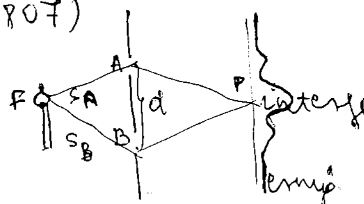
A kvantumvilág alapegyenlete

Schrödinger (1926)

T. Young (1801) (1807) : kétrés kísérlet



$\Phi_{ernyő} = \phi_A + \phi_B = A\left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}s_A} + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}s_B}\right)$

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$ $\qquad I_{ernyő}(P) = |\phi_{ernyő}(P)|^2 =$

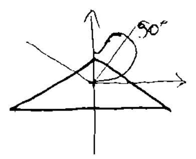
$I_{ernyő}(P) = 2|A|^2\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(s_A - s_B)\right)\right]$ interferencia $\quad = |A|^2\left(1+1+2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(s_A-s_B)\right)\right)$

koherencia → feltétele $d \sim \lambda$ nagyságrend $\qquad$ max: $s_A - s_B = n\lambda \quad n \in \mathbb{Z}$

G.I. Taylor (1909) : néhány mérföldre helyezte a gyertyát és így is tudott interferenciát létrehozni

Elektron hullámtermészete: Davisson, Germer (1927)

(M. v. Laue (1912) → Röntgen-sugárzás Ni egykristályra → elhajlási kép az ernyőn) $\lambda_X \sim 0{,}1$ Å



Ni egykristály kristálytani felületére elektront bocsátottak → van olyan szög, ahol maximális a visszaverődés → Bragg-szög

(1924) L. de Broglie felvetette, hogy minden anyagnak van hullámtermészete

"szótár" → mechanikai ↔ hullámtulajdonságok

(1900-1905) Planck, Einstein $\qquad E = h\nu = \hbar\omega$

$\underline{p}_{e.m.} = \frac{1}{c^2}\underline{S}_{e.m.}$ (Maxwell) $\qquad \underline{S}_{e.m.} = n \cdot c \cdot \hbar\omega$

Lebegyev (1900) $\qquad \underline{p}_{e.m.} = n\frac{h\nu}{c}\hat{e} = n\frac{h}{\lambda}\hat{e} \qquad \underline{p} = \frac{h}{\lambda}\hat{\underline{e}} = \hbar\underline{k}$

$\left\{ m_e\underline{v}_e = \hbar\underline{k} \quad \lambda = \frac{h}{m_e v_e} \right\}$ → az e^--t a legkönnyebb hullámviselkedést kimutatni

ezek minden anyagra

az elektron kiterjedtsége:

$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0\, e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}$ $\qquad S = \Delta(\underline{k}\underline{x} - \omega t)$

legegyszerűbb hullámegyenlet: (D'Alambert) $\qquad \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2\Psi(\underline{x},t)}{\partial t^2} - \Delta\Psi(\underline{x},t) = 0$

$\frac{\omega^2}{v_f^2} = k^2$ $\qquad$ fényre $\frac{\omega}{c} = k$

diszperziós reláció $\qquad \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$

KVANTUM

11.07.

$$m_e^2 v_e^2 = \hbar^2 k^2 \qquad \frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = \hbar\omega$$ → ilyen diszperziós reláció jönne ki elektronra → nem jó a D'Alembert egyenlet

$$i\hbar \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \hbar\omega\varrho = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}\varrho = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\varrho$$

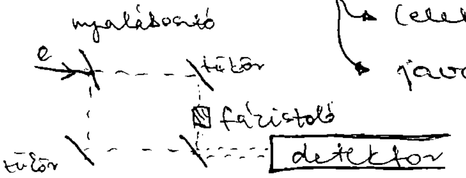
szabad részecsketerjedés Schrödinger-egyenlete:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\varrho}$$ lineáris egyenlet

1938. emigrált Marton László → National Bureau of Standards

1950. → (elektronmikroszkópiában fontos)

→ javasolta a kísérletet



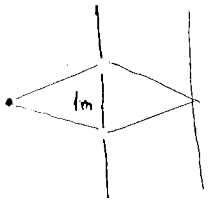
→ változtatott fázis esetén periodikus intenzitás

Mach-Zehnder-féle interferométer

Tübingenben C. Jönsson → kétréses kísérlet elektronra
(Z. f. Physik 161 454. old (1961))

R. Feynman (1962)

Mi történik, ha gyengítjük az elektronnyalábot?

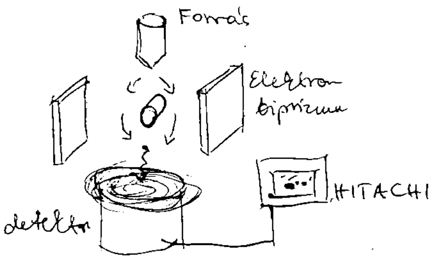


1989. Hitachi gyár labor
Akira Tonomura

$\frac{1}{2}$ órás, 10^3 elektron/s 50 keV ⇒ $v \sim \frac{1}{3}c$

egyesével pontszerűen detektálódnak az elektronok
ha nagyon sok gyűlik össze, akkor kialakul az interferenciakép

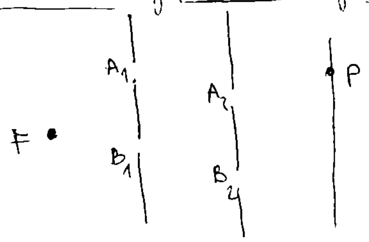
osztható-e az elektron? nem, nincs félelektron



ha megállapítjuk merre megy az elektron, akkor eltűnik az interferencia

a részecskének új tulajdonságot kell bevezetni

Valószínűségi amplitúdó:



terjedési utak 4féle:

$F \to A_1 \to A_2 \to P$
$F \to A_1 \to B_2 \to P$
$F \to B_1 \to A_2 \to P$
$F \to B_1 \to B_2 \to P$

bra ket

$$\Psi = \langle P|A_2\rangle\langle A_2|A_1\rangle\langle A_1|F\rangle + \langle P|B_2\rangle\langle B_2|A_1\rangle\langle A_1|F\rangle + \langle P|A_2\rangle\langle A_2|B_1\rangle\langle B_1|F\rangle + \langle P|B_2\rangle\langle B_2|B_1\rangle\langle B_1|F\rangle$$

Valószínűség $(F \to P) =$ [redacted] $|$eredő valószínűségi amplitúdó$|^2 = |\Psi|^2$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\underline{x}, t, \underline{x}_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\underline{x}, t, \underline{x}_0, t_0) \qquad \Psi(\underline{x}, t, \underline{x}_0, t) = \langle P|F\rangle$$

$$\sum e^{\frac{i}{\hbar} S_{kl}(\underline{x}t, \underline{x}_0 t_0)} = \Psi \quad \to \text{Feynman-féle pályaint.}$$

$\sum$: minden lehetséges útra; S_{kl}: klasszikus hatás egy út mentén

Feynman bebizonyította, hogy ez a Schrödinger-egyenletre vezet.

vizsgáljuk a köv. határmenetet $\hbar \to 0 \Rightarrow$ klasszikushoz közelítünk $\hookrightarrow$ ha $\delta S = 0$ Hamilton-elv kiválasztódik egy pálya

[redacted] $$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V_0\Psi}$$

konstans potenciálban mozgás Sch-egyenlete

$V(\underline{x}) = V_0 \neq 0$

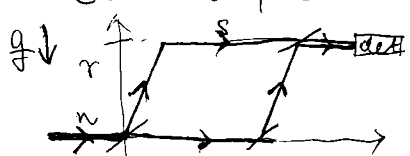
$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V_0$

$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0$ diszperziós reláció konstans potenciál esetén

$\downarrow$

kísérletileg kimérték neutronnal

Colella, Overhouser, Werner (1975)



$$\frac{\hbar^2(k+\Delta k)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k\Delta k}{m}$$

$e^{i(k+\Delta k)s}$ $\quad e^{iks}$ $\quad$ fáziskülönbség $e^{\Delta k s}$

$\Delta ks \sim n\frac{2\pi}{k}$ erősítés

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \underset{mgr}{V_0} = \hbar^2\frac{(k+\Delta k)^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hbar^2 k\Delta k}{m} = mgr$$

maximumok: $n = m^2 g r \frac{2\pi}{\hbar^2} s$ → s hossztól függ (11.14.)

