Atom– és kvantumfizika gyakorlófeladatok, 3. adag

hőmérsékleti sugárzás, 1D Schrödinger-egyenlet

Nagy Márton

2016. november 15.

Olyan feladatokat is felsorolok, amik esetleg (azóta) előkerültek gyakorlaton is. Számoljuk ki őket még egyszer! :D Vannak olyan feladatok, amik egyszerűen végigszámolhatók, és vannak összetettebbek is. Ezek arra jók, hogy begyakoroljuk a módszereket, tényleg javaslom, hogy minél többet nézzetek meg!

1.) Hőmérsékleti sugárzás I.

- Írjuk fel a hőmérsékleti sugárzásra érvényes Planck-képletet a λ hullámhossz szerinti eloszlásra! (Ne feledjük, hogy dω-t is transzformálni kell.) Hol (milyen λ_0-nál) van ennek az eloszlásnak a maximuma? (Vezessük be a λ és a T hőmérséklet alkalmas dimenziótlan kombinációját; erre transzcendens egyenletet kapunk, amit oldjunk is meg közelítőleg.) Hogy viszonyul egymáshoz az ω szerinti eloszlás maximuma, ω_0 (amire ugye $\frac{\hbar\omega}{k_{\rm B}T} = 2,82\ldots$), és az imént kiszámolt λ_0? Igaz-e a szokásos, hullámhossz és frekvencia közötti összefüggés ω_0 és λ_0 között? (Válasz: nem.)
- Példaként számítsuk ki a Nap (hőmérséklete $T = 5700$ K) hősugárzásának λ szerinti eloszlásának maximumát! „Milyen színű” fénynek (elektromágneses hullámnak) felel meg ez?

2.) Hőmérsékleti sugárzás II.

- A teljesítményének hány százalékát sugározza ki a Nap az UV ($\lambda < 380$ nm), a látható ($380 \text{ nm} < \lambda < 780$ nm), és a maradék (infravörös, $\lambda > 780$ nm) tartományban? Mi a helyzet egy hagyományos, 60 W-os izzólámpával ($T = 2700$ K)? (Vizsgáljuk meg, hogy a kiszámítandó integrálokat mennyire érdemes közelíteni; a Napra hasonlítsuk össze eredményeinket a közismert (pl. a Wikipédián is megtalálható) értékekkel!)
- Hány darab fotont sugároz ki összsen másodpercenként a Nap? (Ehhez a hőmérséklete mellett még pl. a felületét vagy a teljesítményét is tudni kell; $P = 3.85 \cdot 10^{26}$ W.) És egy 60 W-os izzólámpa? Mi a helyzet a látható fotonok számával?
- Az előző két feladatban a magas frekvenciás esetben vizsgáltuk a spektrumot; tekintsük most az alacsony-frekvenciás véget. Hány darab „mélyen infravörös” (most definiáljuk így: $\lambda > 10$ μm) foton, illetve ebben a tartományban mennyi energia hagyja el a Nap ill. a Föld felszínét másodpercenként? (A Föld hősugárzásának hőmérséklete $T = 300$ K, sugara 6378 km).

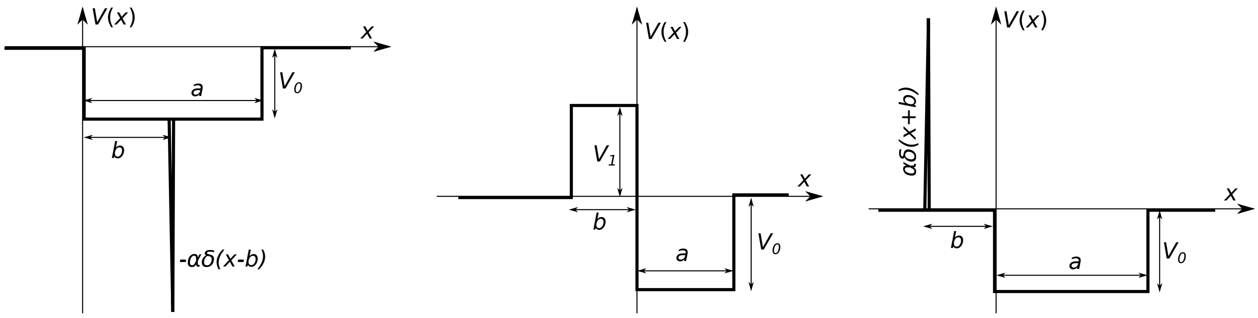
3.) 1D Schrödinger-egyenlet, kötött állapotok

- Keressünk kötött ($E < 0$ energiájú) állapotokat egy darab negatív Dirac-delta potenciálvölgyben! Hány darab van? (Válasz: egy darab; ha a Dirac-delta erőssége $-\alpha$, akkor $|E| = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.
- Idézzük fel az órán megbeszélt derékszögű potenciálvölgyben megvalósuló energiasajátértékeket, azaz amikor

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ -V_0, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \\ 0, & \text{ha} \quad a < x. \end{cases}$$

