Kvantumfizika ZH megoldások **B csoport**

1. A Bohr-Sommerfeld féle kvantumfeltétel szerint periodikus mozgás esetén az impulzus hely szerinti integrálja egy periódusra a Planck-állandó egész számú többszöröse kell legyen:

$$\oint p dx = n \cdot h.$$

A $V(x) = \lambda(e^{a|x|} - 1)$ potenciálban való mozgás esetén a részecske energiája (mely mozgásállandó) tetszőleges pillanatban:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \lambda(e^{a|x|} - 1),$$

ahonnan kifejezhető az impulzus, mint a hely függvénye: *(2 pont)*

$$p = \sqrt{2m(E - \lambda(e^{a|x|} - 1))}.$$

A részecske mozgásának A amplitudóját abból származtathatjuk, hogy a szélső helyzetben a kinetikus energia zérus, ezért *(1 pont)*

$$E = \lambda(e^{aA} - 1).$$

Most már nekifoghatunk az integrál elvégzésének: *(1 pont)*

$$\oint p dx = 4 \int_0^A \sqrt{2m(E - \lambda(e^{ax} - 1))} dx = 4\sqrt{2mE} \int_0^A \sqrt{1 - \frac{\lambda(e^{ax} - 1)}{E}} dx.$$

Vezessük be az $y := \lambda(e^{ax} - 1)/E$ új integrációs változót, ekkor kapjuk: *(2 pont)*

$$\oint p dx = \frac{4\sqrt{2m}}{a} \sqrt{E} \int_0^{\lambda(e^{aA}-1)/E} \frac{\sqrt{1-y}}{y+\lambda} dy = n \cdot h.$$

Kihasználva az amplitudót megadó egyenletet, a megmaradt integrál felső határa éppen 1, ezért az csak a λ paramétertől függ. A teljes integrált I -vel jelölve kifejezhetjük az energiaszinteket: *(2 pont)*

$$E_n = \frac{h^2 a^2}{32 I^2 m} n^2.$$

2. Jelölje az egyes tartományokat balról jobbra haladva rendre $I.$, $II.$ és $III.$! A hullámfüggvény a $III.$ intervallumon zérus, mert itt végtelen magas a potenciál: *(1 pont)*

$$\psi_{III} = 0,$$

amiből rögtön az következik, hogy a transzmissziós együttható $t = 0$, ekkor viszont a reflexiós együttható $r = 1$ kell legyen. *(2 pont)* A hullámfüggvény a másik két tartományon: *(1 pont)*

$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \psi_{II} = Ce^{i\tilde{k}x} + De^{-i\tilde{k}x},$$

ahol $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ és $\tilde{k}=\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$. A hullámfüggvény folytonossága miatt kapjuk a következő két határfeltételt: *(2 pont)*

$$\psi_{II}(a)=\psi_{III}(a)=0 \quad \longrightarrow \quad Ce^{i\tilde{k}a}+De^{-i\tilde{k}a}=0,$$

$$\psi_I(0)=\psi_{II}(0) \quad \longrightarrow \quad A+B=C+D.$$

A hullámfüggvény folytonosan differenciálható a 0 helyen: *(1 pont)*

$$\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(0)-\frac{\partial\psi_{II}}{\partial x}(0)=0 \quad \longrightarrow \quad ikA-ikB=i\tilde{k}C-i\tilde{k}D.$$

A bejövő hullám A amplitudójának ismeretében az összes többi együttható meghatározható (az energia függvényében), melyekre kapjuk: *(5 pont)*

$$B=A\frac{g(E)-1}{g(E)+1},$$

$$C=A\frac{2g(E)}{1+g(E)}\frac{1}{1-e^{2i\tilde{k}a}},$$

$$D=-A\frac{2g(E)}{1+g(E)}\frac{e^{2i\tilde{k}a}}{1-e^{2i\tilde{k}a}},$$

ahol bevezettük az energiától függő $g(E)=\frac{k}{\tilde{k}}\frac{1-e^{2i\tilde{k}a}}{1+e^{2i\tilde{k}a}}$ kifejezést.
Megjegyzés: kiszámítható, hogy $|A|=|B|$, vagyis a reflexiós együtthatóra tényleg $r=1$ adódik.

