim}{\Psi}_0 \to \underset{\sim}{\Psi}_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$

Nyo = nyalábosztó = felezi az intenzitást

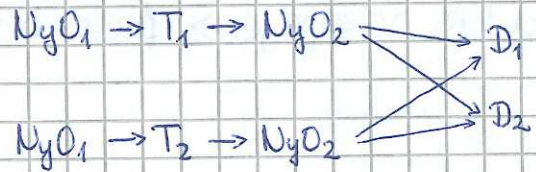
↳ $\underset{\sim}{\Psi}_0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{\Psi}_0$ továbberesztett

$\frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{\Psi}_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$ tükrözött

Részecskeképben nézve:

$$P_{D_1} = P_{D_2} = \frac{1}{2}$$

Hullámképet értelmezve az eredmény más!



$$D_1: \underline{\Psi}_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{iks} e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ikh} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ikh} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{iks} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$= -\underline{\Psi}_0 \frac{1}{2} e^{ik(s+h)} (1+1) = -\underline{\Psi}_0 e^{ik(s+h)}$$

$$J_{D_1}^T = J_{Be}^T$$

$$D_2: \underline{\Psi}_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{iks} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} e^{ikh} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\searrow} e^{ikh} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\downarrow -i} e^{iks} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\swarrow} \right] = 0$$

$$J_{D_2}^T = 0$$

- Teljesen különböző eredményhez jutottunk a részecskekép és a hullámkép alapján számolva.
- Eredetileg anyagok törésmutatójának vizsgálatára használták ezt az interferométert (egyik út n törésmutatójú anyagban, a másik vákuumban halad)
- Intenzitáskontraszt:

$$K = \frac{J_{D_1}^T - J_{D_2}^T}{J_{D_1}^T + J_{D_2}^T} \quad (\text{pl.: ha } J_{D_2}^T = 0 \Rightarrow K = 1)$$

- 1986: A. Aspet: egyesével lőtték le a fotonokat, de így is interferenciakép alakult ki

$$J_{D_1}^T = J_{Be}^T$$

$$J_{D_2}^T = 0$$

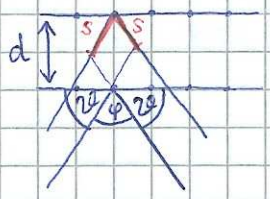
Kristályinterferométer

1912 - M. Laue (röntgensugárzás Ni egykristályra)

↓

röntgensugárzás hullámhossza ~ Ni rácsállandója

Bragg-képlet:



kristálysíkok

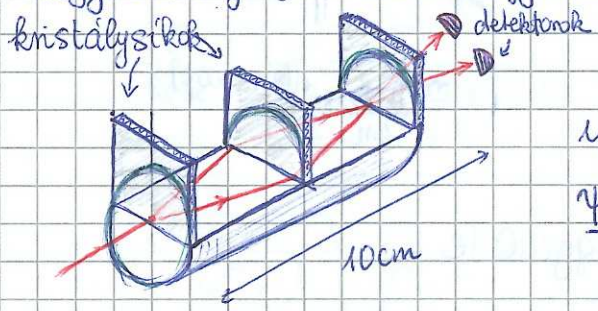
$2s$: geometriai útkülönbség

$$2s = 2d\cos\frac{\varphi}{2} = 2d\sin\vartheta$$

ha $2kd\sin\vartheta = 2\pi u$ ⇒ erősítés

$$\boxed{2d\sin\vartheta = u\lambda}$$

- Egykristály (növesztett egykristály)



neutroninterferenciát mutattak ki

$\Psi(\underline{x},t)$ ⇒ terjedési amplitúdó (univerzális)

$\int$

$e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t + \delta)}$

- de Broglie (1924)
  - $E_{mech} \leftrightarrow h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$
  - $p_{mech} \leftrightarrow \hbar\underline{k}$
    - $|p| = \frac{h}{\lambda}$

- Davisson-Germer
  - elektronokat engedett Nikkel egykristályra

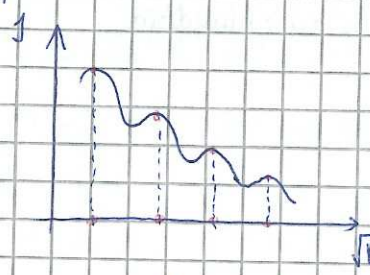


$\Theta = 50°$ állandó szög mellett

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = |e|U_{gyorsító} \rightsquigarrow p = \sqrt{2m|e|U} = \frac{h}{\lambda}$$

- diszperziós összefüggés: a hullámszám és a frekvencia közötti összefüggés
- a hullámhossz

- tapasztalat:



$$\nabla_x e^{i(\underline{k}x - \omega t)} = i\underline{k} e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(\underline{k}x - \omega t)} = -i\omega e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

- $\omega(\underline{k})$ - diszperziós reláció
- szabad mozgó részecske $\rightarrow E_{mech} = \frac{p^2}{2m} = \boxed{\frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m} = \hbar\omega}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\underline{k}x - \omega t)} = \hbar\omega e^{i(\underline{k}x - \omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

$$= -\frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m} e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

$\Downarrow$

Szabad mozgás Schrödinger egyenlete

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\underline{k}x - \omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

$\downarrow$

általánosan

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Psi}(\underline{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \underline{\Psi}(\underline{r}, t)}$$

állandó potenciális energia: V_0

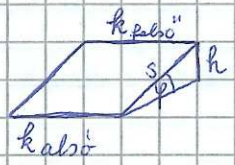
$\hookrightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m} + V_0$

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_0 \right) \underline{\Psi}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

Colella, Overhauser, Werner kísérlet

- hasonló a neutronos kísérlethez, de forgatható
- a trapéz egyik ága feljebb lesz, mint a másik



$$h = s \cdot \sin\varphi$$

$$V_0 = mgh$$

$$k_{alsó} = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{\hbar} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$$

$$k_{felső} = \sqrt{\frac{2m(E-mgs\sin\varphi)}{\hbar^2}}$$

⇕ különböznek

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k_{alsó}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{felső}^2}{2m} + mgs\cdot\sin\varphi$$

$\Delta\phi = (k_{alsó} - k_{felső})\,\ell$ fáziskülönbség

$$k_{alsó}^2 - k_{felső}^2 = 2m^2 gs\sin\varphi \rightarrow k_a - k_f \approx \frac{m^2 gs\sin\varphi}{k_{átlag}}$$



(különböző potenciálokon haladó azonos energiájú részecskék hullámhossza különbözik ⇒ interferencia változik)

Sugárzási tér termodinamikája

- Kirchoff: termikus egyensúly feltétele

$$A\, I_{be} = I_{emittált}$$

(A: abszorpciós együttható)

- Abszolút fekete test: $A = 1$

sugárzás energiasűrűsége: ϱ

s_{be} : beeső energiasűrűség

$I_{be} = s_{be} \cdot c$

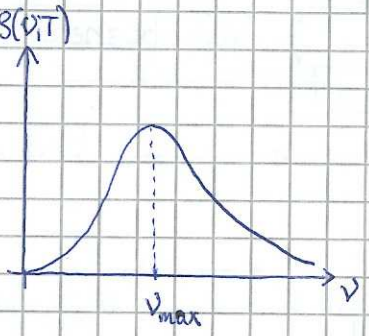
függ a hőmérséklettől

$$s(T) = \int_0^\infty d\nu \; s(\nu, T)$$

spektrális sűrűség

1, Stefan : $s(T) = \sigma T^4$ } 1876.
Boltzmann

2,



Wien $\Rightarrow \frac{\nu_{max}}{T} =$ állandó

3, 1899. Lummer, Pringsheim

- tükröző falú edény termosztátban
- kis nyílással
- nagy pontossággal mutatták meg a mérés görbéit az energiasűrűségre

4, Max Planck ezen mérés alapján próbálta meg elméletileg levezetni a görbéket

- ideiglenesen bevezette a kvantálást, hogy végig tudja számolni a problémát

2015.11.13.

Termikus egyensúlyban lévő elektromágneses sugárzás

energiasűrűség: $\mathcal{S}(T) = \sigma T^4 = \int_0^\infty \mathcal{S}(\nu, T)\, d\nu$

$\mathcal{S}(\nu, T)$: Spektrális energiasűrűség

$d\nu\, \mathcal{S}(\nu, T) = \overline{\mathcal{E}(\nu, T)} \cdot N$ átlagos energia

N: $(\nu, \nu + d\nu)$ közötti módusok száma

$h\nu = \hbar\omega \leftrightarrow E$

$\overline{\mathcal{E}(\nu)}^T$ hőmérséklettel vett átlag ν frekvencián

$\mathcal{E}(\nu) = n h\nu \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$

Boltzmann-elv: $P(n) = C \cdot e^{-\frac{\mathcal{E}(\nu)}{k_B T}}$

$P(n)$: n. energiaszint valószínűsége

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$$

$$P(n) = C\left(e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right)^n \qquad \frac{h\nu}{k_B T} = \xi$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 = C\left(1 - e^{-\xi}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{E}(\nu)}^T = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, n h\nu}_{\langle n \rangle} = \langle n \rangle h\nu = \underline{\underline{h\nu \left(e^{+\xi} - 1\right)^{-1}}}$$

- $\xi \ll 1 \leftrightarrow h\nu \ll k_B T$

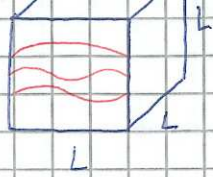
$$\overline{\mathcal{E}(\nu)}^T \approx \frac{h\nu}{\xi} = k_B T = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$$

($\frac{1}{2} k_B T$: elektromos térerő; $\frac{1}{2} k_B T$: mágneses indukció)

(oszcillátor: $\overline{\mathcal{E}(\nu)}^T = k_B T$; $E_{kin} + E_{pot}$; $\frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$)

- $\xi \gg 1 \quad h\nu \gg k_B T$

$$\overline{\mathcal{E}(\nu)}^T \approx h\nu\, e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$



