Kvantumfizika ZH megoldások **A csoport**

1. A Bohr-Sommerfeld féle kvantumfeltétel szerint periodikus mozgás esetén az impulzus hely szerinti integrálja egy periódusra a Planck-állandó egész számú többszöröse kell legyen:

$$\oint pdx = n \cdot h.$$

A $V(x) = \lambda|x|^3$ potenciálban való mozgás esetén a részecske energiája (mely mozgásállandó) tetszőleges pillanatban:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \lambda|x|^3,$$

ahonnan kifejezhető az impulzus, mint a hely függvénye: *(2 pont)*

$$p = \sqrt{2m(E - \lambda|x|^3)}.$$

A részecske mozgásának A amplitudóját abból származtathatjuk, hogy a szélső helyzetben a kinetikus energia zérus, ezért *(1 pont)*

$$E = \lambda A^3.$$

Most már nekifoghatunk az integrál elvégzésének: *(1 pont)*

$$\oint pdx = 4\int_0^A \sqrt{2m(E - \lambda x^3)}dx = 4\sqrt{2mE}\int_0^A \sqrt{1 - \frac{\lambda x^3}{E}}dx.$$

Vezessük be az $y := \lambda x^3/E$ új integrációs változót, ekkor kapjuk: *(2 pont)*

$$\oint pdx = \frac{4\sqrt{2m}}{3\lambda^{1/3}}E^{5/6}\int_0^{\lambda A^3/E} \frac{\sqrt{1-y}}{y^{2/3}}dy = n \cdot h.$$

Kihasználva az amplitudót megadó egyenletet, a megmaradt integrál felső határa éppen 1, vagyis semmilyen paramétert nem tartalmaz (egy konstans szám csak), melyet I -vel jelölve megkapjuk az energiaszinteket: *(2 pont)*

$$E_n = \left(\frac{3h\lambda^{1/3}}{I\sqrt{32m}}\right)^{6/5} \cdot n^{6/5}.$$

2. Nézhetjük nyugodtan a $V(x) = -g\delta(x + a)$ potenciál helyett a $-g\delta(x)$ potenciált is, a kötött állapotok energiája nem függhet attól, hogy hol vesszük fel a koordináta-rendszer origóját.

Kötött állapotokról akkor beszélünk, ha a hullámfüggvény korlátos intervallumon nem exponenciálisan lecsengő, ez esetünkben akkor és csak akkor teljesül, ha a részecske energiája negatív. *(1 pont)*

Balról jobbra rendre az egyes tartományokat $I.$ és $II.$-vel jelölve: *(1 pont)*

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}, \qquad \psi_{II} = Be^{-\kappa x},$$

ahol $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ *(2 pont)*. Kihasználtuk, hogy az exponenciálisan felnövő megoldások nem fizikaiak, ezért azoknak az együtthatóját nullának vettük. A határfeltételek: *(1 pont)*

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \qquad \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(0) - \frac{\partial \psi_I}{\partial x}(0) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\psi_I(0).$$

A két egyenlet a következőket adja: *(2 pont)*

$$A = B, \qquad -B\kappa - A\kappa = -\frac{2mg}{\hbar^2}A,$$

amiből κ és így az energia is meghatározható: *(1 pont)*

$$E = -\frac{g^2 m}{2\hbar^2}.$$

Megjegyzés: az A együtthatót az határozza meg, hogy a hullámfüggvény abszolútérték-négyzetének integrálja 1 kell legyen.

3. Jelölje az egyes tartományokat balról jobbra haladva rendre $I.$, $II.$ és $III.$! A hullámfüggvény a $III.$ intervallumon zérus, mert itt végtelen magas a potenciál: *(1 pont)*

$$\psi_{III} = 0,$$

amiből rögtön az következik, hogy a transzmissziós együttható $t = 0$, ekkor viszont a reflexiós együttható $r = 1$ kell legyen. *(2 pont)* A hullámfüggvény a másik két tartományon: *(1 pont)*

