Atom- és Kvantumfizika FOKA

1. feladat

Egy m tömegű részecske egydimenziós mozgást végez a következő potenciálban:

$$V(x) = -\frac{V_0}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}$$

ahol V_0 egy energia, 'a' pedig egy hosszúság dimenziójú állandó. Alkalmazzuk a Sommerfeld-féle kvantumfeltételt a kötött (E<0 energiájú) állapotok energiájának meghatározására! A számolást nem lehet befejezni elemi függvényekkel és egyszerű integrálokkal; jussunk el addig, ameddig lehet! A következő kérdésre viszont elemi integrál elvégzésével egzakt válasz adható: hány darab kötött állapot van? Tudjuk, hogy klasszikusan legfeljebb mennyi a kötött állapotok energiája; az ehhez az állapothoz tartozó mozgás (ami nem egészen periodikus már) véletlenül végigszámolható, és le tudjuk vonni a következtetéseket.

Elméleti emlékeztető

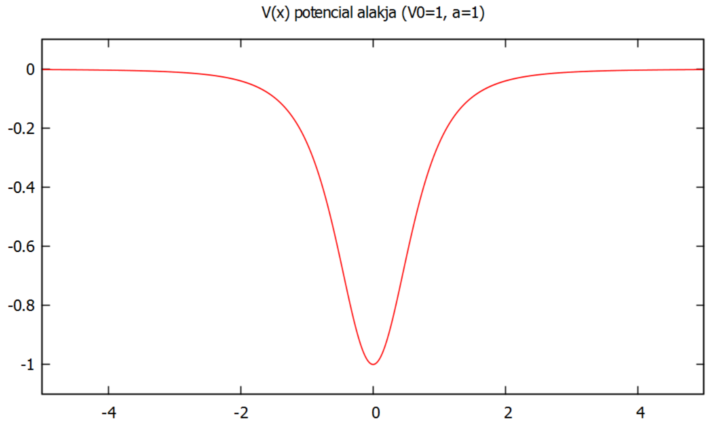
Egy fizikai rendszert egyértelműen megad a $\mathcal{H}(q_a, p_a)$ Hamilton-operátora. Ez a q_a általánosított koordinátáktól, és p_a általánosított impulzusoktól függ. Feltéve, hogy minden q_a, p_a időfüggése periodikus, felírhatjuk a Sommerfeld-féle kvantálási feltételt egy P periódusra:

$$\oint_P p_a \mathrm{d}q_a = n_a h \ \forall a \in \{1, 2 \ldots f\},\ n_a \in \mathbb{Z}_0^+ \tag{1}$$

Megjegyzés: nh helyett szokták a $(n+\frac{1}{2})h$ formulát használni, ami szigorúan véve nem a Sommerfeld-féle kvantálás, de további kvantummechanikai ismeretekkel megmutatható, hogy ez utóbbi vezet helyesebb eredményre.

Feladat megoldása

Mielőtt akármit is számolnánk, érdemes végiggondolni, hogy milyen alakú a potenciál. Ennek ismerete elengedhetetlen a feladat teljes megértéséhez. Természetesen a függvény alakja papíron is felrajzolható: pár konkrét x érték behelyettesítésével, és egy kis gondolkodással rögtön látszik az alakja. Egyszerűség kedvéért most számítógéppel kirajzoltam, ez látszik az ábrán. Mivel



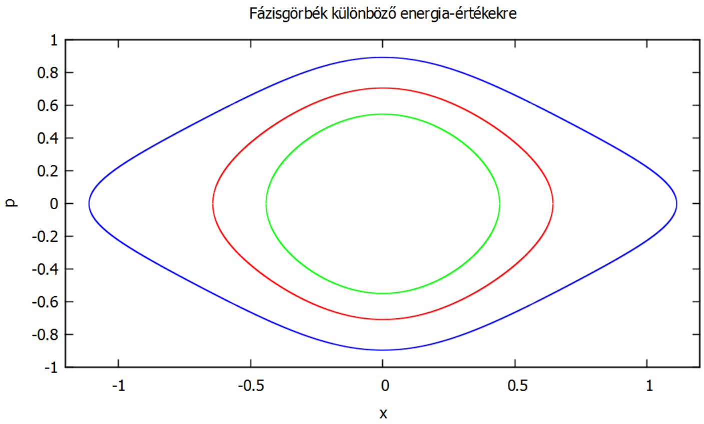
$V(x)$ aszimptotikusan 0-hoz tart, ezért láthatjuk, hogy a feladat szövegében megfogalmazott állítás, miszerint a kötött állapotok energiája $E < 0$, helyes. Írjuk fel a rendszer Hamilton-függvényét! A változói értelemszerűen x és p_x lesznek.