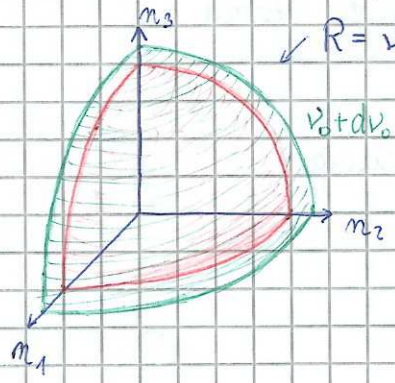
↓

módusok: állóhullámok

$$\frac{\pi}{L} n_i = k_i \longleftrightarrow \nu = \frac{c}{2L}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)^{1/2}$$

$$\omega = ck = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

$\nu_{max} = \nu_0 > \nu$: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \left(\frac{2L}{c}\right)^2 \nu_0^2$



↙ $R = \nu_0 \frac{2L}{c}$ sugarú gömb

$\nu_0 + d\nu_0$ → egész koordinátájú pontok száma kell

$$N(\nu_0 + d\nu) = N(\nu_0) + n(\nu_0)\,d\nu$$

$$n(\nu_0)\,d\nu = N(\nu_0 + d\nu) - N(\nu_0) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8}\left[(\nu_0 + d\nu)^3 - \nu_0^3\right]\left(\frac{2L}{c}\right)^3$$

↓

minden egyes frekvenciához a polarizáció miatt két módus tartozik (kétfajultság)

$$n(\nu_0)\,d\nu \approx \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 3\nu_0^2\,d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\nu_0^2 L^3 d\nu$$

↓ térfogat!

$$\Rightarrow \boxed{\varrho(\nu,T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi}{c^3}\nu^2}$$

↑ polarizáció miatt

L^3-bel leosztottunk, mert sűrűséget kézünk

Rayleigh-Jeans (kis frekvencián):

$$\varrho(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \cdot \nu^2$$

Wien-törvény (nagy frek.):

$$\varrho(\nu,T) = h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \cdot \frac{8\pi}{c^3}$$

$$\frac{d\varrho(\nu,T)}{d\nu} = 0 \longleftrightarrow \nu_{max}$$

$\left(\frac{k_B^3 T^3}{h^2} \cdot \frac{8\pi}{c^3} \frac{\xi^3}{e^\xi - 1}\right.$ maximumát kell keresni$\left.\right)$

↳ $\xi_{max} = 2{,}82$

Wien - féle eltolódási törvény

$$\boxed{\nu_{max} = 2{,}82 \cdot T \cdot \frac{k_B}{h}}$$

$$S(T) = \frac{k_B^3 T^3}{h^2} \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty d\xi \frac{k_B T}{h} \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} = \underbrace{\sigma T^4}_{\text{Steffan - Boetzmann tv}}$$

arány kijön innen is

$$\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{8\pi}{} \cdot \frac{2\pi^4}{15}$$

Kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás

- "Ősrobbanás": Gamow (1945-48)

↓

extrapolálva az elméletet: Hubble + Einstein, de Sitter

↓ tágulló Univerzum

$$\boxed{a(T) \cdot T = áll.}$$

- $T = 3000\,K$: H-atom stabil rekombináció

↓

  - hiperfinom felhasadás (proton - elektron spinbeállás)
  - megszűnik a termikus egyensúly a sugárzás és az anyag között a rekombinációval
  - a volt 3000 K-es sugárzás ezek után saját életet él, a tágulással fordított arányban csökken, ma:

$$T_{CMB} = 2{,}725 \pm 0{,}002\ K \quad (1992) \quad \rightarrow \text{Mather}$$

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5} \quad \text{ingadozás} \quad \rightarrow \text{Smoot}$$

Foton

impulzus: $\underline{p} = \hbar \underline{k} = \frac{\hbar\omega}{c} \hat{\underline{k}} = \frac{E}{c} \hat{\underline{k}}$

energia: $\left.\begin{aligned} pc &= E \\ E &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \end{aligned}\right\} m_\gamma = 0$

$\underline{F} = \frac{\Delta \underline{p}}{\Delta t}$ foton erőt tud kifejteni ütközéskor

$\underline{F}_{abs} = ?$

(gerjesztés gyorsan összeállhat)

↳ $\tau = 10^{-8}\,s$

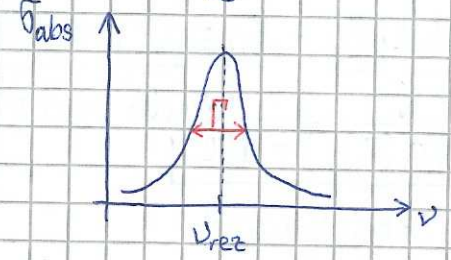
$\underline{F}_{abs} = \underbrace{n_{abs}}_{\text{fotonok sűrűsége}} \cdot c \cdot \hbar\underline{k} \cdot \underbrace{\sigma_{abs}}_{\text{abszorbciós hatáskeresztmetszet}}$

$\downarrow \frac{1}{c\cdot\hbar\omega}$

$\underline{F}_{abs} = \sigma_{abs}\frac{1}{c}\hat{\underline{k}}$

→ rezonáns elnyelés ($\hbar\omega_{rez} = E_{gerjesztett} - E_{alap}$)

$\sigma_{abs} \sim \frac{\Gamma}{2}$, ahol $\Gamma^{-1} \sim \tau = 10^{-8}\,s$



$$\boxed{\underline{F}^{rez}_{atom\ 1\,foton} \cong \frac{\Gamma}{2}\hbar\underline{k}} \rightarrow \underline{a}_{atom} = \frac{\Gamma}{2M_{atom}}\frac{E_g - E_a}{c}\underline{k}$$

pl. Na - ra

$a_{Na} = 9\cdot 10^5\ \frac{m}{s^2}$

- $10^3\ \frac{m}{s}$ mozgó atomokat így 1-2 m alatt lehet megállítani ($\frac{v_0^2}{2a} = L_{le}$)
- Doppler-hatás: $\omega_{eff} = \omega_{rez}\left(1 - \frac{v(z)}{c}\right)$ z irányban mozogva
  - ↳ folytonosan hangolható festéklézer
  - ↳ Phillips: 1983 (először más módszerrel)

$$\frac{v_0^2 - v^2(z)}{2a} = z$$

$$\frac{v(z)}{v_0} = \left(1 - \frac{z}{L_{le}}\right)^{1/2}$$

$$\omega_{eff} = \omega_{rez}\left(1 + \frac{v_0}{c}\left(1 - \frac{z}{L}\right)^{1/2}\right)$$ egyenletesen változik

- Zeemann-effektus (mágneses térben)

$E(B) = E_0 - \mu B$

↑ alapállapot energiaszintje mágneses tér nélkül

$E_{geri\pm} = E_{go\mp} \mp \mu_{\parallel} B$

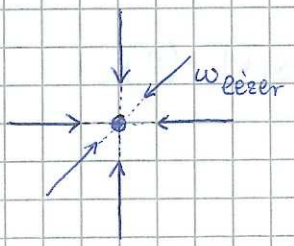
$E_{a\pm} = E_{ao} \mp \mu_{\parallel} B$

} spindállások miatt különbségek vannak az egyes szinteken

$$E_{g-} - E_{a+} = \underbrace{E_{go} - E_{a_0}}_{\text{rezonancia } \hbar\omega_{rez}} + 2\mu_{\parallel} B(z) = \hbar\omega_{rez}\left(1 + \frac{v_0}{c}\left(1 - \frac{z}{L}\right)^{1/2}\right)$$

Chu - Doppler-hütési technika

- Mágneses csapda (atomokat fog be)
- keresztező lézersugarak mindkét irányból



- hangolás → $\omega_{lézer} < \omega_{rez}$

↓ álló atomok nem tudják elnyelni

↓ a mozgó atomok azonban:



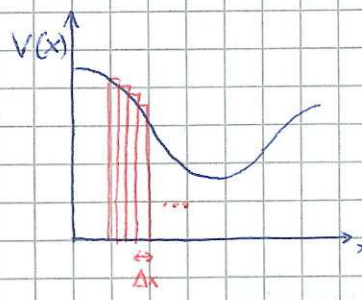
a lassító erő nagyobb lesz, mint a gyorsító

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0\right)\underline{\Psi}(x,t)$$

$$\underline{\Psi}(x,t) = e^{i\underline{k}x - i\omega t}$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0$$

$V(x)$ tetszőleges potenciál



⇒ szakaszosan konstans potenciál közelítés

↓

szakaszonként meg tudjuk oldani

→ határfeltétel ?

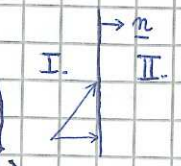
$$\underline{\Psi}(x,t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} g(x)$$ stacionárius megoldás

$$Eg(x)\cancel{e^{-i\omega t}} = \cancel{e^{-i\omega t}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0\right)g(x)$$ (másodrendű differenciálegyenlet)

- Mi a határfeltétel?

$$g(\underline{x}_{F,1}) = g(\underline{x}_{F,2})$$

$$\underline{n}\nabla g(\underline{x}_{F1}) = \underline{n}\nabla g(\underline{x}_{F2})$$



→ folytonossági feltételek

↳ ha korlátos a potenciál

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(\underline{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{x})\right)\Psi(\underline{x},t) \qquad (1)$$

Megmaradási tétel

- komplex konjugáció:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*(\underline{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{x})\right)\Psi^*(\underline{x},t) \qquad (2)$$

$\Psi^* \cdot (1)$, $\Psi \cdot (2)$

$$i\hbar\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\right) = i\hbar \frac{\partial |\Psi(\underline{x},t)|^2}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Psi^*(\underline{x},t)\Delta\Psi(\underline{x},t) - \Psi(\underline{x},t)\Delta\Psi^*(\underline{x},t)\right] =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\left[\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial |\Psi(\underline{x},t)|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)$$

$$\frac{\partial |\Psi(\underline{x},t)|^2}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_\rho = 0} \sim \text{kontinuitási egyenlet}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \varrho + \int_{\partial V} d\underline{F}\, \underline{j}_\rho = 0$$

Értelmezés:

- $|\underline{\Psi}(\underline{x},t)|^2$ = valószínűségi - sűrűség

  $|\underline{\Psi}(\underline{x},t)|^2 \Delta V$ = valószínűség

- valószínűségi áramsűrűség:

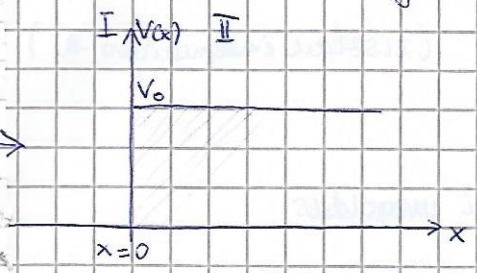
$$\underline{j}_p = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi(\underline{x},t)\,\underline{\nabla}\Psi^*(\underline{x},t) - \underline{\Psi}^*(\underline{x},t)\,\underline{\nabla}\Psi(\underline{x},t)\right)$$

↳ síkhullám - megoldásban $\underline{j}_p$ időfüggetlen = stacionárius

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(-i\underline{k} - i\underline{k}\right) = \frac{\hbar\underline{k}}{m} = \frac{\underline{p}}{m} \rightarrow$$ visszakaptuk a sebességet klasszikus értelmezésben

2015. 11. 20.