Kis intenzitású részecskenyalábok interferencia értelmezése eljuttató a valószínűségi amplitúdóhoz:

$|\Psi(\underline{x},t,\underline{x}_0,t_0)|^2 = P(\underline{x},t)$ → valószínűség

$$i\hbar \frac{\partial\Psi(\underline{x},t,\underline{x}_0,t_0)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\underline{x}} + V_0\right)\Psi(\underline{x},t,\underline{x}_0,t_0)$$ ha $V(\underline{x}) = V_0 =$ áll.

diszperziós reláció: $\hbar\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + V_0$

Általánosítás: állapotról beszélünk

$\Psi(\underline{x},t)$ → kielégíti a Schrödinger-egyenletet

$e^{i\underline{k}\underline{x} - i\omega_k t}$ $\omega_k(\underline{k})$

↓

síkhullám

ez az állapot $\underset{\approx}{\hbar \underline{k}}$ ($\underline{p}$) tulajdonságú ⇒ határozott $\underline{p}$ impulzusú állapothoz társítjuk a részecskét

a valószínűségi értelmezésből követelmény:

$\int d^3\underline{x}\, P(\underline{x},t) = 1$

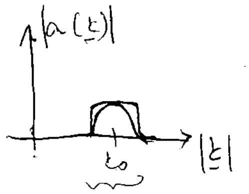
$P(\underline{x},t)\Delta V$ = azon a helyen a valószínűség

nincs olyan fizikai állapot, ahol az impulzus teljesen határozott ⇓ mindig van bizonytalanság

síkhullámok szuperpozíciója ⇓

$a(\underline{k})$ (complex) együtthatófv.

$\Psi(\underline{x},t) = \int d^3\underline{k}\; a(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{x} - i\omega(\underline{k})t}$ hullámcsomag



mindig van az impulzusmérésben "hiba"

$\Delta \underline{k}$ → nem lehet nulla, mert akkor nem lehet normálni

$$\int d^3x\, |\Psi(\underline{x},t)|^2 = \int d^3x \int d^3k\, a(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{x} - i\omega t} \int d^3k'\, a^*(\underline{k}') e^{-i\underline{k}'\underline{x} + i\omega(\underline{k}')t} =$$

$$= \int d^3k \int d^3k'\, a(\underline{k}) a^*(\underline{k}') e^{i(\omega(\underline{k}) - \omega(\underline{k}'))t} \int d^3x\, e^{i(\underline{k}-\underline{k}')\underline{x}}$$

KVANTUM 11. 14.

Dirac-féle δ "függvény":

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{i(k_1-k_1')x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{i(k_2-k_2')x_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{i(k_3-k_3')x_3}$$ szorzat

$-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ [redacted] $\Psi(x) = \Psi(x+L)$ $\quad e^{ikx} = e^{ik(x+L)}$

$kL = 2\pi n \Rightarrow k_n = \frac{2\pi}{L} n$

$$\Delta(n-n') = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{2\pi} e^{i(n-n')\frac{2\pi}{L}x} = \delta_{n,n'} \frac{L}{2\pi} \qquad L \to \infty$$

[redacted] sorozatot be egy normális $a(n')$ fv.-nyel

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \to dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k-k')x} = \begin{cases} 0, & k \ne k' \\ \infty, & k = k' \end{cases}$$

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \Delta(n-n') a(n') = \frac{L}{2\pi} a(n) \qquad \frac{2\pi}{L} \sum_{n'=\infty}^{\infty} \Delta(n-n')\, a(n') = a(n)$$

$\downarrow L \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x} = 2\pi\,\delta(k-k') \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \underbrace{\Delta(k-k')}_{\delta(k-k')}\, a(k') = a(k)$$

$$1 = \int d^3x\, |\Psi(\underline{x},t)|^2 = \int d^3k \int d^3k'\, a(\underline{k})\, a^*(\underline{k}')\, e^{i(\omega(\underline{k}') - \omega(\underline{k}))t} \underbrace{\int d^3x\, e^{i(\underline{k}-\underline{k}')\underline{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(k-k')} = *$$

$$\int d^3k'\, \delta^{(3)}(k-k')\, a^*(\underline{k}')\, e^{i\omega(\underline{k}')t} = a^*(\underline{k})\, e^{i\omega(\underline{k})t}$$

$$* = (2\pi)^3 \int d^3\underline{k}\, |a(\underline{k})|^2$$

<u>hullámcsomag:</u> $\Psi(\underline{x},t) = \int d^3k\, a(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} =$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \bar{a}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega(k)t)}$$

$$1 = \int d^3k\, |\bar{a}(\underline{k})|^2$$

Δk $\quad \underline{k} \quad p(k) = |\bar{a}(k)|^2$ [redacted]

a $\underline{k}$ egy folytonos valószínűségi változó $\Rightarrow$ a valószínűség-sűrűség $|\bar{a}(k)|^2$

várható érték: $\boxed{\langle f(\underline{k})\rangle = \int d^3k\, f(\underline{k})\, |\bar{a}(\underline{k})|^2}$

$k_s^{(2)}$

$$\Psi(\underline{x}_0, t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} |\bar{a}(\underline{k})|^2\, e^{i\delta(k) + i\underline{k}\underline{x} - i\omega(\underline{k})t_0}$$

hol van t_0-ban a hullámcsomag

a fázis, ahol a leglassabb változik

KVANTUM 11.14.

$$\frac{d\,\text{fázis}(\underline{k})}{dk_i} = \frac{d\delta(\underline{k})}{dk_i} + x_i - \frac{d\omega(\underline{k})}{dk_i} t$$

maximális járulék x_{oi} stacionárius fázis módszer

$$x_{oi} = \frac{d\omega(\underline{k})}{dk_i} t_0 - \frac{d\delta(\underline{k})}{dk_i}$$

$$x_i(t) = \frac{d\omega(\underline{k})}{dk_i} t - \frac{d\delta(\underline{k})}{dk_i}$$

$$x_i(t) - x_{oi} = \frac{d\omega(\underline{k})}{dk_i}(t - t_0)$$

$v_f = \frac{\omega}{|\underline{k}|}$ fázissebesség

↳ a részecske sebessége, csoportsebesség

diszperziós relációból ki lehet számolni:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + V_0 \qquad \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k_0}{m}$$

$$\Psi(\underline{x}, 0) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \bar{a}(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{x}} \quad \Big/ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\underline{k}'\underline{x}}$$

Δk

↕ Fourier - transzformáltak

$$\bar{a}(\underline{k}') = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{3/2}} \Psi(\underline{x}, 0)\, e^{i\underline{k}'\underline{x}}$$