$$\mathcal{H}(x, p_x) = K + V = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{V_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2} \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy kiválasztunk egy adott $E < 0$ energiaszintet. Elsőéves mechanikai ismeretek alapján a potenciál ismeretében meghatározhatjuk a mozgás $x_{1,2}$ fordulópontjait, azaz azokat a pontokat, ahol $p_x = 0$. Ehhez most célszerű lesz, ha kiszámoljuk $p_x(x)$-et, majd a végeredményt egyenlővé tesszük 0-val.

$$p_x(x) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{V_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}} \tag{3}$$

A (3)-as formula megadja tehát adott x-re a részecske impulzusát. Pontosan ez lesz az a mennyiség, amit az (1)-es integrál alapján kell kiszámolnunk egy periódusra. Teljesség kedvéért ezt is ábrázolhatjuk, örömmel vehetjük tudomásul, hogy a görbe záródik, és véges kiterjedésű. A feladat most már nagyon egyszerű, csupán az ábrán látható görbe által határolt területet kell kiszámolnunk.



(3)-as egyenlet alapján először határozzuk meg a fordulópontokat!

$$x_{1,2} = \pm a \sqrt{\sqrt{\frac{V_0}{|E|}} - 1} = \pm z \tag{4}$$

Ezek ismeretében felírhatjuk a körintegrált, mint két x_1 és x_2 közötti integrál összege. Mivel a rendszer természetesen szimmetrikus az $x = 0$ tengelyre, ezért elég csak az egyik integrált kétszer venni.

$$2 \int_{-z}^{z} \sqrt{2m} \sqrt{E + \frac{V_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}} \mathrm{d}x = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \tag{5}$$

Sajnos ez egy esélytelen integrál, elemi függvényekkel nem kifejezhető a megoldása. A feladat ezen részét csak idáig lehet elvégezni. Azonban rögtön láthatjuk, hogy amennyiben $E = 0$ lenne, mégiscsak lehetne valamit kezdeni az integrállal, hiszen ez esetben nagyon leegyszerűsödne.

A feladat második fele azt kérte, hogy határozzuk meg a lehető legnagyobb energiájú állapotot, ehhez adjuk meg a hozzátartozó n_{max}-ot, ami természetesen a lehetséges kötött állapotok számát is jelenti. A potenciál alakjából láthatjuk, hogy természetesen az $E = 0$ lesz határesetben a legnagyobb energiájú lehetséges kötött állapot. A potenciál alakján, de természetesen (4)-ből is látszik, hogy ekkor a fordulópontok kitolódnak a végtelenbe. (A következőben egy kicsit matematikailag korrektül fogom leírni a problémát, természetesen semmi baj nincs azzal, ha valaki rögtön végtelent helyettesít be. Szigorúan véve E nem lehet 0, hiszen az már nem kötött állapot, ezért a fordulópontok se lesznek a végtelenben. Persze $E = 0$ tetszőlegesen megközelíthető, azaz a fordulópontok értéke is tetszőlegesen nagy lehet.)

$$\left(n_{max}+\frac{1}{2}\right)h = 2\lim_{z\to\infty}\int_{-z}^{z}\lim_{E\to 0}\sqrt{2m}\sqrt{E+\frac{V_0}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}}\mathrm{d}x \tag{6}$$

$E=0$-t behelyettesítve az integrál egyszerűen elvégezhető:

$$\left(n_{max}+\frac{1}{2}\right)h = 2\sqrt{2mV_0}\lim_{z\to\infty}\left[a\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-z}^{z} = 2\pi a\sqrt{2mV_0} \tag{7}$$

Ebből meghatározható n_{max}, a feladat kész.

