

Atom- és kvantumfizika gyakUV megoldások (2009)

1. Az események száma a hatáskeresztmetszet (σ) definíciója szerint:

$$\text{események száma} = \sigma \cdot N_B \cdot n_a,$$

ahol N_B jelöli a céltárgyban elhelyezkedő részecskék számát, n_a pedig a szóródó részecskék egységnyi felületre eső száma. A j áramsűrűség megmondja, hogy egységnyi idő alatt mennyi töltés halad át egységnyi felületen, így

$$n_a = \frac{j}{2e} \cdot t,$$

ahol t a folyamat során eltelt idő. Vagyis az egységnyi időre vonatkozó események száma:

$$\frac{\text{események száma}}{t} = \sigma \cdot N_b \cdot \frac{j}{2e} \approx 6.25 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}.$$

2. A feladat szerint az egyes valószínűségek: $p_{\text{fel}} = 35\%$, $p_{\text{le}} = 65\%$. Vagyis a spin z -komponensének átlagos értéke ($\hbar = 1$ egységrendszerben):

$$\langle S_z \rangle = p_{\text{fel}} \cdot 1/2 + p_{\text{le}} \cdot (-1/2) = -0.15.$$

Egy általános $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ spinállapotban ez az átlag így számítható ki:

$$\langle S_z \rangle = (\alpha^* \ \beta^*) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Tekintettel arra, hogy $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ kell legyen, annak kell teljesülnie, hogy

$$|\alpha| = \sqrt{0.35}, \quad |\beta| = \sqrt{0.65}.$$

Bármilyen spinállapot, melyre ez a két feltétel teljesül, megfelel a feladat kritériumainak.

3. Csak akkor alakulhat ki kötött állapot, ha $g < 0$. Ekkor a részecske energiája negatív. A bal oldali tartományt I., a jobb oldalt II.-vel jelölve a hullámfüggvény így írható:

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}, \quad \psi_{II} = Be^{-\kappa x},$$

ahol $\kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$. A határon teljesülnie kell a következőknek:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \longrightarrow A = B,$$

$$\partial_x \psi_{II}(0) - \partial_x \psi_I(0) = \frac{2mg}{\hbar^2} \psi_I(0) \longrightarrow (A + B)\kappa = \frac{2mg}{\hbar^2} A.$$

Eszerint

$$\kappa = -\frac{mg}{\hbar^2},$$

vagyis az energia

$$E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}.$$