Kvantumfizika pótZH megoldások

1. Kell: $T_{11}^* = T_{22}^*$, $T_{12} = T_{21}^*$, illetve $1 = \frac{|detT|^2}{|T_{22}|^2} + \frac{|T_{21}|^2}{|T_{22}|^2}$, mert a reflexiós és transzmissziós együttható összege 1 (kihasználtuk, hogy a két oldalon azonos a hullámszám). Az első két feltétel triviálisan teljesül *(2 pont)*, a harmadik átírható a

$$|T_{22}|^2 - |T_{12}|^2 = 1$$

alakba *(4 pont)*. Tekintettel arra, hogy esetünkben az egyenlet bal oldala $-3a^2$, ami nem lehet pozitív, ezért a kérdésre a válasz nemleges *(2 pont)*.

2. A felhasználandó felcserélési relációk:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0.$$

Kapjuk: *(3 pont)*

$$[L_i, p_j] = \epsilon_{imn}x_m p_n p_j - \epsilon_{imn}p_j x_m p_n = \epsilon_{imn}(x_m p_j - p_j x_m + p_j x_m)p_n - \epsilon_{imn}p_j x_m p_n = i\hbar\epsilon_{ijn}p_n.$$

A másik kommutátor: *(3 pont)*

$$[L_i, x_j] = \epsilon_{imn}x_m p_n x_j - \epsilon_{imn}x_j x_m p_n = \epsilon_{imn}x_m(p_n x_j - x_j p_n) = -i\hbar\epsilon_{imj}x_m.$$

3. Szórt állapotok akkor alakulnak ki, ha az energia pozitív. Balról érkező részecskét vizsgálva, balról jobbra haladva az egyes tartományokon érvényes hullámfüggvényeket írhatjuk a következő alakba: ($k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$) *(2 pont)*

$$\psi_I = Ae^{ik(x+a)} + Be^{-ik(x+a)}, \quad \psi_{II} = Ce^{ik(x+a)} + De^{-ik(x+a)}, \quad \psi_{III} = 0.$$

A határfeltételek: *(2 pont)*

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \quad \longrightarrow \quad A + B = C + D,$$

$$\partial_x\psi_{II}(-a) - \partial_x\psi_I(-a) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\psi_I(-a) \quad \longrightarrow \quad ik(A+D) - ik(B+C) = \frac{-2mg}{\hbar^2}(A+B),$$

$$\psi_{II}(0) = \psi_{III}(0) \quad \longrightarrow \quad Ce^{ika} + De^{-ika} = 0.$$

Az A amplitudó ismeretében kiszámítható a többi: *(2 pont)*

$$B = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}A,$$

$$C = \frac{i\hbar^2 k}{-2mg(1 - e^{-2ika}) + i\hbar^2 k(1 + e^{-2ika})}A,$$

$$D = -\frac{i\hbar^2 k e^{-2ika}}{-2mg(1-e^{-2ika}) + i\hbar^2 k(1+e^{-2ika})} A,$$

ahol $\lambda = \frac{1-e^{-2ika}}{\frac{-2mg}{i\hbar^2 k}(1-e^{-2ika})+(1+e^{-2ika})}$.
Kötött állapotok akkor jönnek létre, ha $E < 0$. Ekkor az egyes tartományokon a hullámfüggvény: ($\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$) *(2 pont)*

$$\psi_I = Ae^{\kappa(x+a)}, \quad \psi_{II} = Be^{-\kappa(x+a)} + Ce^{\kappa(x+a)}, \quad \psi_{III} = 0.$$

Határfeltételek: *(2 pont)*

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \quad \longrightarrow \quad A = C + B,$$

$$\partial_x\psi_{II}(-a) - \partial_x\psi_I(-a) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\psi_I(-a) \quad \longrightarrow \quad \kappa C - \kappa B - \kappa A = \frac{-2mg}{\hbar^2}A,$$

$$\psi_{II}(0) = \psi_{III}(0) \quad \longrightarrow \quad Be^{-\kappa a} + Ce^{\kappa a} = 0.$$

Az így adódó homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus, amiről megmutatható, hogy a

$$\frac{2mg}{\kappa\hbar^2} - 1 = \operatorname{cth}(\kappa a)$$

egyenlettel ekvivalens *(2 pont)*, ami egy implicit egyenlet az energiára.

4. Az első kiszámolandó integrál:

$$< \psi_n|xp|\psi_n >= \frac{2}{d}\int_0^d x\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx = \frac{2n\pi}{d^2}\frac{\hbar}{i}\int_0^d x\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx.$$

Trigonometrikus összefüggések alkalmazása és parciális integrálás után adódik: *(4 pont)*

$$< \psi_n|xp|\psi_n >= -\frac{\hbar}{2i}.$$

A második integrál:

$$< \psi_n|xp^2|\psi_n >= \frac{2}{d}\int_0^d x\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\frac{\hbar^2}{i^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx = \left(\frac{n\pi\hbar}{d}\right)^2\frac{2}{d}\int_0^d x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx,$$

amire rövid számolás után kapjuk: *(4 pont)*

$$< \psi_n|xp^2|\psi_n >= \frac{(n\pi\hbar)^2}{2d}.$$

5. A szóban forgó spinoperátor:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}S_x + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}S_z.$$

Mátrixalakban: *(2 pont)*

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek $+1/2$ és $-1/2$, a normált sajátvektorok pedig rendre *(4 pont)*

$$\underline{v}_{+1/2} = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_{-1/2} = -\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$