2. Feladat

E=230 keV energiájú neutronok szórását vizsgáljuk berillium atommagokon (tömegszám: A=9, a berilliumfém sűrűsége: $\rho = 1850\frac{kg}{m^3}$). A céltárgy vastagsága d=0.05 mm, a hatáskeresztmetszet ilyen neutron-energiánál kb. a következő alakú:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \alpha + \beta\cos^2\vartheta$$

Másodpercenként 10^{10} darab neutron érkezik a céltárgyra, a $3cm^2$ felületű detektorunkat a céltárgytól 1 méterre helyezzük el, és különböző szórási szögekhez forgatjuk. $\vartheta = 30°$-nál másodpercenként 476 beütést, $\vartheta = 45°$-nál pedig 482 beütést mérünk. Mennyi ebből α, β értéke? Mennyi a teljes szórási hatáskeresztmetszet? Lássuk be, hogy a céltárgy vékonynak tekinthető!

Elméleti emlékeztető

Szórási feladatoknál néhány egyszerű képletet kell csak megjegyezni. Legyen I_0 a nyalábintenzitás, d a minta vastagsága, n a szórócentrumok sűrűsége, u az atomi tömegegység, σ_{det} a detektorba való szórás hatáskeresztmetszete, A a detektor felületének nagysága, D a detektor és a minta távolsága, σ_t pedig a teljes szórási hatáskeresztmetszet. Ezekkel kifejezhető a detektált nyaláb intenzitása, β_t.

$$\beta_t = I_0\frac{\rho}{A\cdot u}d\sigma_{det} = I_0 n d\sigma_{det} \tag{8}$$

Ahol σ_{det}:

$$\sigma_{det} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Delta\Omega \tag{9}$$

ahol $\Delta\Omega$ a detektor térszöge. A teljes szórási hatáskeresztmetszet a differenciális szórási hatáskeresztmetszet integrálja a teljes térszögre:

$$\sigma_t = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \tag{10}$$

Definiálnunk kell még a λ behatolási mélységet; amennyiben a tárgy vastagsága ennél jóval kisebb, a mintát vékonynak tekintjük.

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_t} \tag{11}$$

Feladat megoldása

A feladat elején érdemes kiszámolni gyorsan a szórócentrum-sűrűséget és a $\Delta\Omega$-t, hogy később már ne kelljen velük bajlódni.

$$n = \frac{\rho}{M} = \frac{1850\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{9 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}} \approx 1.23 \cdot 10^{29} \frac{1}{\mathrm{m}^3} \tag{12}$$

$$\Delta\Omega = \frac{A}{D^2} = 3 \cdot 10^{-4} \tag{13}$$

A teljes hatáskeresztmetszet kiszámításához (10)-es egyenletet kell használnunk ($\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$). Azonban mivel a differenciális hatáskeresztmetszet nem függ φ-től, ezért csak a ϑ szerinti integrálás marad meg:

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta(\alpha + \beta\cos^2\vartheta) \tag{14}$$

$y = \cos\vartheta$ helyettesítéssel $\mathrm{d}y = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta$:

$$\sigma_t = 2\pi \int_{-1}^1 \mathrm{d}y(\alpha + \beta y^2) = 4\pi\alpha + \frac{4}{3}\pi\beta \tag{15}$$

Használjuk most fel, hogy ismerjük két különböző ϑ-ra a detektált nyalábintenzitást! (8). egyenletből fejezzük ki σ_{det}-t és tegyük egyenlővé (9)-el:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Delta\Omega = \frac{\beta_t}{I_0 n d} \tag{16}$$

Ebben az egyenletben két ismeretlen is van, mindkettő a differenciális hatáskeresztmetszet paramétere. Mivel (16)-ot két ismert állapotra is ki tudjuk számolni, a két egyenletből megkaphatjuk mind α-t, mind β-t. A számolás eredménye: $\alpha = 2.67 \cdot 10^{-30}$ m^2, $\beta = -1.2 \cdot 10^{-31}$ m^2.

A paraméterek kiszámolásával (15)-be behelyettesítünk, és meg is van a teljes szórási hatáskeresztmetszet, ennek értéke $\sigma_t \approx 0.33$ barn.

Utolsó feladatunk, hogy megmutassuk, a minta vékonynak tekinthető. (11) alapján ez könnyen belátható:

$$\frac{1}{n\sigma_t} = 0.25 \text{ m} > 0.5 \text{ mm} \tag{17}$$

Ezzel a feladat kész.