$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \psi_{II} = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x},$$

ahol $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ és $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$. A hullámfüggvény folytonossága miatt kapjuk a következő két határfeltételt: *(2 pont)*

$$\psi_{II}(0) = \psi_{III}(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad C + D = 0,$$
$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \quad \longrightarrow \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-\kappa a} + De^{\kappa a}.$$

A hullámfüggvény folytonosan differenciálható a $-a$ helyen: *(1 pont)*

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial x}(-a) - \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(-a) = 0 \quad \longrightarrow \quad ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} = C\kappa e^{-\kappa a} - D\kappa e^{\kappa a}.$$

A bejövő hullám A amplitudójának ismeretében az összes többi együttható meghatározható (az energia függvényében), melyekre kapjuk: *(5 pont)*

$$B = Ae^{-2ika}\frac{f(E)-1}{f(E)+1},$$

$$C = Ae^{-ika}\frac{2f(E)}{1+f(E)}\frac{1}{e^{-\kappa a} - e^{\kappa a}},$$

$$D = -Ae^{-ika}\frac{2f(E)}{1+f(E)}\frac{1}{e^{-\kappa a} - e^{\kappa a}},$$

ahol bevezettük az energiától függő $f(E) = \frac{ik}{\kappa}\frac{e^{-\kappa a}-e^{\kappa a}}{e^{-\kappa a}+e^{\kappa a}}$ kifejezést.
Megjegyzés: kiszámítható, hogy $|A| = |B|$, vagyis a reflexiós együtthatóra tényleg $r = 1$ adódik.

4. Ki kell fejezni az impulzus és hely operátorokat a léptetőoperátorokkal:

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

A léptetőoperátorok hatása az oszcillátor energia-sajátállapotain:

$$\hat{a}|n>= \sqrt{n}|n-1>, \qquad \hat{a}^\dagger|n>= \sqrt{n+1}|n+1>,$$

melyek segítségével a mátrixelemek kiszámíthatóak. Az elsőre adódik: *(2 pont)*

$$< m|\hat{p}^2\hat{a}|n>= -\frac{M\hbar\omega}{2} < m|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}\hat{a}\right)|n> .$$

Kihasználva, hogy $< m|n>= \delta_{m,n}$, összevonások után kapjuk: *(2 pont)*

$$< m|\hat{p}^2\hat{a}|n>= -\sqrt{n}\frac{M\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{n(n+1)}\delta_{m,n+1} - (2n-1)\delta_{m,n-1} + \sqrt{(n-1)(n-2)}\delta_{m,n-3}\right)$$

A másik mátrixelem: *(2 pont)*

$$< m|\hat{p}\hat{x}|n>= \frac{\hbar}{2}i < m|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}\right)|n>,$$

ami összevonás után *(2 pont)*

$$< m|\hat{p}\hat{x}|n>= \frac{\hbar}{2}i\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \delta_{m,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\right).$$

5. A θ, ϕ polárszögekkel jellemezhető irányba mutató egységvektor:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Az ilyen irányú spinhez, mint fizikai mennyiséghez tartozó operátor:

$$\frac{1}{2}\hat{S}_n = \frac{1}{2}\underline{n}\cdot\underline{\hat{S}} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\hat{S}_x + \frac{1}{2}\sin\theta\sin\phi\hat{S}_y + \frac{1}{2}\cos\theta\hat{S}_z.$$

A szóban forgó állapot az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kétkomponensű mennyiséget jelenti. *(2 pont)* Expliciten nem kiírva a fent adódó $\frac{1}{2}\hat{S}_n$ mátrix egyes elemeit, az n irányú spin átlagos értéke: *(2 pont)*

$$< \frac{1}{2}\hat{S}_n >= \frac{1}{2}\left(1\ 0\right)\begin{pmatrix} S_n^{(11)} & S_n^{(12)} \\ S_n^{(21)} & S_n^{(22)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}S_n^{(11)}.$$

Vagyis a megoldás az n irányú spinoperátor (11) komponense. A Pauli mátrixok ismeretében (11) komponens csak az $\hat{S}_z$ mátrixból jön, amiből *(2 pont)*

$$< \frac{1}{2}\hat{S}_n >= \frac{1}{2}\cos\theta\hat{S}_z^{(11)} = \frac{1}{4}.$$