Δx

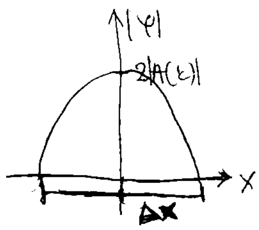
x és k nem független valószínűségi változók

tartó

$$\Psi(x, 0) = A(k)\left[e^{ik_0 x} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 + \frac{\Delta k}{2})x} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 - \frac{\Delta k}{2})x}\right]$$

$$A(k)\left(1 + \cos\frac{\Delta k}{2} x\right) e^{ikx}$$

viccses objektum



$$\frac{\Delta k}{2}\Delta x = 2\pi$$

$$\underbrace{\hbar \Delta k}\, \Delta x = 4\pi\hbar$$

$\boxed{\Delta p \Delta x = 2h}$ ez egy becslés, de

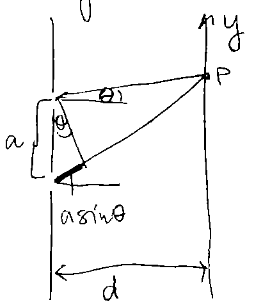
Fourier - analízisből → $\Delta k \Delta x \sim 1$ nagyságrendű

bebizonyított

tartók közötti kapcsolat

Heisenberg - féle határozatlansági reláció $\Delta p \Delta x \sim h$

a bizonytalanság megjelenik mindenféle hullámoknál



$$\Delta s = a \sin\theta = n\lambda$$

$$\theta_n = \frac{n\lambda}{a}$$

$$\delta y_{max} \cong d\frac{\lambda}{a}$$

eddig ez bármilyen hullám volt

de most meg akarjuk mondani melyik úton ment a részecske

$$\left.\begin{array}{l}\Delta y \approx \frac{a}{2}\\ \Delta y \Delta p_y \sim 2\hbar\end{array}\right\} \Delta p_y \sim \frac{4\hbar}{a} \qquad p_y \ll |p|$$

$$\sin\theta \approx \frac{p_y}{p}$$

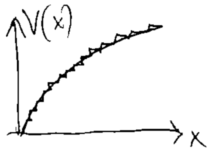
$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p_y}{p}$$

$$d\,\Delta\theta \sim \frac{4\hbar}{pa} d = \frac{4\lambda}{a} d = \delta_{\text{ernyő}}$$ → nincs interferenciakép,

ha megmondjuk kb. merre megy, szétkenődött a részecske

Erőhatás alatt mozgó részecske ⇒ $V(x)$ potenciál

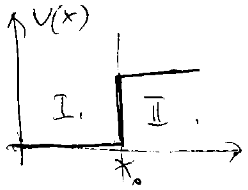
nézzük az egy dimenziós esetet:



$$i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{x}, t, \underline{x}_0, t_0)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\underline{x}} + V_0\right)\psi$$

$$\downarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_0 \psi$$



mi van a határon? ε időfüggetlen

$$i\hbar \frac{d}{dt}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \psi(x,t)\,dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx + V_I\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}\psi(x)\,dx + V_{II}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

Ha a ψ, V korlátos a feltételek: $\varepsilon \to 0$

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x_0+\varepsilon} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x_0-\varepsilon}\right] + 0$$

⇒ folytonos a derivált

$$\left[\begin{array}{l}\psi_I = \psi_{II}\\ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_I = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{II}\end{array}\right]$$

ha ez a két feltétel teljesül, akkor a konstansokra bontott V felcserélhető $V(x)$-szel (V korlátos)

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\underline{x}} + V(\underline{x})\right)\psi(\underline{x},t)}$$

Schrödinger-egyenlet potenciálgv.-nyel

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x,t)$$ (1D) - ben

valószínűségi mérlegegyenlet

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x,t)|^2\, dx =$$

(részecske megmarad)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(x,t)\psi^*(x,t)\right) dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\psi^* + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) dx = \frac{1}{i\hbar}\int_{x_1}^{x_2} dx \left[\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi\right) +\right.$$

$$\left. + \psi\left(\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*\prime\prime} - V\psi^*\right)\right] = \frac{i\hbar}{2m}\int_{x_1}^{x_2}\left(\psi^*\psi'' - \psi\psi^{*\prime\prime}\right) dx =$$

$[x_1, x_2]$ tartományba/ból áramlik a valószínűség $\Rightarrow$ valószínűségáram

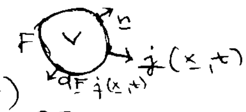
$$= \frac{i\hbar}{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left[\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right] dx = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$ $\rightarrow$ valószínűség-változási - sebesség

integrális megmaradási tétel

tegyük lokálissá:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\frac{d}{dx}\left(\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right)$$

általános megmaradási tétel



$\rho(\underline{x},t)$ $$\frac{d}{dt}\int d^3x\,\rho(\underline{x},t) = -\int_F dF\, j(\underline{x},t)$$ $\leftarrow$ Gauss-tétel

differenciálisan: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$$

1D - ben $\frac{\partial j}{\partial x}$ vissza

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 - \frac{i\hbar}{2m}\frac{d}{dx}\left(\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right) = 0$$

$$j(x,t)_{\text{valószínűség}} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

a valószínűség nem vész el $\rightarrow$ át tud áramlani

$$d^3x\, N(\underline{x},t) = N_{\text{összes}}|\psi(\underline{x},t)|^2 d^3x$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}|A(k)|^2$$ $p = \hbar k$

Fourier - kifejtési együttható

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}|A(p)|^2$$

$$P(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}|A(p)|^2$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\varphi(x,t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2\, dx = 1 \qquad \text{Sch-e.}$$

$$\rho_{val} = |\varphi(x,t)|^2 \qquad \frac{\partial \rho_{val}(x,t)}{\partial t} + \frac{d j_{val}(x,t)}{dx} = 0 \qquad \text{megmaradási e.}$$

$$j_{val}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi(x,t)\frac{d\varphi^*(x,t)}{dx} - \varphi^*(x,t)\frac{d\varphi(x,t)}{dx}\right)$$

hullámcsomagra valószínűségi áramsűrűsége:

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} A(k)\, e^{ikx - i\omega(k)t} \Rightarrow$$

$\omega(k)$: diszp. reláció

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, ik A(k)\, e^{ikx - i\omega(k)t}$$

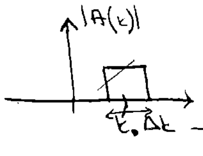
$$j_{val}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{2\pi} A(k)A^*(k')\, e^{ikx - i\omega(k)t}\cdot e^{-ik'x + i\omega(k')t}\left(-ik' - ik\right) =$$

$$j_{val}^{(csomag)}(x,t) = \int\frac{dk}{2\pi}\int\frac{dk'}{2\pi} A(k)A^*(k')\, e^{ikx - i\omega(k)t}\, e^{-ik'x + i\omega(k')t}\left(\frac{\hbar k'}{2m} + \frac{\hbar k}{2m}\right)$$

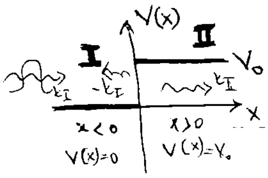
közelítjük k_0-lal (átlag)

(átlagos imp.)

$$\approx \frac{\hbar k_0}{m}|\varphi(x,t)|^2 = v_{átl}|\varphi(x,t)|^2$$



Δk viszonylag vékony



1. Feladat: potenciállépcső

mivel a Schrödinger-egyenlet lineáris, a komponensek függetlenül viselkednek $\Rightarrow$ elég a hullámcsomag helyett síkhullámmal számolni $\quad j_{sík}^{(be)} = \frac{\hbar k_I}{m}$

I. tartományban: $\varphi_I(x,t) = A e^{ik_I x - i\omega(k_I)t} + B e^{-ik_I x - i\omega(k_I)t}$

II. -"- $\quad \varphi_{II}(x,t) = C e^{ik_{II}x - i\omega(k_{II})t}$

$$\frac{\hbar^2 k_I^2}{2m} = \hbar\omega_I \qquad \frac{\hbar^2 k_{II}^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega_{II}$$

ha ez fenáll, akkor φ_I és φ_{II} megoldja a Sch-e.-t

határfeltételek: $\quad \frac{d\varphi_I(x=0,t)}{dx} = \frac{d\varphi_{II}(x=0,t)}{dx}$

$$\varphi_I(x=0,t) = \varphi_{II}(x=0,t)$$

$$(A+B)\, e^{-i\omega_I t} = C e^{-i\omega_{II}t} \qquad \omega_I = \omega_{II} \quad \text{(energiamegmaradás}$$