3. Feladat

Antiprotonokat protonok protonokkal való ütköztetésével lehet kelteni, ekkor néha lejátszódhat a következő reakció: $p+p \to p+p+p+\overline{p}$*. Legyen a céltárgy proton állóhelyzetben; legalább mekkora impulzusú protont kell rálőnünk, hogy a reakció végbemehessen? Segítség: a keresett, legkedvezőbb helyzet az, amikor a végállapotbeli összes részecske egyforma nagyságú és irányú impulzussal halad tovább. A proton és az antiproton tömege egyenlő.*

Elméleti emlékeztető

Relativisztikus ütközések leírása nagyon hasonlít a klasszikus ütközésekéhez, itt is az energia és az impulzusmegmaradást fogjuk kihasználni, de egy merőben más alapon.

A relativitáselméletben (még nem volt, nem baj) a klasszikus 3 térkoordináta mellé be kell vennünk egy negyedik időkoordinátát is. Az így kialakított vektorokat négyes-vektoroknak hívjuk (ct, x, y, z).

Tanulni fogjátok, hogy a klasszikus impulzus, aminek csak 3 térkomponense van a relativitáselméletben úgy alakul négyesvektorrá, hogy 0. komponensként megkapja az energiát, azaz a négyes-impulzus: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \underline{p})$. Ennek minden komponensének meg kell maradnia egy folyamat során, ez a klasszikus energia-impulzus megmaradás a (speciális) relativitáselméletben.

Fontos egyenlet a fentiek mellett az úgynevezett tömeghéj-feltétel (ez gyakorlatilag annyit mond ki, hogy $p_\mu p^\mu = m^2c^2$, ami a négyesimpulzus alakjából triviális):

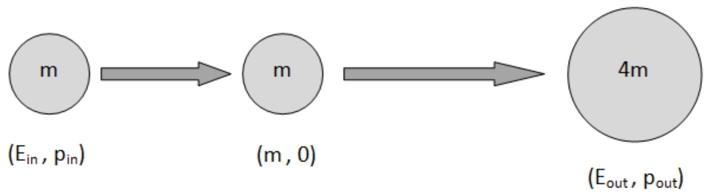
$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \tag{18}$$

Megjegyzés: sokszor érdemes $c = 1$ egységekben számolni, mivel jóval kevesebbet kell így írni.

Feladat megoldása

Legyen a proton tömege m, a befelé jövő proton négyesimpulzusa: (E_{in}, p_{in}), a keletkező részecskék együttes négyesimpulzusa: (E_{out}, p_{out}).

A feladat szövege szerint a kirepülő részecskék mind egy irányba és azonos impulzussal haladnak, azaz rájuk lehet úgy gondolni, mint egy $4m$ tömegű részecskére. Azaz sematikusan a következő ábrát kell elképzelnünk:



Nézzük meg először, hogy mit mond a négyesimpulzus-megmaradás: a bal oldalon összesen van $p^{\mu}_{bal} = (E_{in} + m, p_{in})$. Írjuk fel az első, mozgó protonra a tömeghéj-feltételt:

$$E_{in}^2 + p_{in}^2 = m^2 \quad \rightarrow \quad p_{in}^2 = E_{in}^2 - m^2 \tag{19}$$

Mivel a négyesimpulzus minden komponense megmarad, ezért a jobb oldal alakja szintén $p^{\mu}_{jobb} = (E_{in} + m, p_{in})$. Azonban itt természetesen már $4m$ nyugalmi tömegnek kell szerepelnie a tömeghéj-feltételben.

$$(4m)^2 = (E_{in} + m)^2 - p_{in}^2 = (E_{in} + m)^2 - (E_{in}^2 - m^2) = 2m^2 + 2mE_{in} \tag{20}$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk, és visszaszorozva c^2-tel:

$$E_{in} = 7mc^2 \tag{21}$$

A kérdés azonban nem az energia, hanem az impulzus volt, ami (19) alapján:

$$p_{in} = E_{in}^2 - m^2 = \sqrt{48}m \approx 6.93m \tag{22}$$

Azaz a bejövő proton impulzusának minimum $p_{in} = 6.93mc$-nek kell lennie.

