Kvantumfizika pótZH megoldások (2009)

1. Az pályaperdület operátor egyes komponenseinek kifejezése:

$\longrightarrow \hat{L}_1 = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$
$\longrightarrow \hat{L}_2 = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$
$\longrightarrow \hat{L}_3 = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

Az $\hat{x}^2$ operátor csak $\hat{p}_x$-szel nem cserél fel, ezért először számítsuk ki a $[\hat{p}_x, \hat{x}^2]$ kommutátort:

$$[\hat{p}_x, \hat{x}^2] = \hat{p}_x\hat{x}\hat{x} - \hat{x}\hat{x}\hat{p}_x = \hat{p}_x\hat{x}\hat{x} - i\hbar\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x\hat{x} = \hat{p}_x\hat{x}\hat{x} - 2i\hbar\hat{x} - \hat{p}_x\hat{x}\hat{x} = -2i\hbar\hat{x},$$

ahol kihasználtuk, hogy $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Figyelembe véve tehát, hogy $\hat{x}^2$ mindennel felcserél, kivéve a $\hat{p}_x$ operátort, az egyes kommutátorok így írhatók:

$$\begin{aligned}
&[\hat{L}_1, \hat{x}^2] = 0,\\
&[\hat{L}_2, \hat{x}^2] = [\hat{z}\hat{p}_x, \hat{x}^2] = \hat{z}[\hat{p}_x, \hat{x}^2] = -2i\hbar\hat{z}\hat{x},\\
&[\hat{L}_3, \hat{x}^2] = [-\hat{y}\hat{p}_x, \hat{x}^2] = -\hat{y}[\hat{p}_x, \hat{x}^2] = 2i\hbar\hat{y}\hat{x}.
\end{aligned}$$

2. Balról jobbra haladva az egyes tartományokat I., II., és III. -nak elnevezve a hullámfüggvények így írhatók ($k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$):

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}, \quad \psi_{III}(x) = Fe^{ikx}.$$

A határfeltételek:

$$\begin{gathered}
\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = 0 \longrightarrow A + B = C + D,\\
\partial_x\psi_{II}(0) - \partial_x\psi_I(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi_I(0), \longrightarrow ik(C - D + B - A) = \frac{2mg}{\hbar^2}(A + B),\\
\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \longrightarrow Ce^{ika} + De^{-ika} = Fe^{ika},\\
\partial_x\psi_{III}(a) - \partial_x\psi_{II}(a) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi_{II}(a) \longrightarrow ik\Big[(F - C)e^{ika} + De^{-ika}\Big] = \frac{2mg}{\hbar^2}Fe^{ika}.
\end{gathered}$$

A bejövő hullám A amplitudójának függvényében az összes többi meghatározható. Az A amplitudó a hullámcsomag konkrét alakjától függ, amelynek a bejövő síkhullám a k hullámszámú komponense. Az egyenletek megoldása:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\gamma + (1+\gamma)\frac{2mg}{ik\hbar^2}}{1 - (1+\gamma)\frac{2mg}{ik\hbar^2}}A,\\
C &= \frac{1}{1 - (1+\gamma)\frac{2mg}{ik\hbar^2}}A,\\
D &= \frac{\gamma}{1 - (1+\gamma)\frac{2mg}{ik\hbar^2}}A,
\end{aligned}$$

$$F = \frac{\gamma}{\frac{2mg}{ik\hbar^2} - (1+\gamma)} e^{-2ika} A,$$

ahol $\gamma = e^{2ika} \frac{1}{\frac{ik\hbar^2}{2mg} - 1}$.

3. A kiszámolandó mátrixelem:

$$< \psi_m|\hat{p}\hat{x}|\psi_n >= \frac{i\hbar}{2} < \psi_m|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|\psi_n >= \frac{i\hbar}{2} < \psi_m|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a})|\psi_n > .$$

Alkalmazva a léptetőoperátorok hatását az energia sajátállapotokon, majd kihasználva az ortogonalitást ($< \psi_m|\psi_n >= \delta_{n,m}$):

$$< \psi_m|\hat{p}\hat{x}|\psi_n >= \frac{i\hbar}{2}\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \delta_{n,m} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big).$$

Tudjuk, hogy $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$, ezért

$$< \psi_m|\hat{x}\hat{p}|\psi_n >=< \psi_m|\hat{p}\hat{x}|\psi_n > + < \psi_m|i\hbar|\psi_n >=< \psi_m|\hat{p}\hat{x}|\psi_n > + i\hbar\delta_{n,m}.$$

Vagyis a másik keresett mátrixelem:

$$< \psi_m|\hat{x}\hat{p}|\psi_n >= \frac{i\hbar}{2}\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \delta_{n,m} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big).$$

4. A két szóban forgó síkhullám:

$$\psi^{(1)} = Ae^{i(kx-\omega t)}, \qquad \psi^{(2)} = \frac{A}{2} e^{i[(kx-\omega t)+\frac{\pi}{3}]}.$$

A kettő összege:

$$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)} + \frac{A}{2} e^{i[(kx-\omega t)+\frac{\pi}{3}]} = A\Big(1 + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\Big)e^{i(kx-\omega t)}.$$

Véve az abszolútérték négyzetet, megkapjuk a valószínűségsűrűséget:

$$|\psi|^2 = A^2\Big(1+\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\Big)\Big(1+\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}\Big)e^{i(kx-\omega t)}e^{-i(kx-\omega t)} = A^2\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\Big) = A^2\Big(1+\frac{1}{4}+\cos(\pi/3)\Big).$$

Vagyis a valószínűségsűrűség térben konstans:

$$|\psi|^2 = \frac{7}{4}A^2,$$

ami azt jelenti, hogy az így képezett hullámcsomag nem fizikai állapot.