$A + B = C$ (A-t tudjuk)
$ik_I(A-B) = ik_{II}C$

$$B = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A \qquad C = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A$$

valószínűségi áramsűrűség a visszavert és a tovább haladó esetén:

$$j_{II}^{(t)} = |C|^2 \frac{\hbar k_{II}}{m} \qquad j_I^{(r)} = |B|^2 \frac{\hbar k_I}{m}$$

transzmittált, reflektált

def: $t = \frac{j_{II}^{(t)}}{j_I^{(be)}} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{k_{II}}{k_I}$ $\qquad r = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

transzmissziós tényező $\qquad$ reflexiós tényező

1) $E = \omega\hbar > V_0$ $\qquad \frac{\hbar^2 k_I^2}{2m} > V_0$

$$\frac{\hbar^2 k_{II}^2}{2m} + V_0 = E = \frac{\hbar^2 k_I^2}{2m} \qquad k_{II} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}$$ valós mennyiség

síkhullám halad tovább

$t = \frac{4k_I^2}{(k_I+k_{II})^2} \frac{k_{II}}{k_I} \neq 1 \Rightarrow$ lesz reflexió is, ami a részecskeképből nem jönne ki

$r = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2}$ $\qquad t + r = 1$ ✓

2) $E < V_0$ $\qquad k_{II} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)} = i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)} = iK$

$\psi_{II}(x,t) = Ce^{-Kx - i\omega t}$

exponenciálisan lecsengő a megtalálási valószínűség

$B = \frac{k_I - iK}{k_I + iK} A$ $\qquad k_I - iK = \rho e^{-i\varphi}$ $\qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{K}{k_I}$

$\qquad k_I + iK = \rho e^{i\varphi}$

$= e^{-2i\varphi} A$

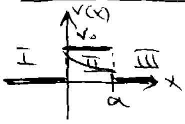
$\psi_I = Ae^{ik_Ix - i\omega t} + Ae^{ik_Ix - i\omega t} e^{-2i\varphi(k)} \rightarrow r = 1$

fázistolást kap a visszavert hullám

a visszavert hullám fázistolásából ki lehet találni milyen a ~~...~~ potenciál, amin szóródott

$C = \frac{2k_I}{k_I + iK} A$ $\qquad \psi_{II} = Ce^{-Kx - i\omega t}$ $\qquad |\psi_{II}(x,t)|^2$

2. Feladat potenciálgát



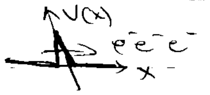
$\psi_I(x,t) = Ae^{ik_1x-i\omega t} + Be^{-ik_1x-i\omega t}$

$\psi_{II}(x,t) = Ce^{ik_2x-i\omega t} + De^{-ik_2x-i\omega t}$

$\psi_{III}(x,t) = Fe^{ik_1x-i\omega t}$

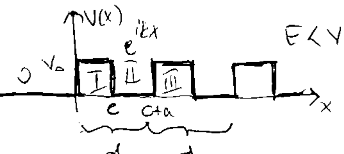
- mivan, ha $E=\hbar\omega < V_0$ $\quad \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}+V_0=E \quad k_2=i\kappa \quad [\kappa]=\frac{1}{m}$

  belül (II) kialakul egy exponenciális profil, ha a elég kicsi → $\frac{1}{\kappa}\gg a$, akkor a túloldalon a megtalálás valószínűsége jelentős lehet → alagúteffektu
- ha $\frac{1}{\kappa}\ll a$, akkor nem jelenik meg részecske a túloldalon (III) $\quad t=\frac{|F|^2}{|A|^2}$ → ka nagyságrendje jelenzi
- az alagúteffektust kihasználjuk a mai technikában, pedig a részecskeképből ez nem lehetne.
- úgy oldható meg a vékony potenciálgát, hogy egy elektromos térerősséget rakunk a V_0 ellen

  $V(x) = V_0 - E_{el}x$ 

 téremisszió

3. Feladat kristályrácsmodell



periodikusság

$\psi(x+d) = e^{iKd}\psi(x)$ → követelmény

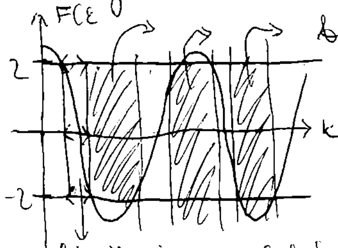
$\psi_0(x=0) = \psi_I(x=0) \qquad \psi_I(x=d) = \psi_{III}(x=d) = \psi_I(x=0)\,e^{iKd}$

$\psi_I(x=c) = \psi_{II}(x=c)$

↓ $-1 < \cos Kd = \dots$ (bonyi) < 1

mi a feltétele, hogy $-1<\cos Kd<1$ igaz legyen

k bizonyos lehet: $\quad 2\cos Kd = F(k)$

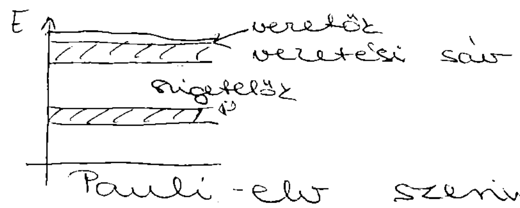


behatolás után lecseng exponenciálisan
↓
tiltott sávok

fizikai megoldás k → vezetési sávok

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} = E = \hbar\omega$

effektív tömeg → halad a vezetési sávban, mintha nem lenne potenciál

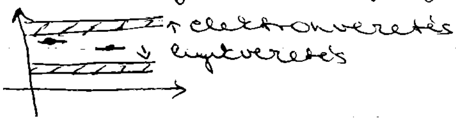


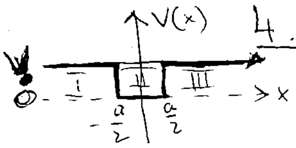
Pauli-elv szerint két elektron nem tartózkodhat ugyanabban az energiaállapotban

↳ az elektronok betöltenek egy szabad sávot → szigetelő

[redacted] a részlegesen betöltött sáv a vezető → tud mozogni kis energiával feljebb az elektron

félvezető:





4. Feladat Potenciálgödör

$0 < E < V_0$ esetet figyeljük

szimmetria $V(x) = V(-x)$

$\hbar\omega\varphi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\varphi(x)$ $\quad x \to -x$

$\varphi(x) \overset{!}{=} P\varphi(-x)$

$P\varphi(x) = \pm\varphi(x)$ határozott paritású f

I. $x < -\frac{a}{2}$ $\quad \varphi_I = Ae^{kx}$

III. $x > \frac{a}{2}$ $\quad \varphi_{III} = \pm Ae^{-kx}$

II. $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ $\quad \varphi_{II} = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} = B(e^{ikx} \pm e^{-ikx})$


lokalizált áll

állóhullámok alakulnak ki

kötött állapot: véges tartományon helyezkedik el

a megoldás: $\int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} |\varphi_I(x)|^2 dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\varphi_{II}(x)|^2 dx + \int_{+\frac{a}{2}}^{+\infty} |\varphi_{III}(x)|^2 dx$

Végtelen mély potenciálgödör:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > \frac{a}{2} \\ 0 & |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(\underset{\to\infty}{V_0} - E)} = \infty \Rightarrow e^{kx} = e^{-kx} \cong 0$