4. Feladat

Az infravörös kamerák alkalmasak arra, hogy Föld-szerű, Naprendszeren kívüli bolygókat keressünk. Fontos lehet a fotonok megszámolása is (Tényleg!). Képzeljük magunkat egy innen 10 fényévre levő UFO helyébe, aki ott vizsgálja az $R = 6378$ km sugarú, $T = 300$ K hőmérsékletű Füldünk hőmérsékleti sugárzását! Milyen frekvencián a legintenzívebb a sugárzás? Ehhez mekkora hullámhossz tartozik? Összesen hány foton érkezik hozzá egy négyzetméterre?

Elméleti emlékeztető

Minden test minden nem nulla hőmérsékleten sugároz, ezt nevezzük hőmérsékleti sugárzásnak. A kisugárzott energia helyes formuláját Planck találta meg empirikus módon, ezért a megoldás görbéit ma is Planck-görbéknek szokás nevezni. Ez a felfedezés volt az első lépés a kvantumfizika felé.

Egy A felszínű test által ω frekvencián kisugárzott teljesítményt a Planck-formulából kaphatjuk meg:

$$P(\omega) = \frac{A}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{23}$$

A kisugárzott összes teljesítmény (teljes spektrumban) ennek a mennyiségnek az integrálja ω szerint. Ha nem a kisugárzott energiára, hanem a fotonok számára vagyunk kíváncsiak, akkor az integrálban osztanunk kell $\varepsilon = \hbar\omega$-val, ami egy ω frekvenciájú foton energiája.

$$N(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{A}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^2 \mathrm{d}\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{24}$$

Feltételezhetjük, hogy egy gömbszimmetrikus test által kisugárzott energia izotrop módon oszlik el a térben, azaz azonos térszögekbe azonos mennyiség jut.

4.1. Feladat megoldása

Először számoljuk ki, hogy milyen frekvencián a legintenzívebb a sugárzás, azaz hol van maximuma a (23)-as egyenletnek. Érdemes megjegyezni, hogy ez adott hőmérsékletre:

$$\omega_{max} \approx 2.82 \cdot T\frac{k}{\hbar} = 1.11 \cdot 10^{14} \quad \frac{1}{s} \tag{25}$$

Ezt átszámolva hullámhosszra:

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi c}{\omega_{max}} = 1.70 \cdot 10^{-5} \quad \mathrm{m} \tag{26}$$

Ez a hullámhossz erősen az infravörös tartományban van.

Ahhoz, hogy meghatározhassuk, mennyi foton érkezik az UFOhoz 10 fényévnyi távolságra egy négyzetméterre, ki kell számolnunk az UFO térszögét, és a Föld teljes felszínét.

$$A = 1.28 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2 \quad \Delta\Omega = \frac{A}{d^2} = 6.34 \cdot 10^{-16} \tag{27}$$

Tehát a kérdéses mennyiség:

$$N = \frac{\Delta\Omega}{4\pi}\int_0^\infty \frac{A}{4\pi^2c^2}\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} \tag{28}$$

Helyettesítsünk $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$-vel:

$$N = \frac{\Delta\Omega}{4\pi}\frac{A}{4\pi^2c^2}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^2\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{x^2}{e^x-1} \tag{29}$$

Ez az integrál el is végezhető meg nem is. Elemi úton esélytelen, mégis van neki megoldása. Hosszú szenvedéssel megmutatható, hogy:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{x^2}{e^x-1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \tag{30}$$

Ahol $\zeta(s)$ a Riemann-féle ζ függvény:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{31}$$

ahol s komplex száma valós része nagyobb, mint 1. Ennek a függvénynek mind matematikában, mind fizikában nagyon nagy és szerteágazó jelentősége van, csak hogy egy pár példát említsek: analitikus számelmélet, statisztika, prímszámok eloszlása, sőt még a húrelmélet is épít rá (konkrétan arra a felettébb izgalmas tényre, hogy: $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, ami azt jelenti, hogy a pozitív egész számok összege $-\frac{1}{12}$, ez igen meglepő!).

Mindez persze csak érdekesség. A feladat szempontjából csak annyi érdekes, hogy az integrál elvégezhető, és az értéke az ún. Apéry-szám (az integrál (29)-ben ennek a kétszerese lesz (30) miatt), ami körülbelül:

$$\zeta(3) \approx 1.20205 \tag{32}$$

A behelyettesítést az olvasóra bízzuk, és ezzel a feladat kész.