Kvantumfizika ZH megoldások (2009) **A csoport**

1. A Bohr-Sommerfeld féle kvantumfeltétel szerint:

$$\oint pdx = n \cdot h.$$

Mivel a dobozba zárt részecske impulzusának nagysága nem változik, ezért az kiemelhető az integrál elé, majd kifejezhető az energiával:

$$\oint pdx = 2a\sqrt{2mE} = n \cdot h.$$

Vagyis a lehetséges energiaszintek:

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}.$$

2. Különböztessük meg az alábbi két tartományt: jelölje I., melyre $-a < x < 0$, illetve II., melyre $0 < x < a$. Mivel a potenciál ezeken a tartományokon kívül végtelen magas, a hullámfüggvény csak I. és II. helyeken nem nulla.

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}.$$

A hullámfüggvénynek el kell tűnnie az $-a$ és a helyen:

$$\psi_I(-a) = 0 = \psi_{II}(a) \longrightarrow A = -Be^{2ika}, \quad D = -Ce^{2ika}.$$

A hullámfüggvény folytonos az origóban:

$$A + B = C + D \longrightarrow B(1 - e^{2ika}) = C(1 - e^{2ika}).$$

Feltéve, hogy $ka \neq n\pi$, kapjuk, hogy $B = C$ és így $A = D$. A hullámfüggvény deriváltja ugrik az origóban:

$$\partial_x\psi_I(0) - \partial_x\psi_{II}(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi_I(0) \longrightarrow ik(A - B) - ik(B - A) = \frac{2mg}{\hbar^2}(A + B).$$

Behelyettesítve az A értékét, B kiesik és megkapjuk az energiára vonatkozó egyenletet:

$$ik = -\frac{mg}{\hbar^2}\frac{1 - e^{-2ika}}{1 + e^{-2ika}}.$$

Ha $ka = n\pi$, akkor a Dirac delta nélküli dobozba zárt részecske negatív paritású hullámfüggvényeit kapjuk. Meglepő, de ez is megoldás, ugyanis ezek a hullámfüggvények eltűnnek az origóban, ezért a deriváltra vonatkozó feltétel a Dirac-delta jelenléte esetén is teljesül (ugyanis ebben a speciális esetben az éppen folytonos differenciálhatóságot ír elő).

3. Mivel az impulzus operátora csak egy-egy fel- és lefelé-léptető operátort taralmaz, ezért tetszőleges energia sajátállapotban az átlagos értéke zérus:

$$< \psi_n|\hat{p}|\psi_n >= i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}} < \psi_n|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})|\psi_n >= 0.$$

Az impulzus négyzetének az átlaga:

$$< \psi_n|\hat{p}^2|\psi_n >= -\frac{M\hbar\omega}{2} < \psi_n|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a}^\dagger - \hat{a})|\psi_n > .$$

Zárójelfelbontás után elegendő csak azokat a tagokat kiírni, melyekben ugyanannyi felfelé- és lefelé-léptető operátor szerepel, mert a többi nem ad járulékot:

$$< \psi_n|\hat{p}^2|\psi_n >= \frac{M\hbar\omega}{2} < \psi_n|(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})|\psi_n >= \frac{M\hbar\omega}{2}(2n+1).$$

Ez azt jelenti, hogy az impulzus szórása $\sigma_p = \sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\sqrt{2n+1}$. Tekintettel arra, hogy a hely szórása $\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\sqrt{2n+1}$, a szórások szorzata

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}(2n+1) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

4. A szóban forgó spinállapot az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Az átlagszámítás képlete szerint:

$$< \hat{S}_n >= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n^{(11)} & S_n^{(12)} \\ S_n^{(21)} & S_n^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_n^{(11)} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Mivel az általános irányhoz tartozó spinoperátor:

$$\hat{S}_n = \hat{S}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{S}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{S}_z \cos\theta,$$

ezért látszik, hogy (11) komponens csak a z-irányú spinoperátorból jön: $S_z^{(11)} = 1/2$. Eszerint csak a θ szög határozódik meg:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \theta = 30°.$$

A ϕ polárszög tetszőleges értéket vehet fel.