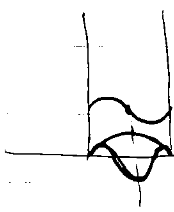
$\varphi_I = \varphi_{III} \equiv 0$

$\varphi_{II} = A\sin(kx)$ vagy $A\cos(kx)$

$\varphi_{II}(\pm\frac{a}{2}) = 0$ határfeltétel ⇒ meghatározza a k-t

$\sin k_{\sin}\frac{a}{2} = 0$ $\quad \frac{k_{\sin} a}{2} = n\pi$ $\quad k_{\sin} = \frac{2\pi}{a}n$

$\cos k_{\cos}\frac{a}{2} = 0$ $\quad \frac{k_{\cos} a}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi$ $\quad k_{\cos} = (2n+1)\frac{\pi}{a}$



lehetséges energiák:

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$ → végtelen mély potenciálgödör kötött állapotainak energiaszintjei

$\langle \hbar k \rangle$ impulzus várható értéke

$$\boxed{\langle \hbar k \rangle} = \int d(\hbar k)\, \hbar k\, \underset{\frac{1}{2\pi\hbar}|A(k)|^2}{P(\hbar k)} = \hbar \int \frac{dk}{2\pi}\, k\, |A(k)|^2 = *$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx_1 + ikx_2} = \delta(x_1 - x_2)$$

$$A(k) = \int dx\, \Psi(x,0)\, e^{-ikx}$$

$$* = \hbar \int \frac{dk}{2\pi} k \int dx_1 e^{-ikx_1} \Psi(x_1,0) \int dx_2 e^{ikx_2} \Psi^*(x_2,0) =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int \frac{dk}{2\pi} \int dx_1\, e^{-ikx_1} \Psi(x_1,0) \int dx_2 \left(\frac{d}{dx_2} e^{ikx_2}\right) \Psi^*(x_2,0) =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int dx_1 \text{[redacted]} \Psi(x_1,0) \int dx_2 \Psi^*(x_2,0) \frac{d}{dx_2} \text{[redacted]} \left(\delta(x_1-x_2)\right) =$$

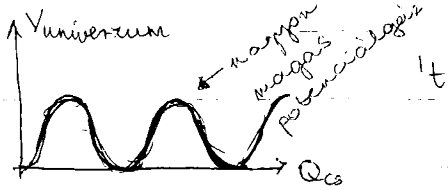
$$- \int dx_2 \left(\frac{d}{dx_2} \Psi^*(x_2,0)\right) \delta(x_1-x_2)$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int dx_2\, \Psi(x_2,0) \frac{d}{dx_2} \Psi^*(x_2,0)$$

ha tudjuk $\Psi(x)$-t, akkor tudjuk ezzel a képlettel az impulzus várható értékét

az impulzus mindig úgy jelenik meg, hogy a hullámfv.-re egy operátorral hatunk → operátorral azonosítjuk a fizikai mennyiséget

11.28.

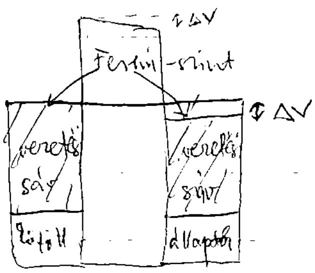


't Hooft hideg univerzum

$P_{\text{átmenet}} \sim e^{-170}$ protoneltűnés valószínűsége nagyon elenyésző

forró univerzum esetén termikus gerjesztéssel előfordulhatnak effektusok

$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \approx 10^{-10}$ → a szimmetrikus tv.-ekből nem jön ki ez az asszimetria



$P_{alagút} \sim e^{-\lambda d \leftarrow \text{távolság}}$

a két fém összeérintése nélkül alagútáram

1986 IBM Zürich

Binnig, Rohrer

Alagútmikroszkóp

apró csúcs → mozgatják az anyag fölött → az alagútáram változik

nagyon hideg hőmérsékleten
a pozicionálás tized nm-es pontosságú piezo-elektromos beállítókkal

Statisztika készítésre visszatérünk:

$$\langle p \rangle = \langle \hbar k \rangle = \int \frac{dk}{2\pi} \hbar k |A(k)|^2 = *$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x)\, dx$$

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hbar k \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-ikx_1} \varphi(x_1,0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{ikx_2} \varphi^*(x_2,0) = *$$

$$k e^{ikx_2} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx_2} e^{ikx_2}$$

$$* = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(e^{-ikx_1} \frac{d}{dx_2} e^{ikx_2}\right) \varphi(x_1,0)\varphi^*(x_2,0) =$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, \varphi(x_1,0) \frac{d\varphi^*(x_2,0)}{dx_2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x_2-x_1)}}_{\delta(x_2-x_1)} =$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, \varphi(x_1,0) \frac{d\varphi^*(x_1,0)}{dx_1}$$

$$\langle \hbar k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x,0) \underbrace{\left[\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right]}_{} \varphi(x,0)$$

operátor → társítható az impulzussal

$$\langle (\hbar k - \langle \hbar k \rangle)^2 \rangle = \langle (\hbar k)^2 \rangle - (\langle \hbar k \rangle)^2$$

erről kétszer kell alkalmazni az operátort; erre kész a recept

$$\langle (\hbar k)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x,0) \underbrace{\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2\right]}_{} \varphi(x,0)$$

operátor négyzete

A kvantumelméletben a fizikai mennyiségeket operátorokkal reprezentáljuk:
Impulzus kvantum reprezentációja: $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ operátor
Kvantum-amplitúdó $\varphi(x,t)$ → állapotfüggvény → állapottér ← lineáris tér

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x,t)\varphi_2(x,t)\, dx = (\varphi_1, \varphi_2) =$$

→ léteznie kell
→ skalár szorzat állapottéren

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

példa $= (\varphi_1, \hat{p}^2 \varphi)$

KVANTUM 11.28.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\Psi(x,t) =$$

$$= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right)\Psi(x,t)$$

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$\hat{X} = x$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$ Hamilton-operátor (energia)

D. Hilbert
↓
matematika
↕
Hilbert-térnek hívják az állapotteret

$$(\hat{p}\hat{X})\Psi(x) = \hat{p}(x\Psi(x)) = \frac{\hbar}{i}\left(\Psi(x) + x\frac{d\Psi}{dx}\right)$$

$$(\hat{X}\hat{p})\Psi(x) = \hat{X}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d\Psi}{dx}\right) = \frac{\hbar}{i}x\frac{d\Psi}{dx}$$

nem kommutatívak az operátorok

$$(\hat{X}\hat{p} - \hat{p}\hat{X})\Psi(x) = \hbar i \Psi(x)$$ $\forall \Psi$-re

$$(\hat{X}\hat{p} - \hat{p}\hat{X}) = \boxed{[\hat{X},\hat{p}] = i\hbar}$$ $[\,,]$ → kommutátor

$$\sqrt{\langle(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)^2\rangle} \cdot \sqrt{\langle(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{4}$$ bizonytalansági reláció bebizonyítható

Harmonikus oszcillátor:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$ a Hamilton-fv.-e

$$\hat{X}_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{X} \qquad \hat{p}_0 = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}$$

$$[\hat{X}_0, \hat{p}_0] = i$$ → dimenziótlanítottuk

$$\hat{H} = \hbar\omega\frac{1}{2}\left(\hat{p}_0^2 + \hat{X}_0^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned}(\hat{X}_0 + i\hat{p}_0)\frac{1}{\sqrt{2}} &= a \\ (\hat{X}_0 - i\hat{p}_0)\frac{1}{\sqrt{2}} &= a^+\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^+ + a^+a)} =$$

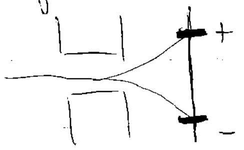
$$= \boxed{\hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)}$$

$$[a, a^+] = 1 \qquad aa^+ - a^+a = 1$$

$a^+a = 0, 1, 2 \ldots$ egész számokat vehet fel az energiaszintek
a legalacsonyabb energiának van $\frac{1}{2}\hbar\omega$ energiája
ω változhat → mérhető a két alapállapot közötti
energiakülönbség → zérusponti v. nyugalmi energia
a felcserélési relációból algebrailag mindent meg
lehet oldani, Sch.-e nélkül

Spin a kvantummechanikában

Stern - Gerlach - kísérlet (1922) + Einstein - de Haas - kísérlet (1916)



$\mu_z = \gamma \mu_B S_z$ → s.imp. mom.