Dimenziós Schrödinger feladatok



Szórás-feladat

$\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$

$\downarrow$ $j_{val} = \frac{\hbar k}{m} = v \rightarrow$ $n\frac{\hbar k}{m} = nv = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$

$\Uparrow$ $\qquad\qquad\qquad

2) $E < V_0$

$$E = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V_0 \rightarrow k' = \pm i\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \pm i\cdot\varkappa \quad \text{(tisztán imaginárius } k'\text{)}$$

$$e^{ik'x} = e^{i(\pm i\varkappa)x} = e^{\mp \varkappa x} \rightarrow e^{\varkappa x} \xrightarrow[-\infty]{x} \infty \quad \text{Ø fizikai megoldás}$$

$\Rightarrow k' = i\varkappa$: exponenciális csökkenő az amplitúdó x-el ✓

$j_{át} = 0$, hiszen $\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$, mert tisztán valós a ψ

$$\rightarrow B = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa} A$$

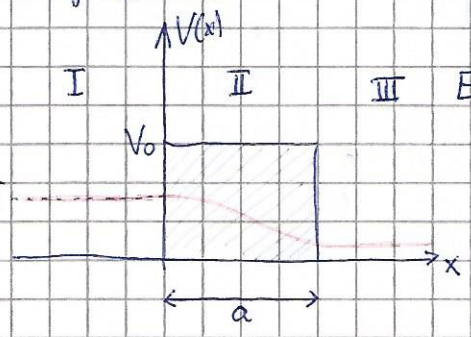
$$j_{vissza} = \frac{\hbar k}{m}\left|\frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa}\right|^2 \cdot |A|^2 = j_{be} \quad \text{(teljes visszaverődés)}$$

$\left|\frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa}\right| = 1$

fázistolás

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varkappa}{k} \Rightarrow B = Ae^{-2i\delta}$$

Alagúteffektus



$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
$$\psi_{II} = Ce^{-\varkappa x} + De^{\varkappa x}$$
$$\psi_{III} = Ee^{ikx} + Fe^{-ikx}$$

Ø visszaverődés ∞-ből

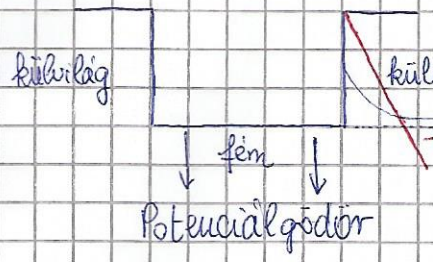
folytonosság $x = 0$-ban és $x = a$-ban

$$j_{alagút} = |E|^2\frac{\hbar k}{m} = t_a \cdot j_{be}$$

$$t_a = \frac{|E|^2}{|A|^2} \quad (\ll 1) \qquad E_{be} \approx \frac{2k}{k + i\varkappa}Ae^{-\varkappa a} \Rightarrow \boxed{t_a \approx \frac{4k^2}{k^2 + \varkappa^2}e^{-2\varkappa a}}$$

fémek:

belsejében az elektronok szabadon mozognak, fémből ø jönnek ki magukból



Potenciálgödör

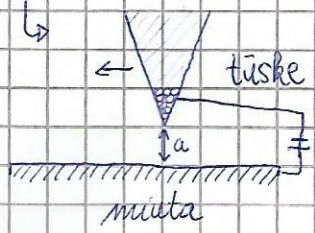
$V = -\bar{E}x$ kapcsolunk be

⇒ „elvékonyodik a fal, minél nagyobb E_i annál ~~nagyobb~~ vékonyabb a fal

⇓

elektronok kijuthatnak; téremisszió

pásztázó elektronmikroszkóp



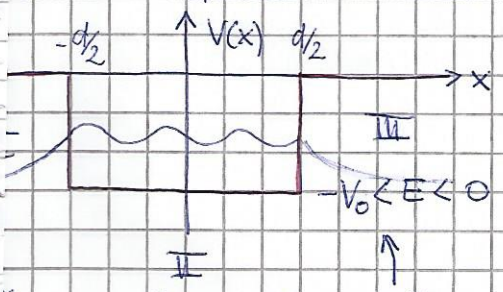
tüske → vége olyan hegyes, hogy 1-2 atom vastagságú

potenciálkülönbséget kapcsolunk a kettő közé ⇒ alagúteffektus miatt áram indul

$$j \sim \varrho_{elektron}\, e^{-2\kappa a}$$

állandó „a" mellett ⇒ elektronsűrűség } anyagszerkezet
állandó áram mellett — " — }

Kötött állapot kialakulása (gyakorlaton sose)



$$\to B e^{ikx} + C e^{-ikx} \to D e^{-\kappa x}$$

fázistolás: $kd - 2\delta + kd - 2\delta \overset{!}{=} n \cdot 2\pi$ ⇒ ekkor van konstruktív interferencia

(tőle oldalt teljes visszaverődés)

⇓ állóhullámok

$$\delta = \frac{kd - n\pi}{2}$$

$$tg\delta = tg\left(\frac{kd}{2} - \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\kappa}{k}$$

n = páros $\qquad$ n = páratlan

$$tg\frac{kd}{2} = \frac{\kappa}{k} \qquad ctg\frac{kd}{2} = -\frac{\kappa}{k}$$

$$\left(k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}\right)$$

→ kvantált energia

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |A|^2 \cdot \left| e^{ikx - i\omega t} \right|^2 \Rightarrow \infty \quad \Rightarrow \text{ez igazából ø fizikai}$$

fizikai állapotra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

→ <u>Hullámcsomag</u>:

$$\Psi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ikx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} A(k_1) e^{ik_1 x}}_{\Psi(x,t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} A(k_2)^* e^{-ik_2 x}}_{\Psi^*(x,t)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, A(k_1) A(k_2)^* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x}}_{\delta(k_1 - k_2)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} A(k_1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, A(k_2)^* \delta(k_1 - k_2)}_{A(k_1)^*} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} |A(k_1)|^2 \overset{!}{=} 1$$

$$\downarrow \qquad (dp = \hbar\, dk_1)$$

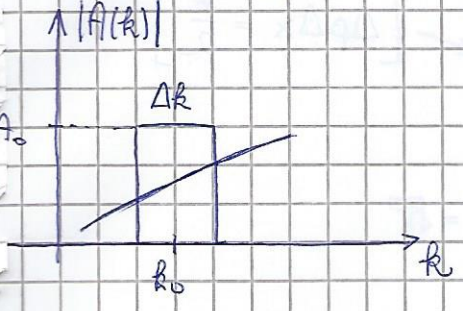
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar\, dk_1}{2\pi\hbar} |A(k_1)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{1}{2\pi\hbar} |A(p_1)|^2 = 1$$

Ha a síkhullám fizikai lenne ⇒ lehetne határozott p vagy k

$$\mathcal{S}_{val}(x) = |\Psi(x,t)|^2$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{val}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |A(p)|^2$$

Csoportsebesség



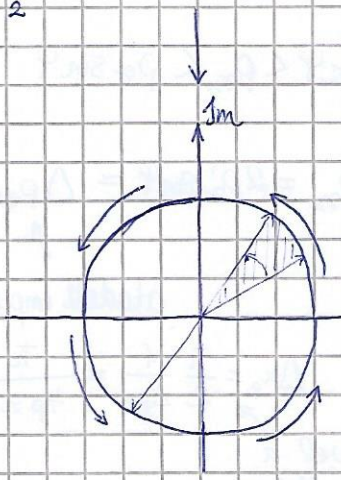
$$\Psi(x,t) = \frac{A_0}{2\pi}\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} dk\; e^{ikx-i\omega(k)t} =$$

$\downarrow \tilde{k} = k - k_0$ változócsere

$$= \frac{A_0}{2\pi}\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} d\tilde{k}\; e^{i(\tilde{k}+k_0)x - i\omega(\tilde{k}+k_0)t} \quad *$$

$$\omega(\tilde{k}+k_0) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)\tilde{k} + (\ldots) \quad \text{Tfh. lassan változik}$$

$$* \approx \frac{A_0}{2\pi} e^{ik_0x - i\omega(k_0)t}\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} d\tilde{k}\; e^{i\tilde{k}(x-\omega'(k_0)t)}$$



sokszor körbefordulhat

$\Downarrow$

integrálásban minden vektornak megeshet az ellentétje $\Rightarrow 0$

1, Ha $|x-\omega'(k_0)t| \gg 1 \Rightarrow \Psi(x,t) \approx 0$

2, Ha $x \underset{max}{\approx} \omega'(k_0)t \Rightarrow \Psi(x,t)$ maximális

$\downarrow$

$$\circ\; v_{csoport} = \left.\frac{d(\omega(k))}{dk}\right|_{k=k_0}$$

$$\Psi(x,0) = \frac{A_0}{2\pi} e^{ik_0x}\frac{1}{ix}\left(e^{i\frac{\Delta k}{2}x} - e^{-i\frac{\Delta k}{2}x}\right) = \frac{A_0}{\pi} e^{ik_0x}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{i\frac{\Delta k}{2}x} - e^{-i\frac{\Delta k}{2}x}}{2i} =$$

$$= \frac{A_0}{\pi} e^{ik_0x}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\Delta k}{2}x\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{A_0}{\pi}\frac{\Delta k}{2} = \Psi(0,0)$$