  Idézzük fel a sajátérték-egyenletként kapott egyenlet megoldási módszerét, a kétféle lehetőséget!
  - Gondoljuk végig a ψ együtthatóira adódó lineáris egyenletrendszer megoldását is! Lássuk be, hogy az egyik fajta sajátértékek (a gödör közepére nézve) páros, a másikak pedig páratlan függvényeket adnak!
  - Lássuk be, hogy a $V_0 \to \infty$ határesetben megkapjuk a végtelen mély potenciálgödörre vonatkozó eredményt!
  - Lássuk be, hogy a $V_0 \to \infty$, $a \to 0$, $V_0 a \equiv \alpha =$const határesetben visszakapjuk a $-\alpha$ erősségű egy darab Dirac-delta potenciálban kapott egyszerű eredményt!
- Határozzuk most meg a $V(x) = -\alpha\delta(x) - \alpha\delta(x-a)$ potenciálban (két, egymástól a távolságra lévő, $-\alpha$ erősségű Dirac-delta) az $E < 0$ energia-sajátértékeket! Hány darab kötött állapot van[1]? Megkereshetjük a sajátfüggvényeket is; párosak vagy páratlanok ezek?

[1] Először is írjuk fel az összeillesztésekből és a határfeltételekből adódó egyenleteket, aztán „jelöljük ki” a megoldandó végső egyenletet! Ezután oldjuk is meg: érdemes a számolás során a κ-t az $|E|$ helyett szokásosan, valamint ezután a $\lambda = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$ dimenziótlan paramétert és az $x = \kappa a$ dimenziótlan változót bevezetni, amivel grafikusan megoldható egyenletet kapunk. Az eredmény: kettő vagy egy energia-sajátérték van, attól függően, hogy λ nagyobb-e vagy nem, mint 1.



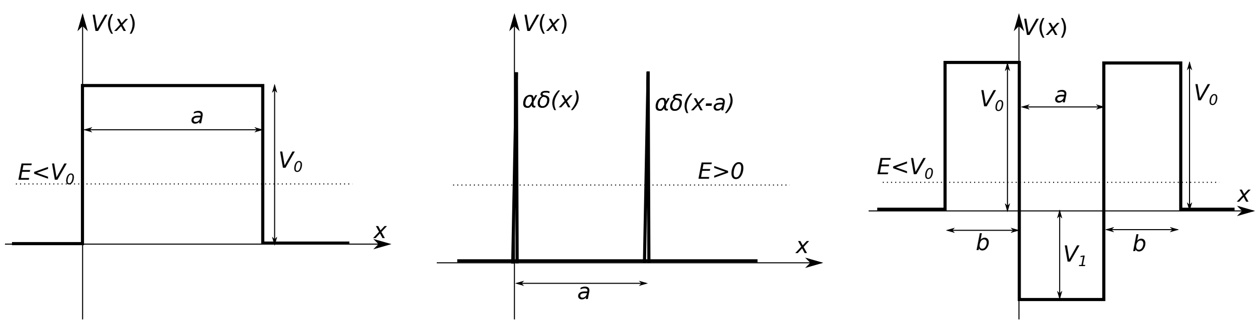
(a) (b) (c)

1. ábra. Különböző potenciálok, kötött állapotok keresésének gyakorlásához.

- „Jelöljük ki” a következő egydimenziós potenciálokban megvalósuló kötött ($E < 0$ energiájú) állapotok energia-sajátértékeire vonatkozó egyenletet!
  - Legyen a potenciál olyan, mint az 1a. ábrán, és keressünk $E < -V_1$ energiájú állapotokat!
  - Ugyanebben a potenciálban keressünk $-V_1 < E < 0$ energiájú állapotokat!
  - A potenciál, mint az 1b. ábrán.
  - Végül, mint az 1c. ábrán.

4.) 1D Schrödinger-egyenlet, szórási állapotok Ahol kiszámjtjuk a konkrét végeredményt, ellenőrizzük, hogy a továbbhaladás és visszaverődés valószínűségeinek összege tényleg 1!

- Oldjuk meg a potenciállépcső feladatát: $V(x) = 0$, ha $x < 0$, és $V(x) = V_1 > 0$, ha $x > 0$. Balról $E > V_1$ energiájú részecskék esnek be; mekkora részük halad tovább, mekkora részük verődik vissza?
- *Fejezzük be az órai feladatot*, a derékszögű potenciálvölgyben való továbbhaladás és visszaverődés valószínűségének kiszámítását (2a. ábra)!
- Ugyancsak határozzuk meg a visszaverődési és áthaladási együtthatót, ha a potenciál két darab Dirac-delta, a 2b. ábrának megfelelően!
- Jelöljük ki az egyenleteket és a meghatározandó mennyiségeket, ha a 2c. ábrán látható potenciálba balról beeső részecskék továbbhaladását ill. visszaverődését vizsgáljuk!



(a) (b) (c)

2. ábra. Különböző potenciálok, szórási állapotok gyakorlásához.