γ: giromágneses faktor ≈ 2 (elektronra)

μ_B: $\frac{e}{2m}$ Bohr-magneton

a két mérésből ki lehet hozni a sajátmágneses momentumot és az S_z-t

$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ kvantált impulzusmomentum

pályamozgásból származó impulzusmomentum: $\boxed{L_z = m\hbar}$ → mellékkvantumszám

$-l \leq m \leq l$

$2l+1$ db megengedett érték

van olyan impulzusmomentum, ami pályamozgásból nem jön ki → spin = sajátimpulzusmomentum

a természeti törvényeknek a forgatási szimmetriájából következő tulajdonság.

$\hbar$ egészszer vagy félegészszer

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = \hat{H}\Psi_s = -\hat{\mu} B \Psi_s = -\gamma \mu_B \hat{L}_z B \Psi_s$$

$\Psi_s = \Psi_s(\underline{x}) e^{-i\omega t}$ ← pályamomentumot gondolunk

$$\underbrace{\hbar\omega}_{E} \Psi_s = -\gamma \mu_B \hat{L}_z B \Psi_s$$

megfelelő hely- és impulzus-operátor kombináció

↓ ↘ $2l+1$ számú lehetséges érték (Sommerfeld)

sajátfüggvényét kéne megkeresni

$\hat{S}_z$ operátor lehetséges értékeit kimértük

$$\begin{pmatrix} \Psi_+(x,t) \\ \Psi_-(x,t) \end{pmatrix} = \Phi \qquad \rho(x,t) = |\Psi_+(x,t)|^2 + |\Psi_-(x,t)|^2$$

~~a két különbözően sajátfügg.~~

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_+(x,t)|^2 + |\Psi_-(x,t)|^2 = 1$$

$$\int dx \left(\Psi_+^*, \Psi_-^*\right) \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = (\Phi, \Psi)$$

$$\hat{H} = -(\mu_B \gamma) B \hat{S}_z \qquad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} \quad |\alpha_\pm|^2 + |\beta_\pm|^2 = 1 \qquad \hat{S}_z \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\hat{S}_x$ $\hat{S}_y$ $\rightarrow$?

$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\hat{S}_x \Phi_\pm = \lambda \frac{\hbar}{2} \Phi_\pm$ $0 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}{\Phi_\pm}$ $-\lambda\alpha + \beta = 0$ $\alpha - \lambda\beta = 0$ $\lambda^2 - 1 = 0$ $\boxed{\lambda = \pm 1}$ $\Phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Phi_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar S_z$ $[\hat{S}_l, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ljk} S_k$

$\downarrow$

ha az egyik tengelyre vett impulzusmomentum határozott, akkor a másik kettő szétkent, határozatlan

$\hat{\underline{S}}$ vektorjellegű mennyiség

$\hat{S}_n = \underline{n}\hat{\underline{S}}_n = (\sin\theta\cos\varphi\, \hat{S}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{S}_y + \cos\theta\, \hat{S}_z)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ irányba $\rightarrow$ tetszőleges

$\hat{S}_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ sajátértékek megint ± 1

sajátállapotok már bonyolultabbak

KVANTUM 12. 05.

Stern - Gerlach - kísérlet → állapottér két dimenziós

$S_z = \frac{\hbar}{2}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bázisok

Definiálunk egy operátort az állapottéren, ami megméri a fizikai mennyiség lehetséges értékét:

$$\hat{S}_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \hat{S}_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S}}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$\hat{H} = -\hat{\underline{\mu}}\,\underline{B}$

külső mérőrendszer → klasszikus vektortér

az energiaállapotot a mágneses momentum határozza meg $-\hat{\underline{\mu}}\underline{B} = -(\gamma\mu_B)\,\hat{\underline{S}}\,\underline{B}$

két lehetséges energiaérték megengedett z irányba

szám

sajátimp.mom. operátora

Forgásinvariancia a mérés eredményében

$\hat{S}_x, \hat{S}_y$ operátorokat keressük: ugyanaz az értékkészlete, 2x2 es független mátrixok

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\hat{S}_x\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}}_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}}_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$$

↳ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ → a $\pm\frac{\hbar}{2}$ sajátállapotokhoz tartozó vektorok

↳ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ → az eredeti bázisokkal

$$|\Psi\rangle = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad P^z_{+\frac{\hbar}{2}} = |\alpha|^2 \qquad P^z_{-\frac{\hbar}{2}} = |\beta|^2 \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ha egyik irányban határozott a valószínűség, akkor a másik irányban határozatlan

$$\underline{S}\,\underline{n} = S_x \sin\Theta\cos\varphi + S_y \sin\Theta\sin\varphi + S_z\cos\Theta$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\Theta & \sin\Theta\, e^{-i\varphi}\\ \sin\Theta\, e^{i\varphi} & -\cos\Theta\end{pmatrix}$$ → $\underline{n}$ irányba mutató $\underline{B}$ tér mátrixa

$+\frac{\hbar}{2}$ állapot : $\underline{S}\,\underline{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

$$\text{I.}\ \frac{\hbar}{2}\left[\alpha\cos\Theta + \beta\sin\Theta\, e^{-i\varphi}\right] = \frac{\hbar}{2}\alpha \quad /\cdot\alpha^* \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\frac{\hbar}{2}\left[\sin\Theta\, e^{i\varphi}\alpha - \cos\Theta\,\beta\right] = \frac{\hbar}{2}\beta \quad /\cdot\beta^*$$

valós ← $|\alpha|^2(1-\cos\Theta) = \beta\alpha^*\sin\Theta\, e^{-i\varphi} = |\beta\alpha^*|\sin\Theta\, e^{i\arg(\beta\alpha^*) - i\varphi}$

$|\beta||\alpha|\sin\Theta$ valós ← $\arg(\beta\alpha^*) = \varphi$

KVANTUM 12.05.

I. $|\alpha|(1-\cos\theta) = |\beta| \sin\theta$ $\boxed{\arg(\beta\alpha^*) = \varphi}$

$|\beta|^2 (1+\cos\theta) = \alpha\beta^* \sin\theta \, e^{i\varphi}$ $\arg(\alpha\beta^*) = -\varphi$ → ugyanaz

II. $|\beta|(1+\cos\theta) = |\alpha| \sin\theta$

$|\alpha|(1-\cos\theta) = |\alpha| \cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2} = |\beta| \cancel{2} \cancel{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ $|\beta| \cancel{2} \cos^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2} = |\alpha| \cancel{2} \sin\frac{\theta}{2} \cancel{\cos\frac{\theta}{2}}$

$\boxed{\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}$ ezek is ugyanazok

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$|\alpha| = \cos\psi$ ⇓ $\psi = \frac{\theta}{2}$ $\arg\beta + \arg\alpha^* = \varphi$

$|\beta| = \sin\psi$ $-\gamma_\alpha$

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta/2 \cdot e^{i\gamma_\alpha} \\ \sin\theta/2 \cdot e^{i\gamma_\alpha + i\varphi}\end{pmatrix}$ γ_α szabad $\arg\beta = \varphi + \gamma_\alpha$

szimmetria miatt γ_α-t úgy szoktuk választani $-\frac{\varphi}{2}$

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}$ ez az állapot lesz, amit $\underline{S}\,\underline{n}$ $+\frac{\hbar}{2}$-szörön önmagába viszi

