Atomfizika gyakorlófeladatok, 3. adag

Nagy Márton

2017. október 9&12, október 16&19.

Vázlat:

• 5. óra:

Fotonok tipikus energiái. Relativisztikus kinematika tovább, gerjesztett atom foton-kisugárzása. Bohr-modell még egyszer, érdekességek: müonikus hidrogén (mese a müon-katalizált fúzióról), pozitrónium, deutérium felfedezése. Sommerfeld-kvantumfeltétel bevezető, példák: oszcillátor, x^4-es potenciál.

• 6.óra:

Sommerfeld-kvantálás tovább, véges vagy végtelen darab energiaszint van-e. Hidrogénatom Sommerfeld-je: említés szintjén, jegyzet elküldve. Hőmérsékleti sugárzás, Planck-törvény. Stefan-Boltzmann levezetése, különféle integrálok. Izzólámpa hatásfoka. (?)

Most is írok útmutatásokat, megjegyzéseket a feladatokhoz, de lentebb: azért, hogy aki akar, „az útmutatások zavaró hatása nélkük" gondolkozhasson.

Gyakorló számolások:

1. Határozzuk meg a Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján egy m tömegű, a g gyorsulású homogén nehézségi erőtérben pattogó labda lehetséges energiáit!

2. Határozzuk meg (a Sommerfeld-kvantumfeltétel alapján), hogy véges vagy végtelen sok energiaszint van-e az alábbi potenciálban:

$$V(x) = -\frac{V_0}{\left(1 + \frac{x^\alpha}{a^\alpha}\right)^2},$$

ahol α>0 valós szám.

3. Egyszerű, de fontos feladat: határozzuk meg, hogy egy véges, a hosszúságú „szakaszba zárt", egydimenziós mozgást végző m tömegű részecskének milyen energiaszintjei lehetnek!

4. Az előző feladat alapján most vizsgáljuk egy háromdimenziós $a\times b\times c$ téglatest alakú dobozban való mozgást. Ha mindhárom koordináta szerinti mozgás külön-külön periodikus (most is ez a helyzet), akkor lehet ezek mozgására külön-külön alkalmazni a Sommerfeld-kvantumfeltételt. Ez alapján mik a $\mathbf{p}$ impulzus és az E energia lehetséges értékei? Hát a $|p|$ impulzusnagyságé? Az eredmény alapján, tudva, hogy adott impulzusnagysághoz két (egy $-p$ és egy p értékű) impulzus tartozik, értelmezzük azt a mondást (amit annak idején a Maxwell-Boltzmann-sebességeloszlás levezetésekor már felhasználtunk), hogy V térfogatú

dobozban egy $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ impulzustérfogat-elemben $\frac{V\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{h^3}$ darab állapot „fér el" (ha „nem túl kicsi" $|\mathbf{p}|$ értékekről van szó).

5. Az órán megbeszéltük, hogy ha egy álló M tömegű atomban ΔE gerjesztési energia felszabadul, akkor E_γ energiájú foton keletkezik, ahol E_γ kb. egyenlő ΔE-vel, de az impulzusmegmaradás miatt kicsit kisebb nála. A $\frac{\Delta E}{Mc^2}$ kis paraméterben sorfejtve $E_\gamma = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$ adódott. Határozzuk most meg (ugyaneddig a rendig sorfejtve), hogy mekkora E'_γ energiájú bejövő foton tudja az alapállapotú atomot ΔE energiával gerjeszteni, ha figyelembe vesszük az impulzusmegmaradást is! Említettem a választ: $E'_\gamma = \Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$.

6. Tekintsünk egy álló M_0 tömegű részecskét, mely két részecskére bomlik: egy nulla tömegűre, valamint egy $M{<}M_0$ véges tömegűre. Az energia– és impulzusmegmaradás alapján lássuk be, hogy a nulla tömegű részecske által elvitt energia $\varepsilon = \frac{M_0c^2}{2}\left(1-\frac{M^2}{M_0^2}\right)$.

7. Az előző feladatban kapott eredményt alkalmazzuk visszamenőleg a ΔE gerjesztési energiájú atom foton-kibocsátására! Ezt úgy tehetjük meg, hogy a gerjesztett atomot $M_0{=}M + \frac{\Delta E}{c^2}$ tömegű „részecskének" (a nagyobb energiának tömege is van…), a „keletkező" alapállapotú atomot pedig az M tömegű részecskének tekintjük. Határozzuk meg ebből a foton E_γ energiáját! Tekintsük ezután, mint az előbb, a $\Delta E{\ll}Mc^2$ esetet, és fejtsük sorba a kapott (igazi) E_γ értéket a $\frac{\Delta E}{Mc^2}$ szerint! Lássuk be, hogy *nem* ugyanazt kapjuk, mintha a korábban butábban számolt eredményt (ld. az előző előtti feladat útmutatását) sorbafejtjük!