$\downarrow$ itt van maximum

$$\frac{\Delta k \cdot A_0}{2\pi} e^{ik_0x}\underbrace{\left(\frac{2}{\Delta k\cdot x}\sin\frac{\Delta k}{2}x\right)}$$

$\rightarrow$ nem 0 tartomány: Δx

$$\frac{\Delta k}{2}\Delta x \sim 1$$

$\frac{\Delta k}{2}\Delta x = \frac{\pi}{2}$

$\Delta k \Delta x \sim 2$ /· $\hbar$

$\Delta p \Delta x \sim 2\hbar$ bizonytalansági relációk ← $\left[\Delta p \Delta x = \frac{h}{2}\right]$

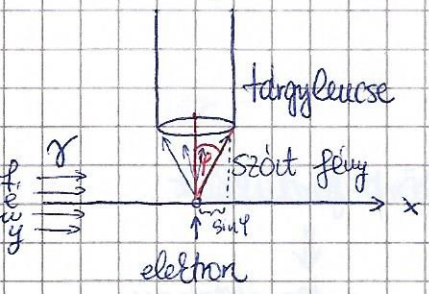
↓

$A(k) = A_0 e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}}$ Gauss-görbe $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

↓ ezzel elvégezhető az integrál → eredmény is Gauss-görbe lesz
↳ szélessége $\sim \frac{1}{\Delta k}$

($\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2\pi} A(k)\, dk$ → igazából egy Fourier-transzformáció)

Heisenberg-mikroszkóp



$-p'_\gamma \sin\varphi < p_{\gamma x} < p'_\gamma \sin\varphi$

$\Delta p_{\gamma x} = 2p'_\gamma \sin\varphi = \Delta p_{ex}$

↑ átadott impulzus az elektronnak

(|p'|=|p| rugalmas szórás)

$\Delta x_e = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta p_e} = \frac{\hbar}{4p\sin\varphi} = \frac{\hbar}{16\pi}\cdot\frac{\lambda}{\hbar}\frac{1}{\sin\varphi}$

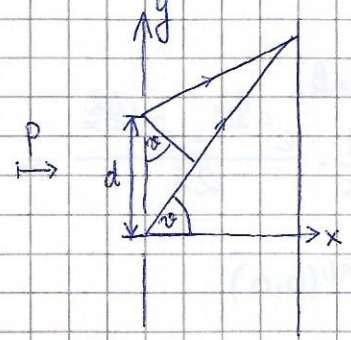
$\Delta p \Delta x = \frac{h}{2}$-vel a π-s egyszerűsítés kiesne

↑ kiesik a $\hbar$!

↓

Abbé féle reláció

Részecske-hullám dualizmus és bizonytalansági reláció



$\Delta s = d \sin v = n\lambda$

$v_{n+1} - v_n = \frac{\lambda}{d}$

melyik lyukon ment át a részecske

↓

$\Delta y = \frac{d}{2}$ ⇒ ekkor el tudom dönteni

$\Delta p = \frac{h}{2}\cdot\frac{2}{d} = \frac{h}{d}$

$\frac{\Delta p_y}{p} = \Delta \sin v \approx \Delta v = \frac{h}{d}\cdot\frac{\lambda}{h} = \frac{\lambda}{d} = v_{n+1} - v_n$

bejövő impulzus

⇒ tehát már el lehet megkülönböztetni az interferenciacsíkokat

Hullámok értelmezése:

- $|\underline{\Psi}(\underline{x},t)|^2$ = valószínűségi - sűrűség

  $|\underline{\Psi}(\underline{x},t)|^2 \Delta V$ = valószínűség

- valószínűségi áramsűrűség:

$$\underline{j}_p = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\Psi}(\underline{x},t)\,\underline{\nabla}\underline{\Psi}^*(\underline{x},t) - \underline{\Psi}^*(\underline{x},t)\,\underline{\nabla}\underline{\Psi}(\underline{x},t)\right)$$

↳ síkhullám - megoldásban j_p időfüggetlen = stacionárius

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(-i\underline{k} - i\underline{k}\right) = \frac{\hbar\underline{k}}{m} = \frac{\underline{p}}{m} \rightarrow$$ visszakaptuk a sebességet klasszikus értelmezésben

---

2015. 11. 20. KIMARAD

2015. 11. 27.

$E = -\underline{\mu}\cdot\underline{B}(\underline{x}) \rightarrow F_i = \mu_j \partial_i B_j(x)$ (Stern-Gerlach: 1922: $|B_z| \gg |B_x|, |B_y|$)

$\approx \mu_z \partial_z B_z(x)$: $B_z(z)$ helyfüggés

z: inhomogenitás iránya a mágneses térben

diszkrét értékeket (eltérülés) tapasztaltak

↳ μ_z = kvantált

↳ klasszikus eset: $\underline{\mu} = \frac{e}{2m}\underline{J}\cdot g$ (dipólus ~ körárram hatása távol) (egy elektron körpályán áll.)

gyromágneses állandó

impulzusnomentum

↳ $J_z = m\hbar$ (Bohr-modell) m egész szám: mágneses kvantumszám

$|m| \leq \ell$ (ℓ mellékkvantumszám)

↳ m $2\ell+1$ pl. db szám!

↳ mivel 2 eltérülési irányt tapasztaltak → nem lehetett emiatt, hiszen 2 az nem páratlan!

↳ 2 lehetne inkább: $J_z = \pm\frac{\hbar}{2}$ ez kell

$\underline{\mu} = g\mu_B \underline{S}$ ($\underline{S}$: $\pm\frac{1}{2}$) ∅ lehet visszavezetni klasszikus mechanikai képre

Bohr-magneton: $\frac{e\hbar}{2m}$

$\underline{S}$: spin Saját impulzusnomentum

↳ 2 különböző állapot $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

$S_z = \pm\frac{1}{2}$ → két Schrödinger egyenletet szül

$\Psi_\pm(x,t)$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\Psi_\pm(x,t) = \underbrace{\left(E \mp \mu_z B_z\right)}_{E'}\Psi_\pm(x,t)$$

$$\Psi_\pm(x,t) = \varphi(x,t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_+\\ \Psi_-\end{pmatrix}$$

$$\mp\mu_z B_z \Rightarrow -g\mu_B \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B_z$$

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x) - g\mu_B\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B_z\right)\varphi(x,t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = E\varphi(x,t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}$$

valószínűségi sűrűség: $S(x,t) = |\varphi(x,t)|^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$

egyik állapot valószínűsége:

$$P_+ = \int dx\,|\varphi(x,t)|^2\cdot|\alpha|^2 \quad ; \quad P_- = \int dx\,|\varphi(x,t)|^2\cdot|\beta|^2$$

$P_+ + P_- = 1$ kellene

$\int S(x,t)\,dx = 1$ kell

- $\int dx\,|\varphi(x,t)|^2 \overset{!}{=} 1$ és $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \overset{!}{=} 1$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \sigma_z \rightarrow \text{Pauli mátrix} \Rightarrow S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$$

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2}P_+ + \left(-\frac{1}{2}\right)P_- = (\alpha^*,\beta^*)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}^{\sim} = (\alpha^*,\beta^*)$$

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x \rightarrow \text{Pauli - mátrixok}$$

$$S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y$$

$$S_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\oplus$ esetén

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$$

mivel $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\Downarrow$

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$$

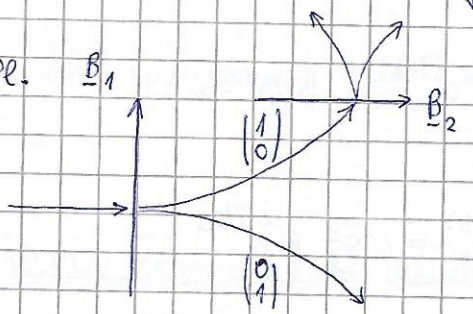
$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ sajátértékhez ez esetben

$$\chi_x^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$ ortogonálisak

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$-hez: $\chi_x^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pl. B_1



$$\chi_2^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_x^{(+)} + \chi_x^{(-)}\right)$$

$\Downarrow$

ugyanakkora az esélye a 2 iránynak (~~detektálásuk~~ a spinvektet)

Spinvektet $\rightarrow$ 3 különböző irány $\rightarrow$ ha egyik irány határozott, a másik kettő viszont határozatlan

$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = 0$

$[S_x, S_y] \neq 0 \rightarrow iS_z$ Fel-nem-cserélhetőség

Korrespondencia-elv

$$\underline{n} = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi)$$
$$z \qquad x \qquad y$$

$$\underline{n}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_n$$

$$\underline{\mu}_n = g\mu_B \underline{S}_n$$

μ irányba mutató

$$\underline{S}\,\underline{n} = S_x \sin\vartheta\cos\varphi + S_y \sin\vartheta\sin\varphi + S_z\cos\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\sin\vartheta\sin\varphi \\ i\sin\vartheta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 \\ 0 & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \sin\vartheta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$S_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

pl: $\chi_n^{(+)}$: $\alpha_n^{(+)}\cos\vartheta + \beta_n^{(+)}\sin\vartheta\, e^{-i\varphi} = \alpha_n^{(+)}$ (első sor)

$$|\alpha_n^{(+)}|^2 + |\beta_n^{(+)}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |\alpha_n^{(+)}|^2 = \cos^2\frac{\vartheta}{2} \to \alpha_n^{(+)} = \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{-i\varphi/2}$$

$$|\beta_n^{(+)}|^2 = \sin^2\frac{\vartheta}{2} \to \beta_n^{(+)} = \sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\varphi/2}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_n^{(+)} \\ \beta_n^{(+)} \end{pmatrix} = \alpha_n^{(+)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_n^{(+)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ha $\vartheta = 90°$ (z tengely) $\Rightarrow \frac{1}{2}$ mindkettő
- általános esetben

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}\cos\vartheta$$

- $\Psi = 2\pi$ → kábemegy → nem történik semmi az egész számú spinekkel
  de a félegész spinek előjelet váltanak

Rauch, 1976.



