

Atom- és kvantumfizika gyakorlat

2. zárthelyi dolgozat feladatai

2013. december 17.

1. A harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora ugye a következő: $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$. Legyen az oszcillátorunk állapota a következő:

$$|\psi\rangle = A \left(|n\rangle + i|n+1\rangle + (1-i)|n+2\rangle \right),$$

ahol $n \in \mathbb{N}_0^+$, és ugye $|n\rangle$ az n -edik energiasajátállapot. Mekkora legyen az A együttható, hogy normált legyen az állapot? Határozzuk meg az \hat{x} koordináta és az \hat{x}^2 koordináta-négyzet várható értékét ebben a $|\psi\rangle$ állapotban!

2. Egy elektron spinállapota legyen $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, ahol $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ a z tengely irányú határozott spinű állapotok, α és β pedig komplex állandók, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Milyen \mathbf{n} irányba állítsuk a spinmérő eszközünket, ha azt szeretnénk, hogy a fenti állapotú spint \mathbf{n} irányban megmérve *biztosan* $+\frac{\hbar}{2}$ eredményt kapjunk? (Útmutatás: azaz milyen irányú spinoperátornak sajátállapota ez? Paraméterezzük az \mathbf{n} vektort gömbi koordinátákkal, az α és a β komplex számokat pedig abszolútértékükkel és fázisukkal! Ne feledjük: két komplex szám akkor egyenlő, ha az abszolútértékük és a fázisuk is az.)

3. Kötött állapotokat keresünk az alábbi egydimenziós potenciálban (ld. a lenti krixkraxot):

$$V(x) = \tilde{V}(x) - \alpha\delta(x-b) - \alpha\delta(x+b),$$

és a „simább” $\tilde{V}(x)$ potenciál pedig a következő:

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -a, \\ -V_0, & \text{ha } -a < x < a, \\ 0, & \text{ha } x > a, \end{cases},$$

ahol $V_0 > 0$ energia dimenziójú, a és b pedig hosszúság dimenziójú állandók, $a > b > 0$. Jelöljük ki azt az egyenletet (azaz: $\det \mathcal{M} = 0$ alakban írjuk fel, ahol \mathcal{M} egy mátrix), amiből meg lehetne határozni az energiasajátértékeket! (Nem kell kiszámolni a determinánst, pláne nem kell megoldani az így adódó egyenletet!)

Nagy Márton