8. Nézzük végig részletesen a Bohr-modellt abban az esetben, amikor nem hanyagolható el a központi mag mozgása! Legyen ennek tömege M, a keringő test (elektron) tömege pedig m, a mag rendszáma Z. Továbbra is az, hogy a centripetális erő az elektrosztatikus erő, de most a közös tömegközéppont körül történik a mozgás, és a teljes energiába beleszámít a mag mozgási energiája is. A kvantumfeltétel legyen $J = nh$, ahol J a teljes (a magot is beleértett) impulzusmomentum. Lássuk be, hogy az energiakifejezés: $E_n = -\frac{m'}{2\hbar^2}\left(\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$, ahol $m' = \frac{mM}{m+M}$ a redukált tömeg.

9. Az előző feladat alapján határozzuk meg a hidrogénatomban ($Z{=}1$, és egy darab elektron kering) az $n{=}3$ és az $n{=}2$ szintek közötti átmenet frekvenciáját és hullámhosszát (ez a színképvonal az ún. Balmer-sorozat tagja, látható fény). Mekkora a frekvenciák (és a fotonenergiák) különbsége a könnyűhidrogén (H, ekkor a mag egy m_p tömegű proton) és a deutérium (D, ekkor a mag egy kb. $2m_p$ tömegű deutériummag) esetei között?

10. Tudjuk (a Sommerfeld-kvantálásból is, és a Planck-törvény levezetése közben is előkerült), hogy egy ω frekvenciájú harmonikus oszcillátor lehetséges energiaszintjei $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$, ahol $n{=}0, 1, 2, \ldots$ nemnegatív egész szám. Tegyük fel azt is (mint eddig), hogy T hőmérsékleten egy állapot w_n valószínűsége $\exp\left(-E_n/k_\mathrm{B}T\right)$-vel arányos. Határozzuk meg ez alapján egy ilyen harmonikus oszcillátor C_1 *fajhőjét*! Először számítsuk ki (azaz: idézzük fel), hogy T hőmérsékleten mennyi az $E(T)$ energia (ez tulajdonképpen az energia várható értéke); a C_1 fajhő ennek T szerinti deriváltja.

11. Mekkora egy $T{=}2600$ K-es hőmérsékletű izzószálas lámpa hatásfoka, azaz a kisugárzott teljesítményének mekkora részét adja le látható fény formájában?

12. Az előző feladat számolása még egyszer: a Nap felszínéről tegyük fel, hogy T=5800 K-es feketetest-sugárzó. A Nap energiájának mekkora része jön UV tartományban (λ<400 nm), látható fény tartományban (400 nm< λ <780 nm), illetve infravörös tartományban (a maradék)? A lényeg: használjuk az előző feladatban is alkalmazott közelítést, de vizsgáljuk meg, hogy mennyire jogosan tehetjük ezt meg!

13. Tudjuk, hogy egy A felületű, T hőmérsékletű feketetest teljesítményspektruma $P(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{A}{4\pi^2c^2}\frac{\hbar\omega^3\mathrm{d}\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}-1}$. Találjuk ki ez alapján, hogy mi a kisugárzott fotonok $\dot{N}(\omega)\mathrm{d}\omega$ számeloszlása, azaz *hány darab*, ω és ω+dω közé eső frekvenciájú fotont bocsát ki a felület másodpercenként! Hát összesen (minden frekvencián) hány darabot? (Megjegyzés: az utóbbi kérdésre adott válaszban elő fog kerülni az $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}$ integrál, amit az órán látott sorfejtéssel vissza lehet vezetni az $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\dots$ számra. Ennek jelölése $\zeta(3)$, értéke pedig kb. 1,202.... Ez egy „teljes jogú valós szám", nem lehet mindenféle π^3-ökkel meg ilyenekkel kifejezni.)

14. Milyen frekvencián bocsátja ki a feketetest a legtöbb fotont?

15. Tekintsünk egy, a világmindenség közepén magára hagyott M tömegű, C fajhőjű, tökéletesen jó hővezető, A felületű és t=0-ban T_0 hőmérsékletű testet, ami úgy hűl, hogy a környezetbe kisugározza a hőenergiáját. Hogyan függ a test hőmérséklete az időtől?