$\mu_{neutron} = g\mu_B$ (összetétele 0, mégis van mágneses momentuma)
$g = -2{,}73$ ↳ 3 kvark, fele spinnel ezekből jön ki a mágneses momentum

alsó ág: $e^{iks - i\frac{E_0}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ $(B=0)$ $E = -\underline{\mu}\underline{B}$

felső ág: $(B \neq 0)$

$$e^{iks - i\frac{E_0}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\alpha e^{i\frac{\mu_n B}{\hbar}t}\\ \beta e^{-i\frac{\mu_n B}{\hbar}t}\end{pmatrix}$$

n irányba spinpolarizált nyaláb esetén

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{\mu_n B}{\hbar}\tau$$

τ ↑ áthaladási idő

fázisszög: $\Delta\varphi/2$

Rauch: $\frac{\Delta\varphi}{2} = \pi = +\left|\frac{\mu_n B}{\hbar}\tau\right|$

- felső és alsó ág találkozik → ezek szuperpozíciója adja a hullámfüggvényt,
  π-nél pontosan destruktív interferencia volt
  $\Rightarrow \varphi$ szögben periodicitást 4π-nek találtak,
  azaz a spin egy kör alatt előjelet vált.

Azonos Részecskék Kvantumfizikája

H-atom → n, ℓ, m, s : 4 számadat ⇒ ha 2 H-atomnak ez a 4 tulajdonsága megegyezik ⇒ akkor megkülönböztethetetlenek

elektron → $\underline{x}, S$

↳ 2 elektron esetén pl.

$$\Psi(1: \underline{x}_1, S_1 \quad 2: \underline{x}_2, S_2) \lessgtr \Psi(1: \underline{x}_2, S_2 \quad 2: \underline{x}_1, S_1)$$

- megkülönböztethetetlenek
- minden lehetőség megoldás (lineáris)

⇒ szuperpozíció: $\alpha\Psi(1,2) + \beta(2,1)$ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

↓ kicserélési degeneráció

He-atom: 2 elektronja van

$$E\Psi(1: \underline{x}_1, s_1\ 2: \underline{x}_2, s_2) = \left(-\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2 - \frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|}\right)\Psi(\dots)$$

Zárójelben lévő operáció invariáns a két részecske felcserélésére

↓

a 2 lineárkombinációja ⇒ ø tudjuk egyértelműen leírni a He-atomot

Bozon: egész spinű részecskék ($s \sim u$)

↳ $\Psi_{sym}(1,2) \overset{DEF}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi(1: \underline{x}_1 s_1\ 2: \underline{x}_2 s_2) + \Psi(1: \underline{x}_2 s_2\ 2: s_1 \underline{x}_1)\right)$

Fermion: félegész spinű részecskék ($s = \frac{2u+1}{2}$)

↳ $\Psi_{antisym}(1,2) \overset{DEF}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi(1: \underline{x}_1, s_1\ 2 \underline{x}_2 s_2) - \Psi(1: x_2 s_2\ 2 s_1 x_1)\right)$

↓

Pauli elv ⇒ ugyanazon állapothoz tartozó

$$\Psi_{antisym} = 0$$

He-atom független-részecske közelítés

↳ elhagyjuk az elektronok közti kapcsolatot $\left(\frac{e^2}{|x_1 - x_2|} \approx 0\right)$

$$\Psi^{(He)}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(\underline{x}_1)\xi_1(s_1)\varphi_2(\underline{x}_2)\xi_2(s_2) - \varphi_1(\underline{x}_2)\xi_1(s_2)\varphi_2(\underline{x}_1)\xi(s_1)\right]$$

$\xi_1(s_1)$ $\xi_2(s_2)$

$$E_{He} = E_1 + E_2$$

Alapállapot:

$$\Psi^{(He)}_{alap} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0(\underline{x}_1)\varphi_0(\underline{x}_2)\left[\xi_1(s_1)\xi_2(s_2) - \xi_1(s_2)\xi_2(s_1)\right]$$

térszerű részre szimmetrikus

spinállapotra antiszimmetrikus ↓ ø bontható szorzatra!

⇒ $E_{alap} = 2E_0$

Hund-szabály → párosával töltik be a pályákat → ellentétes spinekkel rendelkeznek

összefutó spinállapot (Ø bontható szorzatra)

$$\xi_1(s_1)\xi_2(s_2) - \xi_2(s_1)\xi_1(s_2)$$

→ ha tudom pl. hogy az egyik $\frac{1}{2}$ ⇒ tudom, hogy a másik $-\frac{1}{2}$

$e + e$ szórás (itt szabad részecskék)



klasszikusan ezt gondolnánk
de ez is megvalósulhat? → hiszen a végállapot megegyezik és az elektronok megkülönböztethetetlenek

$$QM = A = A_1 + A_2$$

$$\downarrow$$

$$P = |A|^2 = |A_1 + A_2|^2$$

$$\downarrow$$

kicserélési interferencia: $(A_1A_2 + A_2A_1)$

Több elektronos atomok elektronjai - állapota

- Független részecske közelítés

$$E = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \underbrace{\sum_{i,j} \frac{e^2}{|x_i - x_j|}}_{\text{ezt elhanyagoljuk}} = \sum_i E_i$$

$$\downarrow$$

$$E_i \psi_i(x_i) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i - \frac{Ze^2}{r_i} \right) \psi_i(x_i) \qquad // \; E(n) = -\frac{R}{n^2} \; //$$

- Periódusos rendszer $n > \ell \geq |m|$

darabszám → $N(n) = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = 2n^2$

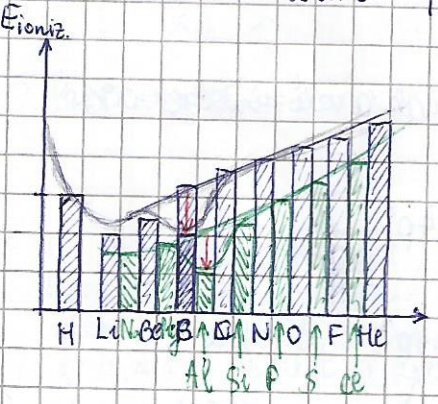
főkvantumsz. ↑ spinelfajulás ↑ mellékkvantumszám - $\ell \to +\ell$ közötti változat = $2\ell+1$ állapot

$n = 1 \to$ 1s : 2 db e^- | $n = 2 \to$ 2s : 2db , 2p : 6db

$n = 3 \to$ 3s : 2db , 3p : 6db

$n = 4 \to$ 4s ; 3d ; 4p → 18 db

$n = 5 \to$ 5s ; 4d, 5p → 18bd



- $\int d^3x\ \psi^*(x)\hat{H}\psi(x) = \overline{E}$

  $\downarrow$

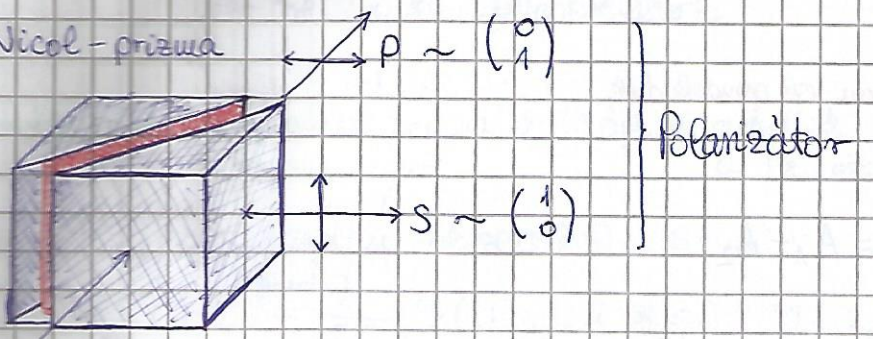
  $d\Omega\, r^2 dr\, r^{\frac{2e}{\hbar}}(\dots)$

  ↑ elliptikus pályák" egyre inkább ellyülnek e növekedésével

ÖSSZEFONT ÁLLAPOTOK ELŐÁLLÍTÁSA

1, Foton polarizációs állapota

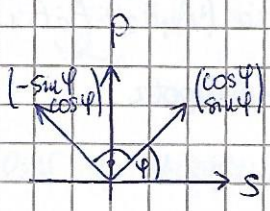
- Nicol-prizma



$\Phi_{\parallel}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot s + \sin\varphi \cdot p$

↕ $\hat{P}$

$\Phi_{\perp}(\varphi) = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$



- Foton impulzusmomentuma $\pm\hbar$

  ↳ csak tranzverzális, ø longitudinális rezgés

  * Cirkulárisan polarizált:

    ↳ szemből nézve balra forog: $+\hbar$ } mozgás irányára
    ↳ — " — jobbra forog: $-\hbar$ }

$$\text{Balra}: \Phi(B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{\parallel}(\varphi) + e^{i\frac{\pi}{2}}\Phi_{\perp}(\varphi)\right)$$
$$\text{Jobbra}: \Phi(J) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{\parallel}(\varphi) - e^{i\frac{\pi}{2}}\Phi_{\perp}(\varphi)\right)$$

- Alain Aspect és csoportja

  - olyan felfogás, ahol egynél több fotonok a valószínűsége 0%
  - mindig egy-egy foton volt csak

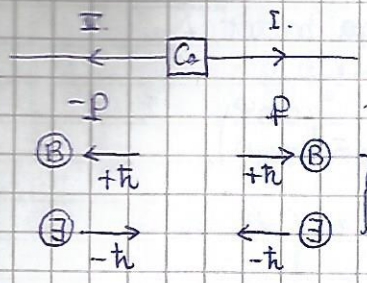
$Ca \rightarrow 4p^2$ gerjesztett $4s^2 \longmapsto 4p^2$

↓

kisugárzás: $4s^2 \longleftarrow 4p^2$: 2 foton

↑ $J=0$; ↑ $J=0 \Rightarrow$ a 2 foton rendszerének teljes imp. momentumának is 0-nak kell lennie

* Cirkulárisan polarizált fotonok esetén



- impulzusmegmaradás
- impulzus-momentum megmaradás

$$\Phi_{12}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_1(B)\Phi_2(B) + \Phi_1(\exists)\Phi_2(\exists)\right] =$$

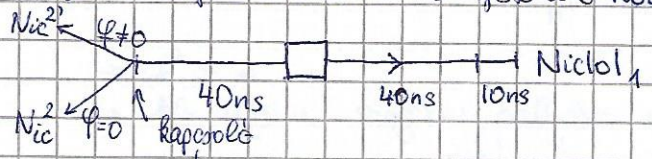
↑ tükrözési szimmetria ($B \leftrightarrow \exists$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{\parallel}^{1}(\varphi)\Phi_{\parallel}^{2}(\varphi) - \Phi_{\perp}^{1}(\varphi)\Phi_{\perp}^{2}(\varphi)\right]$$

Pl. az egyik oldalra Nicol-prizmát rakva: meg tudjuk mérni a polarizációt → annak a valószínűsége, hogy pl. párhuzamos pol.-t mérek $\frac{1}{2}$, ugyanúgy a merőleges is $\frac{1}{2}$.