$-\frac{\hbar}{2}$-es állapot erre merőleges → kiszámolhatjuk:

(a kettő skalárszorzata 0)

$\underline{n}\,\underline{S} \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}$ nem mindig kell újraszámolni

$P^z_{+\frac{\hbar}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2}$ $P^z_{-\frac{\hbar}{2}} = \sin^2\frac{\theta}{2}$ (egység biztosítva)

$\langle S_z \rangle = \left(+\frac{\hbar}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$ a várható értékre teljesül a klasszikus megfontolás

$\langle (S_z - \langle S_z \rangle)^2 \rangle = \langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4}\cos^2\theta = \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta$ a szórásnégyzet

$(\Psi(x,t), \hat{P}\Psi(x,t)) = \int dx\, \Psi^*(x,t)\hat{P}\Psi(x,t)$ volt a skalárszorzat

$\left(\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right) \hat{S}_z \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix} =$ → skalárszorzat (kvadratikus alak)

$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$

ugyanaz

alkalmazni kell a skalárszorzat receptet és megkapjuk a várható értéket

pl.: $\hat{S}_x\hat{S}_y = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\hat{S}_z$

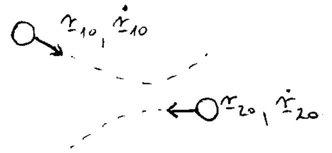
$\boxed{\hat{S}_i\hat{S}_j = i\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k + \delta_{ij}\frac{\hbar^2}{4}}$

$\hat{S}_i \hat{S}_j - \hat{S}_j \hat{S}_i = [\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$ (algebra)

az összesféle impulzusmomentumra igaz ez a Lie-algebra

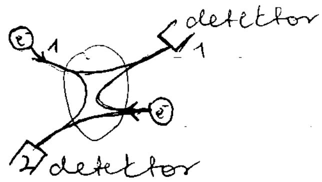
Azonos részecskék kvantumos viselkedése

klasszfiz:



végig követhető a pálya, és megkülönböztethetőek a golyók

elektronokkal



$|\Psi\rangle = |r_2 \to d_2, r_1 \to d_1\rangle +$
$|r_2 \to d_1, r_1 \to d_2\rangle$

nem tudjuk melyik részecske hova ment

$|\varphi(r_{20} \to d_2, r_{10} \to d_1) + \varphi(r_{20} \to d_1, r_{10} \to d_2)|^2 = P(d_1, d_2)$ egyidejű megtalálás

kicserélési interferencia van

az azonos részecskék kvantummechanikájában a plusz → a két részecske között történik valami

Természetben:

csak két fajta lineárkombináció lehet a természetben

$\hat{P}_{12} \varphi(1: p_1, 2: p_2) = \varphi(1: p_2, 2: p_1)$

$\varphi_{szim}(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{P}_{12}) \varphi(1: p_1, 2: p_2) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi(1: p_1, 2: p_2) + \varphi(2: p_1, 1: p_2)]$

$\varphi^{(p_1, p_2)}_{antiszim} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \hat{P}_{12}) \varphi(1: p_1, 2: p_2)$

→ felcserélés előjelváltást eredményez

Egyfajta kvantumrészecskére csak az egyik

proton, elektron, müon ⇒ fermionok $\frac{\text{Spin}}{\hbar} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots$

⟺ csak antiszimmetrizált

bozonok (foton) $\frac{\text{Spin}}{\hbar} = 1, 2, 3 \ldots$ ⇒ csak szimmetrikus

* két fotonról nem tudjuk melyik-melyik

nemlineáris kristálytól két foton mehet tovább:

$$h\nu \to 2\left(\frac{h\nu}{2}\right)$$

bozonokból lehet kettő ugyanabban az állapotban

⇔ minden elem felgyűlhet az alapállapotban

Bose-Einstein kondenzáció → alacsony hőmérsékleten

ugyanabban az alapállapotban → megvalósítható

Az elektronok nem lehetnek ugyanabban az

állapotban → elektronhéj elektronjai

minden tulajdonságuk nem egyezhetnek meg

Pauli-elv, feltöltik az energiaszinteket a

Fermi-szintig

Einstein-Podolsky-Rosen (1935) EPR-paradoxon:

Schrödinger (1934) ↓

gondolatkísérlet: az atom két fotont bocsát ki:

$$\overset{2}{\underset{\gamma}{\longleftarrow}} \cdot \overset{1}{\underset{\gamma}{\longrightarrow}}$$

$(\underline{x}_1, p_1)$ $(\underline{x}_2, p_2)$ a tulajdonságait

$(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$ $(p_1 + p_2)$

$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0 \Rightarrow$ felcserélhető

a relatív távolságot és az összimpulzust meg lehetne egyszerre mérni

„Ha egy tulajdonságot egységnyi valószínűséggel meg lehet mérni úgy, hogy ezzel a rendszer állapotában nem okozok változást, akkor ez a tulajdonság az objektív valóság része" (Einstein)

"x_1" $\xrightarrow{x_1 - x_2}$ "x_2"

mérjük x_1-et ⇒ x_2-vel rendelkezik a 2-es, mert már távol vannak és nem befolyásolják egymást vagy mérjük p_1-et $\Rightarrow$ p_2-vel rendelkezik a 2-es, mert már [redacted] nem hatnak kölcsön

tehát 100%-ra tudjuk p_2-t

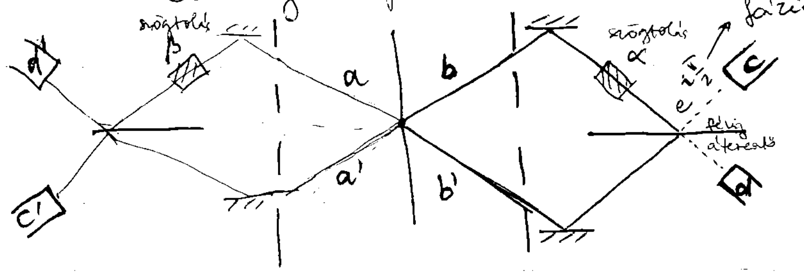
a 2-es helyén nem tudja a rendszer melyiket mérjük (1-es helyén) tehát 100%-osan kell x_2, p_2 tulajdonságokkal rendelkeznie $\Leftrightarrow$ ellentmondás a kvantumelmélettel

1964. J. Bell: bármennyire is furcsa, de nem lokális kapcsolat marad fenn, amíg megvan a kvantumállapot, a megkülönböztethetetlenség miatt

NEM-LOKÁLIS a kvantummechanika

méréssel el lehet dönteni:

Rarity-Tapster (1990)



fázistolás a visszavertnél, a b'-ből csak továbbmegy

vmelyik detektor megszólal

$$(|b\,a'\rangle + |b'\,a\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = |\text{kezdőállapot}\rangle$$

egyszerre megszólalás: $P(c \cap c')$ $\rightarrow$ mérhető

kvantumelmélet jóslata:

$$|a\rangle \rightarrow e^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|d'\rangle + |c\rangle\right) \qquad |a'\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|c'\rangle + |d'\rangle\right)$$

$$|b\rangle \rightarrow e^{i\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|c\rangle + |d\rangle\right) \qquad |b'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|d\rangle + |c\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|b\,a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|c\rangle + |d\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|c'\rangle + |d'\rangle\right) = \frac{e^{i\alpha}}{2\sqrt{2}}\left(-|cc'\rangle + i|cd'\rangle + i|dc'\rangle + |dd'\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|b'a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|d'\rangle + |c'\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|d\rangle + |c\rangle\right) = \frac{e^{i\beta}}{2\sqrt{2}}\left(-|dd'\rangle + i|cd'\rangle + i|dc'\rangle + |cc'\rangle\right)$$

$$\text{végeredmény} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big[\left(e^{-i\Delta}+e^{i\Delta}\right)|c'd\rangle + \frac{1}{i}\left(e^{-i\Delta}-e^{i\Delta}\right)|c'c\rangle + \frac{1}{i}\left(e^{i\Delta}-e^{-i\Delta}\right)|d'd\rangle + \left(e^{i\Delta}+e^{-i\Delta}\right)|d'c\rangle\Big] = \qquad \Delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big[\cos\Delta|c'd\rangle + \sin\Delta|c'c\rangle + \sin\Delta|d'd\rangle + \cos\Delta|d'c\rangle\Big]$$

$$P_{cc'} = \frac{1}{2}\sin^2\Delta \qquad P_{dc'} = \frac{1}{2}\cos^2\Delta \qquad P_{c'} = \frac{1}{2}$$

KVANTUM 12.12.