Útmutatások, megjegyzések a feladatokhoz:

1. A labda „féloldalas" mozgást végez (x legyen most a kitérése, azaz a magassága): egy pattanás során egy parabolapályát fut be a fázistérben (hiszen $E=\frac{p^2}{2m}+mgx$=const, a visszapattanás pedig azt jelenti, hogy hirtelen $-p_\mathrm{max}$-ról p_max-ra változik az impulzusa, azaz a fázistérben a p-tengelyen egy egyenes szakasz az„ugrás". Könnyű kiszámolni így a hatásváltozót (a parabola területe 2/3-a a bennfoglaló téglalap területének); $p_\mathrm{max}=\sqrt{2mE}$, $x_\mathrm{max}=E/(mg)$, $I=2/3*(2p_\mathrm{max})*x_\mathrm{max}=\frac{4}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}E^{3/2}$, $I=\left(n+\frac{1}{2}\right)h$-ból tehát $E_n=\left(\frac{3hg}{4}\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^{2/3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2/3}$.
2. Válasz: az órán látott módszerrel, tudva néhány integrálhatósági kritériumot, adódik, hogy végtelen, ha $\alpha\leq 1$, és véges, ha $\alpha>1$.
3. A fázistérbeli mozgás itt egy téglalap: a test mindkét határfalról visszapattan, közben pedig (egyik faltól a másikig való mozgás során) állandó nagyságú az impulzusa (p). Ebből: $I=2pa$, az n+1/2-es változattal számolva $p=\frac{n+\frac{1}{2}}{2a}h$ lehet, az energia pedig $E_n=\frac{h^2}{8ma^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$.
4. Az impulzuskomponensek nagyságának értékei, mint az előző feladatban, $p_x=\frac{h}{2a}\left(n_x+\frac{1}{2}\right)$, $p_y=\frac{h}{2a}\left(n_y+\frac{1}{2}\right)$, $p_z=\frac{h}{2a}\left(n_x+\frac{1}{2}\right)$ lehetnek; itt n_x, n_y, n_z külön-külön tetszőleges nemnegatív egész számok. A p_x, p_y, p_z nagyságának értékei tehát kb. $\frac{h}{2a}$, $\frac{h}{2b}$, $\frac{h}{2c}$ egységenként lépkednek: ha azt mondjuk, hogy adott p_x nagysághoz azért tartozik két állapot, mert $+p_x$ és $-p_x$ is lehet a komponens, akkor látszik, hogy az impulzusok lehetséges értékei közül mindegyik egy $\frac{h}{a}\times\frac{h}{b}\times\frac{h}{c}=\frac{h^3}{V}$ térfogatú fázistér-cellát foglal el.

5. Ugyanazt kell csinálni, mint az órán. Az órai eredmény E_γ-ra, illetve a mostani E'_γ-ra:

$$E_\gamma = Mc^2\left(\sqrt{1+\frac{2(\Delta E)}{Mc^2}}-1\right), \quad E'_\gamma = Mc^2\left(1-\sqrt{1-\frac{2(\Delta E)}{Mc^2}}\right).$$

Sorfejtve a másodikat kijön az eredmény.

6. Itt most a c=1 egységrendszerben írjuk fel a képleteket. Közvetlenül kijön az eredmény: bevezetve a bomló részecskék p impulzusát (ennek nagysága az impulzusmegmaradás miatt ugyanannyi mindkét részecskére), és tudva, hogy a tömeges részecske energiája $E{=}\sqrt{M^2{+}p^2}$, a tömegtelené pedig $\varepsilon{=}p$, készen leszünk. Jó példa erre a folyamatra a pion müonra és neutrínóra bomlása: $\pi^-{\to}\mu^-{+}\overline{\nu}_\mu$, $\pi^-{\to}\mu^+{+}\nu_\mu$. Itt $m_\pi c^2 = 139$ MeV, $m_\mu c^2 = 105$ MeV; a neutrínó tömege ezek mellett nullának tekinthető. A neutrínó (vagy antineutrínó) által elvitt energia így ε_ν=29,8 MeV.

7. Az eredmény:

$$E_\gamma = \frac{M+\frac{\Delta E}{c^2}}{2}\left(1-\frac{M^2}{\left(M+\frac{\Delta E}{c^2}^2\right)}\right) = \frac{M}{2}\left(1+\frac{\Delta E}{Mc^2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta E}{Mc^2}\right)^2}\right),$$

sorfejtve pedig

$$E_\gamma \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} + \frac{(\Delta E)^3}{2(Mc^2)^2} - \ldots,$$

az utolsó kiírt tag már nem egyezik meg az előző előtti feladat útmutatásában leírt (bénán kiszámolt) E_γ ilyen rendű sorfejtésével.