* visszont ha $P_{\parallel}^{1} \Rightarrow P_{\parallel}^{2} = 1$ anélkül, hogy megmérnénk a másik fotont; tudni fogjuk ezek az egyik megmérésével a polarizációt

* Van-e információcsere a ~~fotonok között~~

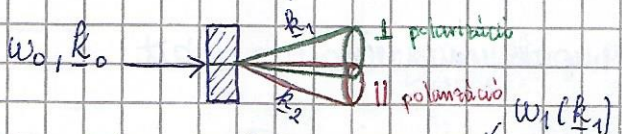


↳ olyan későn döntötte el, hogy melyik irányban mér, hogy a jobboldali mérés információja már nem érhetett át a balra haladó fotonhoz

↳ eredmény: az állapotok összefonatak, azaz információcsere nélkül vannak ugyanolyan állapotban.

2, Kettőstörő BBO kristály

- nemlineáris optikai elem → fotont tud „hasítani"



- lekonvertálás: $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2(\underline{k}_2)$

$$\underline{k}_0 = \underline{k}_1 + \underline{k}_2$$

- a hasítás 2 fotonja két kúp felületén terjedhet ⇒ mérjük egymást 2 pontban, de ha pont itt mérjük akkor a mért polarizáció mindkettő lehet, de ha az egyiket megmérjük, annak függvényében a másik is meghatározódik.

$$\Psi_{12}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{\parallel}^{1}(\varphi)\Phi_{\perp}^{2}(\varphi) + e^{ik}\Phi_{\perp}^{1}(\varphi)\Phi_{\parallel}^{2}(\varphi)\right]$$

$\phi_\bullet^1(\varphi)\,\phi_\bullet^2(\varphi)$

$\bullet$ = $\parallel$ vagy $\perp$: 4 állapot : függetlenek → rezzatra bontottak

$$\phi_{12}^{(\mp)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_{\parallel}^1(\varphi)\,\phi_{\parallel}^2(\varphi) \mp \phi_{\perp}^1\phi_{\perp}^2(\varphi)\right] \qquad \phi_{\parallel}^1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_1$$

$$\psi_{12}^{(\mp)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_{\parallel}^1(\varphi)\,\phi_{\perp}^2(\varphi) \mp \phi_{\perp}^1(\varphi)\phi_{\parallel}^2(\varphi)\right]$$

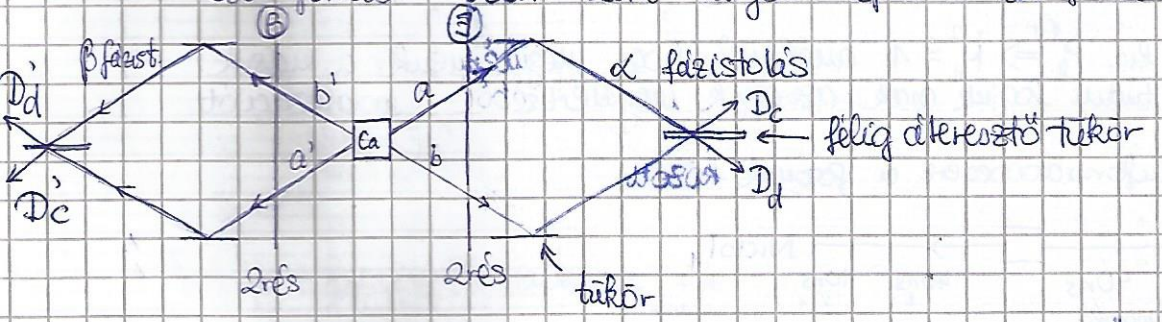
↑
új bázis, ebben már összefontak az állapotok (Ø bontották rezzatra)

↳ Bell-bázis → a vizsgált kísérletek ezen Bell-bázis elemeit adták

$$\phi_{\parallel}^1(\varphi)\,\phi_{\perp}^2(\varphi) \sim \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}_2$$ két tér direkt összege

Kanity - Tapster

$\bullet$ Ca - forrás → véletlenszerű irányban lépik ki a két fotont



amplitúdók az egyes utakon

$$\phi_A(a) = ie^{i\alpha}\left(i\phi_c + \phi_d\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\phi_A(b) = i\left(\phi_c + i\phi_d\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\phi_B(b') = ie^{i\beta}\left(\phi_c' + i\phi_d'\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\phi_B(a') = i\left(\phi_d' + i\phi_c'\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

visszaverődés : i
fázistolás : $e^{i\alpha}$

$\phi_A(a)\,\phi_B(a')$ → kapcsolódnak az impulzusmegmaradás miatt
$\phi_A(b)\,\phi_B(b')$ ↗

⇓

$$\psi_{kezdő} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_A(a)\,\phi_B(a') + \phi_A(b)\,\phi_B(b')\right]$$

* mindkét úthoz egyenlő a valószínűsége

$$\psi_{vég} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\alpha}\left(i\phi_c + \phi_d\right)\left(\phi_d' + i\phi_c'\right) + e^{i\beta}\left(\phi_c + i\phi_d\right)\left(\phi_c' + i\phi_d'\right)\right]$$

$$\Delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Psi_{kig} = \frac{ie^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{2}}\left[\left(\Phi_C\Phi_{C'} - \Phi_D\Phi_{D'}\right)\sin\Delta - \left(\Phi_D\Phi_{C'} + \Phi_C\Phi_{D'}\right)\cos\Delta\right]$$

$$\left.\begin{aligned} P_{CC'} &= \tfrac{1}{2}\sin^2\Delta \\ P_{DD'} &= \tfrac{1}{2}\sin^2\Delta \\ P_{CD'} &= \tfrac{1}{2}\cos^2\Delta \\ P_{DC'} &= \tfrac{1}{2}\cos^2\Delta \end{aligned}\right\} \rightarrow C \text{ és } C' \text{ detektorok megpróbálása}$$

$$\Rightarrow P_{CC'} + P_{CD'} = \frac{1}{2} = P_C \rightarrow \text{egyik oldal megpróbálási valószínűsége } 1/2$$

$$\Rightarrow P_{CD'} + P_{DD'} = \frac{1}{2} = P_D \nearrow$$

↳ ~~mond semmit a túloldalról~~

~~2 oldalon szükséges ide~~

S. Haroche (2012 Nobel)

- atomok összefonódása
- Rydberg-atomok (Be)
  - ↳ legkülső elektronját magas főkvantumszámú pályára emelik
    - ↳ $n = 50 \leftrightarrow n = 51$
  - ↳ $l \approx n$
  - ↳ kb 10cm sugarú pályára megy az elektron → gyűrű alakul ki
- üregrezonátor → olyan állóhullámok → rezonáns frekvencia ω_{rez}
  - $\omega_{rez} = \frac{E_{51} - E_{50}}{\hbar}$
  - → ha egy 50-es atomot átküldve a rezonátoron, nagy valószínűséggel gerjesztődni fog
  - → ha belerakunk egy atomot ⇒ a két állapot oszcillálni fog
    - ↳ Rabi-oszcilláció

$$\Phi_{atom_1}(t) = \varphi_{n'}\cos\frac{\omega t}{2} + \varphi_n \sin\frac{\omega_r t}{2}$$

$$\Phi_{atom_2}(t) = \varphi_n \cos\frac{\omega_r t}{2} + \varphi_{n'}\sin\frac{\omega_r t}{2}$$

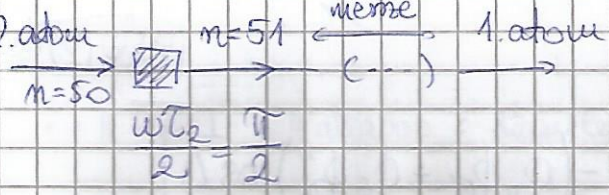
$n' = 51 \rightarrow$ [ÜREGREZ] $\rightarrow$

$\frac{\omega t_1}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\Phi(atom_1, üreg) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{51}\otimes\Psi_{üreg}(0) + \varphi_{50}\otimes\Psi_{üreg}(1)\right]$$

↑ üregben 0 foton

↑ üregben 1 foton



2. atom gerjesztődik, ha az üregben van foton, azaz ha az első leadott egy fotont

$$\Phi(\text{atom}_1, \text{üreg}, \text{atom}_2)_{\tau_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^1_{51} \otimes \psi_{\text{üreg}}(0) + \varphi^1_{50} \otimes \psi_{\text{üreg}}(1)\right] \otimes \varphi^2_{50}$$

$$\Phi(\text{atom}_1, \text{üreg}, \text{atom}_2)_{\tau_1+\tau_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^1_{51} \otimes \psi_{\text{üreg}}(0) \otimes \varphi^2_{50} + \varphi^1_{50} \otimes \psi_{\text{üreg}}(0) \otimes \varphi^2_{51}\right]$$

↑ ∅ történt semmi; ↑ első lead, 2. felveszi

↓

* az üreg állapota nem változott, semmiképp ∅ lehet foton
* a két atom állapota fonódott, kiöv vagy mindkét atom ugyanabban az állapotban marad, vagy az egyik lead és a másik felveszi