3. Ki kell fejezni az impulzus és hely operátorokat a léptetőoperátorokkal:

$$\hat{p}=\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}i(\hat{a}^\dagger-\hat{a}), \qquad \hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a}).$$

A léptetőoperátorok hatása az oszcillátor energia-sajátállapotain:

$$\hat{a}|n>=\sqrt{n}|n-1>, \qquad \hat{a}^\dagger|n>=\sqrt{n+1}|n+1>,$$

melyek segítségével a mátrixelemek kiszámíthatóak. Az elsőre adódik: *(2 pont)*

$$<m|\hat{p}^2\hat{a}^\dagger|n>=-\frac{M\hbar\omega}{2}<m|\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger-\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\Big)|n>.$$

Kihasználva, hogy $<m|n>=\delta_{m,n}$, összevonások után kapjuk: *(2 pont)*

$$<m|\hat{p}^2\hat{a}|n>=-\sqrt{n+1}\frac{M\hbar\omega}{2}\Big(\sqrt{(n+2)(n+3)}\delta_{m,n+3}-(2n+3)\delta_{m,n+1}+\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-1}\Big)$$

A másik mátrixelem: *(2 pont)*

$$<m|\hat{x}\hat{p}|n>=\frac{\hbar}{2}i<m|\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}\hat{a}\Big)|n>,$$

ami összevonás után *(2 pont)*

$$< m|\hat{p}\hat{x}|n >= \frac{\hbar}{2}i\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \delta_{m,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big).$$

4. Nézhetjük nyugodtan a $V(x) = \gamma\delta(x-a)$ potenciál helyett a $\gamma\delta(x)$ potenciált is, a kötött állapotok energiája nem függhet attól, hogy hol vesszük fel a koordináta-rendszer origóját.

Kötött állapotokról akkor beszélünk, ha a hullámfüggvény korlátos intervallumon nem exponenciálisan lecsengő, ez esetünkben akkor és csak akkor teljesül, ha a részecske energiája negatív. *(1 pont)*

Balról jobbra rendre az egyes tartományokat $I.$ és $II.$-vel jelölve: *(1 pont)*

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}, \qquad \psi_{II} = Be^{-\kappa x},$$

ahol $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ *(2 pont)*. Kihasználtuk, hogy az exponenciálisan felnövő megoldások nem fizikaiak, ezért azoknak az együtthatóját nullának vettük. A határfeltételek: *(1 pont)*

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \qquad \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(0) - \frac{\partial \psi_I}{\partial x}(0) = \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi_I(0).$$

A két egyenlet a következőket adja: *(2 pont)*

$$A = B, \qquad -B\kappa - A\kappa = \frac{2m\gamma}{\hbar^2}A,$$

amiből κ és így az energia is meghatározható: *(1 pont)*

$$E = \frac{\gamma^2 m}{2\hbar^2}.$$

Megjegyzés: az A együtthatót az határozza meg, hogy a hullámfüggvény abszolútérték-négyzetének integrálja 1 kell legyen.

5. A θ, ϕ polárszögekkel jellemezhető irányba mutató egységvektor:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Az ilyen irányú spinhez, mint fizikai mennyiséghez tartozó operátor:

$$\frac{1}{2}\hat{S}_n = \frac{1}{2}\underline{n}\cdot\underline{\hat{S}} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\hat{S}_x + \frac{1}{2}\sin\theta\sin\phi\hat{S}_y + \frac{1}{2}\cos\theta\hat{S}_z.$$

A szóban forgó állapot az $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kétkomponensű mennyiséget jelenti. *(2 pont)* Expliciten nem kiírva a fent adódó $\frac{1}{2}\hat{S}_n$ mátrix egyes elemeit, az n irányú spin átlagos értéke: *(2 pont)*

$$< \frac{1}{2}\hat{S}_n >= \frac{1}{2}\,(0\ 1)\begin{pmatrix} S_n^{(11)} & S_n^{(12)} \\ S_n^{(21)} & S_n^{(22)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}S_n^{(22)}.$$

Vagyis a megoldás az n irányú spinoperátor (22) komponense. A Pauli mátrixok ismeretében (22) komponens csak az $\hat{S}_z$ mátrixból jön, amiből *(2 pont)*

$$< \frac{1}{2}\hat{S}_n >= \frac{1}{2}\cos\theta \hat{S}_z^{(22)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$