8. Végig kell számolni.

9. Így fedezték fel a deutériumot: észrevették, hogy természetes hidrogénben minden színképvonal mellett ott van kicsit eltolva egy másik (a deutériumé, mely sokkal gyengébb, mivel természetes hidrogénben kevés a deutérium).

   Ugye a foton energiája $E_\gamma = \hbar\omega$, és $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Az eredmények most: a fotonenergia kb. $E_\gamma = 13{,}58\,\mathrm{eV}\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 1{,}8861$ eV, a megfelelő hullámhossz $\lambda \approx 657$ nm, ez tényleg látható fény. A fotonenergiák különbsége kb. így írható: $\Delta E_\gamma = \frac{\Delta m}{\cdot}E_\gamma$, ahol Δm a redukált tömegek különbsége: $\Delta m = \frac{m_e m_D}{m_e+m_D} - \frac{m_e m_p}{m_e+m_p} \approx m_e^2\left(\frac{1}{m_p}-\frac{1}{m_D}\right) \approx \frac{m_e^2}{2m_p}$, az m pedig a redukált tömeg (közelítőleg mindegy, hogy melyik). Ezzel $\Delta E_\gamma \approx \frac{m_e}{2m_p}E_\gamma \approx 5{,}135\cdot 10^{-4}$ eV; majd látni fogjuk, hogy ez a hidrogén energiaszintjeinek ún. finomszerkezeténél lényegesen (néhány tízszer) nagyobb.

10. Az átlagenergia: $E(T) \equiv \langle E\rangle_T := \sum_n p_n E_n$, azaz az energia várható értéke a valószínűségeloszlás szerint. Vigyázat! $\sum_n p_n = 1$ kell, hogy legyen (az összes valószínűség 1), emiatt p_n nem egyszerűen $\exp(-E_n/k_\mathrm{B}T)$-vel egyenlő, hanem ezek összegével vissza kell osztani. Tudva, hogy $E_n = \hbar\omega\left(n{+}\frac{1}{2}\right)$, és hogy $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, illetve ($x\frac{d}{dx}$-et hattatva mindkét oldalon)

$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, arra jutunk, hogy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B}T}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right)^n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}} \quad \Rightarrow \quad p_n = \left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right) e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}},$$

és ebből:

$$\langle E\rangle_T = \sum_n p_n E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}-1}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{d\langle E\rangle_T}{dT} = k_\mathrm{B}\left(\frac{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}-1}\right)^2.$$

A fajhő $T\to 0$ környékén gyorsan eltűnik, nagyobb hőmérsékletre (ha $\hbar\omega \ll k_\mathrm{B}T$) pedig konstans k_B-hez tart. Megjegyzés: ezt a számolást Einstein végezte el (amit kaptunk, az ún. Einstein-fajhő); először ezzel lehetett értelmezni, hogy szilárd testeknek (ahol rezgő atomok vannak) miért nem állandó $3R$ a moláris fajhője (ez volt az ún. Doulong-Petit-szabály; ez jönne ki, ha $C_1 = k_\mathrm{B}$-t írnánk: $R = N_A k_\mathrm{B}$, és egy atom három irányba rezeghet); a megfigyelés az volt, hogy a fajhő nullához tart $T\to 0$-ra. Persze ennél pontosabb számolás kell valóságban, mivel nem minden rácsrezgés azonos ω frekvenciájú.

11. Az órán megcsináltuk, de leírom még egyszer. A látható fény frekvencia-határait a hullámhosszból kapjuk: λ=400 nm (ibolya), λ=780 nm (vörös), a megfelelő frekvenciák: $\omega_\text{vörös} = 2{,}4 \cdot 10^{15}$ 1/s, $\omega_\text{ibolya} = 4{,}7 \cdot 10^{15}$ 1/s. A Planck-törvényben szereplő dimenziótlan változó megfelelő értékei: $x_1 \equiv x_\text{vörös} = \frac{\hbar\omega_\text{vörös}}{k_\mathrm{B}T} = 7{,}05$, $x_2 \equiv x_\text{ibolya} = \frac{\hbar\omega_\text{ibolya}}{k_\mathrm{B}T} = 13{,}75$. Az η hatásfok, amit ki kell számítanunk, az a következő arány:

$$\eta = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x}{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x}.$$

A nevezőről már tudjuk, hogy $\pi^4/15$, a számlálót csak közelítőleg tudjuk kiszámolni, de az elég: a számlálóbeli integrálban minden előforduló x értékre $e^x \gg 1$ (már az alsó határon is $e^{x_1} \approx 1150$), tehát amikor az órán látott módon sorbafejtünk, azaz $\frac{x^3}{e^x-1} = x^3e^{-x} + x^3e^{-2x} + x^3e^{-3x} + \ldots$-t írunk, elég az első tagnál megállni. (Ez ugyanazt jelenti, mintha azt mondtuk volna, hogy a nevezőben az 1-et elhanyagoljuk e^x mellett.)