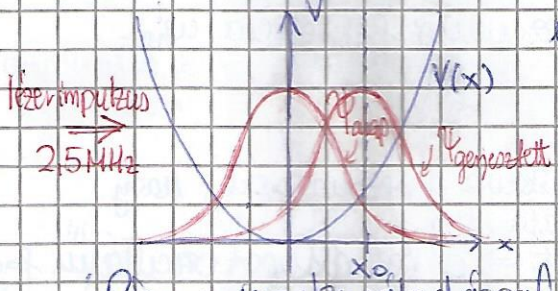
Wineland (Nobel 2012)

* kvantumszámítógép (Be^+)

$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ⇝ $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

itt $n = 0$ alapállapot

$\psi_{\text{alap}}(x) = \alpha e^{-\beta x^2}$



Lézer: impulzusátadással eltolható a Gauss (az atomot)

Rádiófr.: lehet fölötte tolni ⇝ excited (e)

↓ elektromosfelhő gerjesztődik — ground (g) → alapállapot

$\psi_C(x=0)\,\varphi_{\text{atom}}(g)$

1. lépés: $\frac{\pi}{2}$ Rabi osz. (forgatás) rádiófrek (1,25 GHz)

$\psi_C(x=0)\,\varphi_{\text{atom}}(g) \rightarrow \psi_C(0)\left(\varphi_{\text{atom}}(g) - \varphi_a(e)\right)$

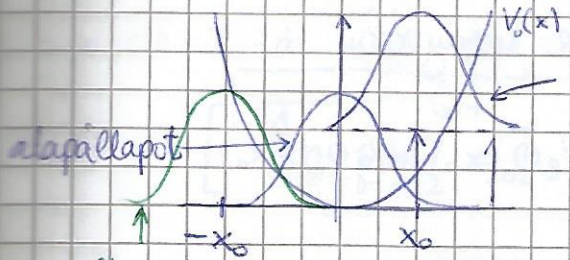
2. lépés: kétrezonátoros szelektív elnyelés → csak $\varphi_a(e)$ állapot

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_G(0)\varphi_a(g) - \psi_G(x_0)\varphi_a(e)\right)$$

2015.12.11. – folytatás

Winelaud – ioncsapdába zárt Be^+

potenciál → $\frac{1}{2}m\Omega x^2$



eltolt állapot (Amplitúdója kisebb) → $\frac{1}{\sqrt{2}}$

még mindig alapállapot

$$\psi_{kiindulo} = \overline{\Phi}_0^{(oszc.)}(x=0)\cdot\varphi_g^{(elektronikus)}$$

↖ elektronok alapállapotban (ground)

$$\psi_{végállapot} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overline{\Phi}_0(x=-x_0)\varphi_g + \overline{\Phi}(x=+x_0)\varphi_e\right]$$

↑ gerjesztett állapot

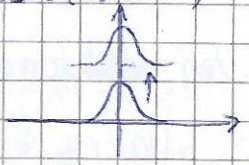
$\overline{\Phi}_0(x)$ koherens állapotok $(x \neq 0)$

↳ „ Schrödinger-macska" állapot

- mérés: Be^+ gerjesztett vagy alapállapotban van
  - ↳ el tud-e nyelni adott E-ű fotont?
    - ha igen ⇒ alapállapot ⇒ $-x_0$-ban van
    - ha nem ⇒ gerjesztett állapot ⇒ $+x_0$-ban van

I. → elektronikus szerkezet Rabi-oszcillációba kezd (45°-os)

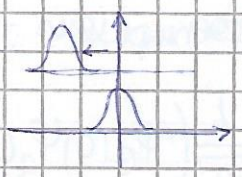
↳ ezzel: $\varphi_g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_g + \varphi_e)$



II. → szelektív gerjesztés lézeres besugárzással (~MHz)

$x=0 \rightarrow x=-x_0$, de csak φ_{ge} nyeli el

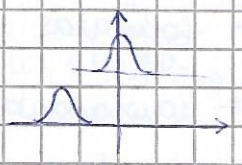
ebből: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_g \Phi_0(0) + \varphi_e \Phi_0(-x_0)\right]$



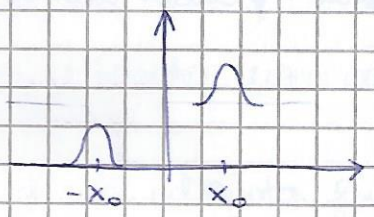
III. Rabi oszcillációval: (90°-os)

∘ $\varphi_e \leftrightarrow \varphi_g$ kicserélődik

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_e \Phi_0(0) + \varphi_g \Phi_0(-x_0)\right]$



IV. Szelektív erőhatás most a másik irányból



$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_e \Phi_0(x_0) + \varphi_g \Phi_0(-x_0)\right]$

* David Bohm (~1950) gondolatkísérlet

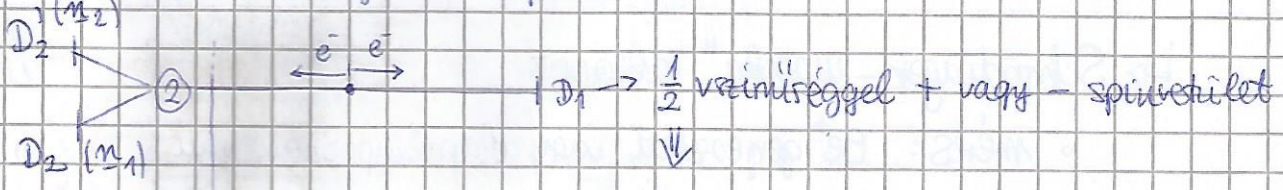
* spinállapotok

$\psi_{12}^{(-)} \left(\xi_1(+)\xi_2(-) - \xi_1(-)\xi_2(+)\right)_{\underline{n}}$ eredő spin 0

koordinátarendszer forgatásra érzéketlen, ugyanúgy néz ki

↓

szinglett-állapot



⇓

ebből tudom mondani, hogy a másik elektron ellentétes állapotban

→ amikor itt jár az elektron, akkor döntöm el, hogy $\underline{n}_1$ vagy $\underline{n}_2$ irányban mérjem

→ Ø lehet információcsere a 2 elektron között

→ Ha detektorral mérve ⇒ tudjuk az 1. elektron spinjét $\underline{n}_2$ irányra

Ha $\underline{n}_2$ tetszőleges állásával mérek, $P_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2}$, de

ha D_1-nél $P_1(S_1 = + \mid S_2 = -) = 1$

$P_2(S_2 = + \mid S_2 = +) = 0$ tetszőleges irányra

- Egy irányba határozott spinállék ⇒ másik 2 irányban határozatlan
- Einstein – Podolsky – Rosen – Bohm paradoxon
- Rejtett paraméter: λ (↳ lokális), amivel a kísérlet egyértelműen leírható

$$S_1(\underline{n}_1)^\lambda \to S_2^\lambda(\underline{n}_2) \qquad \left[S_1^\lambda(\underline{n}_1)\, S_2^\lambda(\underline{n}_2)\right]$$

↑ tetszőleges irányra !

Bohmnál: $S_1(\underline{n}_1) \to$ tudtuk $S_2(\underline{n}_1)$-et biztosan

- de λ-át nem tudjuk, ennek is van valamilyen valószínűsége

$$\overline{\hat{\underline{S}}\underline{n}_1\, \hat{\underline{S}}\underline{n}_2}^{QH} = \lambda \int d\lambda\, S_1^\lambda(\underline{n}_1)\, S_2^\lambda(\underline{n}_2)$$

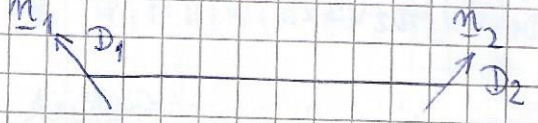
tetszőleges iránya

- egy méréssel csak egy irányt lehet mérni, de bármilyen irányt mérhettünk volna, tehát bármilyen irányba biztosan meg tudjuk határozni a spinállapotot; kell lennie valamilyen λ paraméternek, ami meghatározza ezt $\Leftrightarrow$ ez ellentmond a kvantummechanikai valószínűségekkel

J. Bell – egyenlőtlenség (1964.)

- $\Psi_{12}^{(-)}(S_{D_1}, S_{D_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{D_1}(+)\varphi_{D_2}(-) - \varphi_{D_1}(-)\varphi_{D_2}(+)\right]$

↑ detektoroknál mért spinvektorok



$$\hat{O} = \left(\hat{\underline{S}}_{D_1}\underline{n}_1\right)\left(\hat{\underline{S}}_{D_2}\underline{n}_2\right)$$

kvantummechanikai várakozás:

várható érték $\tilde{\Psi}_{12}^{(-)}\hat{O}\Psi_{12}^{(-)} = \frac{1}{2}\Big[\Big[\tilde{\varphi}_{D_1}(+)\hat{\underline{S}}_{D_1}\underline{n}_1\varphi_{D_1}(+)\cdot \tilde{\varphi}_{D_2}(+)\hat{\underline{S}}_{D_2}\underline{n}_2\varphi_{D_2}(-)\Big] + \Big[\tilde{\varphi}_{D_1}(-)\hat{\underline{S}}_{D_1}\underline{n}_1\varphi_{D_1}(-)\cdot \tilde{\varphi}_{D_2}(+)\hat{\underline{S}}_{D_2}\underline{n}_2\varphi_{D_2}(+)\Big]\Big]$ m –

$$\tilde{\psi}_{12}^{(-)} \hat{O} \psi_{12}^{(-)} = \frac{1}{2}\Big[\tilde{\psi}_{D1}(+)\hat{S}_{D1}\underline{n}_1\psi_{D1}(+)\tilde{\psi}_{D2}(-)\hat{S}_{D2}\underline{n}_2\psi_{D2}(-) +$$

$$+ \tilde{\psi}_{D1}(-)\hat{S}_{D1}\underline{n}_1\psi_{D1}(-)\tilde{\psi}_{D2}(+)\hat{S}_{D2}\underline{n}_2\psi_{D2}(+) -$$

