Kvantumfizika ZH megoldások (2009) B csoport

1. Az erő $F = -4Dx^3$, így a potenciál: $V(x) = Dx^4$. A Bohr-Sommerfeld féle kvantumfeltétel szerint:

$$\oint p dx = n \cdot h.$$

A részecske energiája (mely mozgásállandó) tetszőleges pillanatban:

$$E = \frac{p^2}{2m} + Dx^4 \longrightarrow p = \sqrt{2m(E - Dx^4)}.$$

Kihasználva, hogy az amplitudó $A = (E/D)^{1/4}$:

$$\oint p dx = 4 \int_0^A \sqrt{2m(E - Dx^4)} dx = 4\sqrt{2mD} \int_0^A \sqrt{A^4 - x^4} dx.$$

Bevezetve az $y := x/A$ új integrálási változót, kapjuk:

$$\oint p dx = 4\sqrt{2mD}(E/D)^{3/4} \int_0^1 \sqrt{1 - y^4} dy = n \cdot h.$$

Így az energiaszintek:

$$E_n = n^{4/3} \frac{Dh^{4/3}}{3.343(2mD)^{2/3}}.$$

2. Különböztessük meg az alábbi két tartományt: jelölje I., melyre $x < 0$, illetve II., melyre $0 < x < a$. A hullámfüggvény az egyes tartományokban:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}.$$

Mivel a hullámfüggvény zérus a végtelen magas potenciálú tartományon, ezért

$$\psi_{II}(a) = 0 \longrightarrow C = -De^{-2ika}.$$

Mivel a hullámfüggvény folytonos az origóban, ezért (kihasználva, hogy $A = B$)

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \longrightarrow 2A = C + D \Longrightarrow D = \frac{2A}{1 - e^{-2ika}}.$$

Mivel a hullámfüggvény deriváltja ugrik az origóban (az ugrás mértékét a Dirac-delta szabja meg):

$$\partial_x \psi_{II}(0) - \partial_x \psi_I(0) = \frac{2mg}{\hbar^2} \psi_I(0) \longrightarrow ikC - ikD - ikA + ikA = \frac{2mg}{\hbar^2}(A + A).$$

A fentiek figyelembevételével az utóbbi relációból ki lehet küszöbölni az amplitudókat, és megkapjuk a hullámszámra vonatkozó egyenletet:

$$ik \frac{1 + e^{-2ika}}{1 - e^{-2ika}} = -\frac{2mg}{\hbar^2}.$$

3. Az átlagszámítás képlete alapján:

$$< \hat{x}\hat{p}^4 >= \int_0^a dx \psi_n^*(x) \hat{x}\hat{p}^4 \psi_n(x) = \int_0^a dx \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big) x \Big(\frac{\hbar}{i}\Big)^4 \frac{d^4}{dx^4}\Big[\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\Big].$$

Elvégezve a deriválásokat:

$$< \hat{x}\hat{p}^4 >= \frac{2}{a}\hbar^4 \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^4 \int_0^a dx x \sin^2\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big).$$

Alkalmazva a $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ azonosságot, majd parciális integrálás után eljutunk a végeredményhez:

$$< \hat{x}\hat{p}^4 >= \frac{2}{a}\hbar^4 \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^4 \int_0^a dx x \frac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2} = \frac{(\hbar n\pi)^4}{2a^3}$$

4. A spinállapot egységvektor kell legyen:

$$2\alpha^4 + \alpha^2 = 1 \longrightarrow \alpha_+^2 = 1/2, \quad \alpha_-^2 = -1.$$

Az egyik megoldás hamis gyök, vagyis α összesen kétféle értéket vehet fel:

$$\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A spin x-komponensének átlagos értéke:

$$< \hat{S}_x >= \left(\sqrt{2}\alpha^2 \;\; \alpha\right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{2}\alpha^3 = \pm\frac{1}{2}.$$