Esetünkben tehát az alábbi módon közelíthetjük az integrált:

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{\infty} x^3 e^{-x} = \left(x_1^3 + 3x_1^3 + 6x_1 + 6\right) e^{-x_1}. \tag{1}$$

Most nálunk $x_2 \approx x_1$, tehát az x_2-től ∞-ig vett integrál annyira kisebb az x_1-től vettnél, hogy azt nyugodtan elhanyagolhatjuk (ellenőrizzük!); ez azt jelenti, hogy a „látható+UV+egyéb" kb. ugyanannyi, mint a „látható".

Tehát a hatásfokunk: $\eta = \frac{15}{\pi^4} e^{-x_1} \left(x_1^3 + 3x_1^3 + 6x_1 + 6\right) \approx 7{,}317\%$. (Ha levontuk volna az x_2-től ∞-ig vett integrált, $7,263\%$-ot kaptunk volna.)

12. A dimenziótlan változók most (T=5700 K-et használva) $x_\text{ibolya} = \frac{2\pi c}{\lambda_\text{ibolya}} \frac{\hbar}{k_\mathrm{B}T} \approx 6{,}2$, $x_\text{vörös} \approx 3{,}18$. A kiszámítandó integrálok az előző feladathoz hasonlóan felírhatók. Az Uv-részre az

előző közelítéssel 12,4% adódik, az $x_{\text{vörös}}$ fölötti részre 56,0%. Ha eggyel pontosabban számoltunk volna, azaz az $\frac{x^3}{e^x-1}$ közelítésében nemcsak az x^3e^{-x}, hanem a következő, x^3e^{-2x} tagot is megtartottuk volna, azzal az eredmény 56,7% lett volna. Tehát a látható fény részaránya 56,7% − 12,4% = 44,3%, a maradék 43,3% pedig infravörös. Megjegyzés: a Napra a tényleges számok kicsit mások (pl. mert vannak színképvonalak is, azaz nem teljesen feketetest-sugárzásról van szó), de lényegében ezek az értékek.

13. Egy ω frekvenciájú foton energiája $\hbar\omega$, úgyhogy egyszerűen felírhatjuk, hogy $\dot{N}(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{P(\omega)\mathrm{d}\omega}{\hbar\omega}$. A teljes (mp-enként kisugárzott) fotonszámra kapott érték, megint áttérve az $x = \frac{\hbar\omega^2}{k_\mathrm{B}T}$ változóra, a $\dot{N} = \frac{Ak_\mathrm{B}^3T^3}{4\pi^2c^2\hbar^3}2\zeta(3)$ eredményt kapjuk. Emlékezve, hogy $P = \sigma AT^4$, és σ kifejezésére is emlékezve, azt kapjuk, hogy $\dot{N} = P/\overline{E}$, ahol $\overline{E} = k_\mathrm{B}T\frac{\pi^4}{30\zeta(3)} \approx k_\mathrm{B}T\cdot 2{,}701$, azaz ez az ilyen értelemben definiált „átlagos" fotonenergia (össz-teljesítmény osztva össz-fotonszámmal).

14. Az előző feladatban kapott $\dot{N}(\omega)$ függvényt deriválva a $(2-x)e^x = 2$ egyenletre kell jussunk, ennek megoldása $x \approx 1{,}594$, azaz a legtöbb foton a $\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T} = 1{,}594$-nek eleget tevő frekvencián jön. Ez nem annyi, mint az intenzitásmaximum frekvenciája!

15. A differenciálegyenletet egyszerűen felírhatjuk, és a megoldását is megkaphatjuk:

$$CM\dot{T} = -\sigma AT^4 \quad \Rightarrow \quad T(t) = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + 3\frac{\sigma AT_0^4}{CMT_0}t}},$$

ahol azért írtuk így, hogy látszódjon, hogy az argumentumban az első pillanatbeli teljesítmény (σAT_0^4) és a kezdeti hőenergia (CMT_0) hányadosa szerepel.