$$- \tilde{\psi}_{D1}(+)\hat{S}_{D1}\underline{n}_1\psi_{D1}(-)\cdot\tilde{\psi}_{D2}(-)\hat{S}_{D2}\underline{n}_2\psi_{D2}(+) -$$

$$- \tilde{\psi}_{D1}(-)\hat{S}_{D1}\underline{n}_1\psi_{D1}(+)\tilde{\psi}_{D2}(+)\hat{S}_{D2}\underline{n}_2\psi_{D2}(-)\Big] = *$$

$$\rightarrow \underline{S}_D^{\underline{n}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta e^{-i\varphi} \\ \sin\Theta e^{i\varphi} & -\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$* = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{2}\cos\Theta_1\Big)\Big(-\frac{1}{2}\cos\Theta_2\Big) + \Big(-\frac{1}{2}\cos\Theta_1\Big)\Big(\frac{1}{2}\cos\Theta_2\Big) -$$

$$-\Big(\frac{1}{2}\sin\Theta_1 e^{-i\varphi_1}\Big)\Big(\frac{1}{2}\sin\Theta_2 e^{i\varphi_2}\Big) -$$

$$-\Big(\frac{1}{2}\sin\Theta_1 e^{i\varphi_1}\Big)\Big(\frac{1}{2}\sin\Theta_2 e^{-i\varphi_2}\Big)\Big] =$$

$$= -\frac{1}{8}\Big(2\cos\Theta_1\cos\Theta_2 + 2\sin\Theta_1\sin\Theta_2\underbrace{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}_{\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}+e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{8}(2\,\underline{n}_1\underline{n}_2) = \underline{-\frac{1}{4}\underline{n}_1\underline{n}_2} \quad \leftarrow \text{standard QM}$$

Rejtett paraméteres elmélettel:

$$C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_1) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_2)$$

Bell: $|S_D^{\lambda}(\underline{n})| \leq \frac{1}{2}$

$$C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) - C(\underline{n}_1,\underline{n}_3) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_1) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_2)\underbrace{\Big[1 \pm 4 S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_4) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_3)\Big]}_{\text{pozitívak}} -$$

$$- \int d\lambda\, \rho(\lambda) \underbrace{S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_1) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_3)}_{\text{legnegatívabb: } -\frac{1}{4}}\underbrace{\Big[1 \pm S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_4) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_2)\Big]}_{\text{legpozitívabb: } \frac{1}{4}} =$$

↓ majorálják az egyenletet

$$\Rightarrow |C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) - C(\underline{n}_1,\underline{n}_3)| \leq \frac{1}{2} \pm \int d\lambda \rho(\lambda) S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_4) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_3)$$

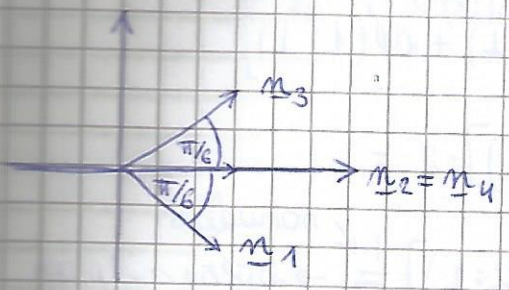
$$\pm \int d\lambda\, \rho(\lambda) S_{D1}^{\lambda}(\underline{n}_4) S_{D2}^{\lambda}(\underline{n}_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \Big(C(\underline{n}_4,\underline{n}_3) + C(\underline{n}_4,\underline{n}_2)\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{|C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) - C(\underline{n}_1,\underline{n}_3)| - |C(\underline{n}_4,\underline{n}_3) - C(\underline{n}_4,\underline{n}_2)| \leq \frac{1}{2}}$$

Bell-egyenlőtlenség

$$* \quad C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) = -\frac{1}{4}\underline{n}_1\underline{n}_2$$



Melyik az igaz? Van-e ellentmondás?

Bell: $|\underline{n}_1\underline{n}_3 - \underline{n}_1\underline{n}_2| + |\underline{n}_3\underline{n}_4 + \underline{n}_2\underline{n}_4| \leq 2$

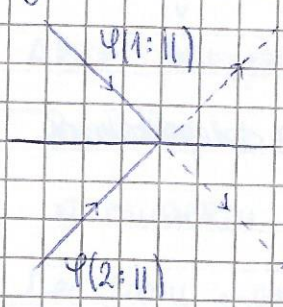
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2}\right| + \left|1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{2} + \sqrt{3} > 2$$

↳ ellentmondás

* vagy a Bell-egyenlőtlenség vagy a QM igaz

Állapot teleportálása: Kvantumteleportáció (1997)

- BBO kristályban keletkett $\updownarrow$ és $\downarrow$ fotonpárral (összefont pár)



polarizációs állapot

$$\varphi(S) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_t(S) + i\varphi_r(S)\right]$$

$$* \quad \varphi(1:\updownarrow)\varphi(2:\updownarrow) = \frac{1}{2}\left[\varphi(1:\updownarrow) + i\varphi(2:\updownarrow)\right]\left[\varphi(2:\updownarrow) + i\varphi(1:\updownarrow)\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left[\varphi_1(\updownarrow)\varphi(1:\updownarrow) + \varphi(2:\updownarrow)\varphi_2(2:\updownarrow)\right]$$

$\Downarrow$

mindkét fotont az egyik oldalon jelenítik meg.

$$\psi(1:\perp)\psi(2:\parallel) = \frac{1}{2}\left[\psi(1:\perp) + i\psi(2:\perp)\right]\left[\psi(2:\parallel) + i\psi(1:\parallel)\right]$$

↳ így már egyik tag sem enk ki

$$\psi(1:\parallel)\psi(2:\perp) = \frac{1}{2}\left[\psi(1:\parallel) + i\psi(2:\parallel)\right]\left[\psi(2:\perp) + i\psi(1:\perp)\right]$$

$$\psi_{12}^{(-)} = \frac{1}{2}\left[\psi_1(1:\perp)\psi(2:\parallel) - \psi(1:\parallel)\psi_2(2:\perp)\right]\cdot 2 =$$

$$\Rightarrow \left[\psi_1(1:\perp)\psi(2:\parallel) - \psi(1:\parallel)\psi(2:\perp)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$$ ← normálás

→ külön nedi az fotonokat

$$\psi_{12}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(2:\perp)\psi(2:\parallel) + \psi(1:\parallel)\psi(1:\perp)\right]$$

↳ mindkét ~~oldalon~~ mindkét fotón egy oldalon kerül

* $\Phi_{12}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(1:\parallel)\psi(2:\parallel) \pm \psi(1:\perp)\psi(2:\perp)\right]$ Bell bázis

↳ Bell állapot közül egy másképp viselkedik

↳ csak $\psi_{12}^{(-)}$ esetén vált külön a 2 fotón

* ismeretlen állapot: (1,2 összefont)

$$\Phi_1 = C_\perp\psi(1:\perp) + C_\parallel\psi(1:\parallel)$$

ezt akarom tökéletesen reprodukálni azaz teleportálni

$\psi_{23}^{(-)}$ (előzőekben $\psi_{12}^{(-)}$)

$$\Phi_{kezdő} = \psi_{23}^{(-)}\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(2:\perp)\psi(3:\parallel) - \psi(2:\parallel)\psi(3:\perp)\right]\cdot$$

$$\cdot\left(C_\perp\psi(1:\perp) + C_\parallel\psi(1:\parallel)\right)$$

Bell-bázis:

$$\psi(1:\parallel)\psi(2:\parallel) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{12}^{(+)} + \Phi_{12}^{(-)}\right]$$

$$\psi(1:\perp)\psi(2:\perp) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{12}^{(+)} - \Phi_{12}^{(-)}\right]$$

$$\psi(1:\parallel)\psi(2:\perp) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{12}^{(+)} - \psi_{12}^{(-)}\right]$$

$$\psi(1:\perp)\psi(2:\parallel) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{12}^{(+)} + \psi_{12}^{(-)}\right]$$

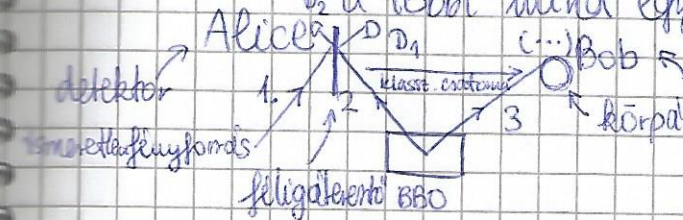
$$\Psi_{összes} = \frac{1}{2}\Big[\Phi^{(+)}_{12}\big(C_{\parallel}\Psi(3:\parallel) - C_{\perp}\Psi(3:\perp)\big) + \Phi^{(-)}_{12}\big(C_{\perp}\Psi(3:\parallel) + C_{\parallel}\Psi(3:\perp)\big) +$$

$$+ \Psi^{(+)}_{12}\big(C_{\parallel}\Psi(3:\parallel) - C_{\perp}(3:\perp)\big) - \Psi^{(-)}_{12}\big(C_{\parallel}\Psi(3:\parallel) + C_{\perp}(3:\perp)\big)\Big]$$

↓

megegyezik az ismeretlen 1. fotон állapotával

a 2 oldalt kilépő fotonpár part ez, Φ_2 a több mind egyoldali fotonpárokat eredményez



átlagosan minden 4. esemény lesz a kétoldali kilépés

D_1 és D_2 egyszerre szólal meg $\Rightarrow \Psi^{(-)}_{12}$

↳ Alice feljegyzi ezeket az eseményeket

Bob megszámozza a fotonokat

Alice feljegyzései alapján Bob kiválogatja a megfelelő fotonokat $\Rightarrow$ ezek állapotai pontosan ugyanolyanok, mint az ismeretlen fotonoké

* 1 es foton megmûnk, hiszen összefontuk őket más fotonokkal
  ↳ "no cloning theorem" $\Rightarrow$ nem klónozzuk, csak lemásoljuk, de közben az eredetit „megöljük"
* Kísérlet eredményessége 98 %-os volt $\Rightarrow$ ez nagyon jó
* klasszikus csatorna miatt Alice és Bob közötti információcsere sebessége $< c$