BBO (bárium-borát) kristály, ami nemlineárisan viselkedik $\omega \to \omega_1 + \omega_2$ $\omega_1, \omega_2 \approx \frac{\omega}{2}$

a két terjedés metszésében nem tudjuk az egyes fotonok polarizációját, mert megkülönböztethetetlenek

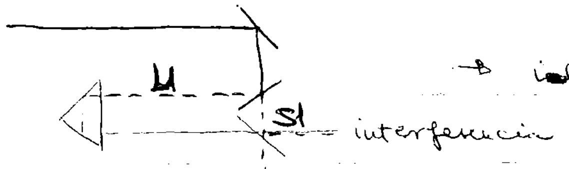
ezt le lehet fényképezni

a két interferenciagyűrűrendszer metszéspontjaiban extra erősítés lép fel

koherens polarizációs állapot:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|V\rangle_1 |H\rangle_2 + |H\rangle_1 |V\rangle_2\right)$$

Steinberg, Chiao, Kwiat (1993)



→ ilyen van a két fotonra, amik nagyjából egyformák

$\omega_1 + \omega_2 = \omega \to \hbar \underline{k}_1 + \hbar \underline{k}_2 = \hbar \underline{k}$ energiamegmaradás

mindegyikre van két út ⇒ $\boxed{\begin{matrix} L1 \\ S1 \end{matrix}}\boxed{\begin{matrix} L2 \\ S2 \end{matrix}}$

$|l_1\rangle_v \sim e^{ik_1L_1} |l_1\rangle_{eleje}$ $\frac{L_1 - S_1}{c} = \tau_1$ $\tau_1 < \tau_{koherencia}$

$|S_1\rangle_v \sim e^{ik_1S_1} |l_1\rangle_{eleje}$ ⇓ interferencia önmagában

$\frac{L_2 - S_2}{c} = \tau_2$ $\tau_2 < \tau_{koherencia} \Rightarrow$ interferencia

időben van a változás

a kísérletben beraktak időkésleltetést ⇒ $\tau_1, \tau_2 \gg \tau_{koherencia}$

önmagában nem lép fel interferencia

ha koincidenciát vizsgálunk, akkor $\tau_2 - \tau_1$ különbség számít $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_1S_2\rangle + |l_1l_2\rangle\right)$

felléphet köztük interferencia

$\frac{k}{2}(L_1 + L_2 - S_1 - S_2) = \Delta\phi$ → relatív fázis → ez lehet kicsi akkor is ha a fázisok nagyok

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{|S_1S_2\rangle}_{e^{i\frac{k}{2}(S_1+S_2)}} + \underbrace{|l_1 l_2\rangle}_{e^{i\frac{k}{2}(l_1+l_2)}}\right)$$

Jel: $\sim |1 + e^{i\Delta\phi}|^2 = 2(1 + \cos\Delta\phi)$ → karok hosszainak változtatásával periodikusan változik a detektorok közötti koincidencia

KVANTUM 12.12.

az időbeni távolság ellenére megmarad köztük az interferencia képessége
D. Bohm (1954) → átfogalmazta spinekre az Einstein - Podolsky - paradoxont

$s_2 = \frac{1}{2} \xleftarrow{s=0} \bullet \rightarrow s_1 = \frac{1}{2}$ → azonos spinűek

$S_z = 1 \; |\uparrow\uparrow\rangle \rightarrow S_z = 0 \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \rightarrow S_z = -1 \; |\downarrow\downarrow\rangle$ triplet áll.

két feles spinből 4 független áll. $S_z = 0 \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$
szinglet áll. $S = 0$

kérdés: ha az egyiken elvégzünk egy S_z mérést, akkor a másik ?
a rendszerbe bele van kódolva, hogy a balon mérve a jobb állapotát 100%-os valószínűséggel tudjuk

bal $s_{z1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ jobb $s_{z2} = -\frac{1}{2}$

S_x, S_y -ra ugyanezek igazak, mivel forgás-invariancia van

$S_{x1} \Rightarrow S_{x2} \quad S_{y1} \Rightarrow S_{y2}$

a nagyon messze lévő nem tudja melyiket mérjük ⇒ határozottan rendelkeznie kell az információkkal → spinekre is paradoxon, mert ha s_z határozott, akkor s_x, s_y nem határozott
→ kvantummechanika alapja

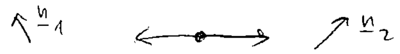
$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$

Rejtett paraméteres elmélet fogalmát javasolta Bohm $\{?\} = \lambda$ λ tulajdonságokat ha majd meg tudunk mondani, akkor tudnánk **S(λ)**-t nem tudjuk őket ⇒ van nekik valószínűség-sűrűségük $\rho(\lambda)$ $\int \rho(\lambda)\, d\lambda = 1$

$\langle S \rangle = \int d\lambda \, S(\lambda) \, \rho(\lambda)$

KVANTUM 12.12.

Bell: A probléma a paradoxonokkal az, hogy az eltávolodott rendszereket függetlennek tekintik. ⇒ Javasolta a köv. kísérletet:



$\langle (\underline{S}_1\underline{n}_1)(\underline{S}_2\underline{n}_2)\rangle =$ koincidenciamérés a függetlenség ellenőrzésére

$= -\frac{\hbar^2}{4}(\underline{n}_1\underline{n}_2)$ kvantummechanikából a várt érték

Rejtett param. lokális elméletek szerint ez lenne a $\underline{S}_1(\lambda)\underline{n}_1 \cdot \underline{S}_2(\lambda)\underline{n}_2$ mérés eredménye

vezessük be $\frac{\hbar^2}{4}C(\underline{n}_1,\underline{n}_2)$ fv.-t:

korlátos a változó értéke

$$\frac{\hbar^2}{4}C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) = \int d\lambda\, \underline{S}_1(\lambda)\underline{n}_1 \cdot \underline{S}_2(\lambda)\underline{n}_2\, \rho(\lambda)$$

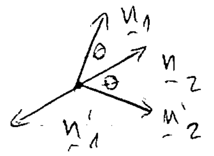
ha felveszünk még $\underline{n}_1', \underline{n}_2'$ irányt, akkor jön ki a Bell-egyenlőtlenség: (1971)

$$|C(\underline{n}_1,\underline{n}_2) - C(\underline{n}_1,\underline{n}_2')| + |C(\underline{n}_1',\underline{n}_2') + C(\underline{n}_1',\underline{n}_2)| \leq 2$$

a kvantummechanikai eredményt ide behelyettesítve ellentmondásra jutunk egy nagy szögtartományban az egyik elméletnek meg kell halni

a kvantummechanika nem értelmezhető a lokális rejtett-paraméteres elméletként

pl.:



$\underline{n}_1' = \underline{n}_2$

melyik elmélet írja le a természetet?

B. Shimony (1979), ..., A. Zeilinger >100km

sok-sok kísérletet elvégeztek sok-sok távolságra

⇓

mindig a kvantummechanika nyert $\boxed{-\cos\theta}$ $\checkmark$