# Kvantumfizika gyakorlófeladatok

NM

2014. december 8.

## Feladatok:

1. Oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet abban az esetben, amikor a $V(x)$ potenciális energia a hely függvényében a következő:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ V_0, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

Tekintsük balról beeső $E > V_0$ energiájú részecskék áramát! Hanyad részük halad tovább a $+\infty$ irányba, és hanyad részük verődik vissza[1]?

2. * Az órán látottak mintájára számoljuk végig a derékszögű potenciálgát esetén kapott áthaladási és visszaverési valószínűséget, ha a részecske energiája nagyobb, mint a potenciálgát[2]! Azaz: oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet balról beeső $E > V_0$ energiájú részecskékre, ha a $V(x)$ potenciális energia a hely függvényében

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ V_0, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \\ 0, & \text{ha} \quad x > a. \end{cases}$$

Ellenőrizzük megint csak, hogy a továbbhaladás és a visszaverődés valószínűségének összege egy!

3. Oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet a Dirac-delta alakú potenciálban: legyen a potenciális energia $V(x) = -V_0 \delta(x)$, ahol $V_0 > 0$! Kialakul-e kötött (azaz $E < 0$ energiájú) állapot? Ha igen, mekkora lehet $E$? Ne feledjük: a hullámfüggvénynek kötött állapotban normáltnak kell lennie. Másrészt a Dirac-delta potenciálokban a hullámfüggvénynek „törése” lesz, aminek nagyságát az órán megbeszéltek alapján kell kigondolni.

4. * Lehet fokozni: oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet olyan potenciálban, ahol *két* egyforma mély Dirac-delta alakú völgy van, azaz legyen $V(x) = -V_0 \delta(x-a) - V_0 \delta(x+a)$! (Tehát a Dirac-delták $+a$-nál és $-a$-nál vannak.) Kialakul-e kötött (azaz $E < 0$ energiájú) állapot? Ha igen, mekkora lehet $E$?

5. Írjuk fel a határfeltételekből adódó egyenleteket (nem kell megoldani őket!!!), ha balról $E > 0$ energiájú részecskék beesését tekintjük, és a Schrödinger-egyenletben szereplő $V(x)$ potenciál a következő:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < -b, \\ V_0, & \text{ha} \quad -b < x < -a, \\ 0, & \text{ha} \quad -a < x < a, \\ V_0, & \text{ha} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{ha} \quad x > a, \end{cases}$$

ahol $a$ és $b$ pozitív hosszúságdimenziójú állandók, $a < b$. (A potenciál tehát két $V_0$ magasságú fal).

[1] Ellenőrizzük, hogy az eredmény tényleg teljesíti józan elvárásunkat: a továbbhaladás és a visszaverődés valószínűségének összege egy. Vigyázat: nem elég az amplitúdók négyzeteit tekinteni, ki kell számolni magát a $j$ áramsűrűséget is, amibe még bejön az impulzus értéke, ami más a két térrészben!

[2] Ilyenkor tehát klasszikusan is átmehetne; abban, hogy átmegy, semmi szokatlan nincs. Ami szokatlan, hogy visszaverődik valamennyi.

6. Írjuk fel a határfeltételekből adódó egyenleteket kötött ($E < 0$ energiájú) állapotokra (nem kell megoldani őket!!!), ha a Schrödinger-egyenletben szereplő potenciál a következő: $V(x) = V_1(x) - \alpha\delta(x)$, ahol

$$V_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < -a, \\ -V_0, & \text{ha} \quad -a < x < a, \\ 0, & \text{ha} \quad x > a, \end{cases}$$

ahol $\alpha$ megfelelő (milyen?) dimenzójú állandó, $V_0$ energia dimenziójú, $a$ pedig hosszúság dimenziójú állandó.

7. Számítsuk ki (hozzuk egyszerűbb alakra) a következő kommutátorokat, ($\hat{x}$ és $\hat{p}$ a koordináta– és impulzusoperátor, a $V(\hat{x})$ operátor, csakúgy, mint a Schrödinger-egyenletben, a $V(x)$ függvénnyel való szorzás operátora):

$$\left[\hat{x}^2, \hat{p}\right] = ? \quad [\hat{x}\hat{p}, \hat{p}] = ? \quad \left[\hat{p}^2, \hat{x}^2\right] = ? \quad [\hat{p}, V(\hat{x})] = ?$$

8. Számítsuk ki a következő mátrixelemeket (a $|n\rangle$-ek a harmonikus oszcillátor energiasajátállapotai, $\hat{x}$ és $\hat{p}$ mint fent, $\hat{a}$ és $\hat{a}^\dagger$ az eltüntető– és keltőoperátor):

$$\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle = ? \quad \langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle = ? \quad \langle n|\,\hat{x}^2\,|m\rangle = ? \quad \langle n|\,\hat{p}^2\,|m\rangle = ? \quad \langle n|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\,|m\rangle = ?$$

9. Normáljuk a következő feles spinű állapotokat (azaz határozzuk meg az $A$, $B$, $C$, stb. állandókat úgy, hogy az állapot egyre legyen normált), majd határozzuk meg az adott állapotban az $x$, $y$ és $z$ irányú spin-operátor várható értékét:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix} \frac{i}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

10. Normáljuk a következő feles spinű állapotokat (azaz határozzuk meg az $A$, $B$, $C$, stb. állandókat úgy, hogy az állapot egyre legyen normált), majd határozzuk meg az adott állapotban, hogy mekkora valószínűséggel mérünk az $\mathbf{n}$ irányban történő spin-méréssel abba az irányba mutató spint:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \sqrt{2}i \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix},$$

és legyen

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

vagy másik példaként, legyen

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_z = 0.$$

11. Oldjuk meg általánosan is az előzőt: egy általános $|\psi\rangle$ spinállapotban milyen az $\mathbf{n}$ irányban történő spinmérés várható értéke? Mennyi az $\mathbf{n}$ irányban „fel”, és az $\mathbf{n}$ irányban „le” eredmények valószínűségei? Segítség: paraméterezzük az egységvektort gömbi koordinátákkal, a spinállapotot pedig legyen $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$, és az $\alpha$ és $\beta$-ra ugye igaz, hogy $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, paraméterezzük őket kényelmesen!

12. Keressük meg az általános $\mathbf{n}$ irányban történő spinmérés sajátállapotait, mint mindig, most is a $z$ irányú spinmérés sajátállapotainak (a $|\uparrow\rangle$ és a $|\downarrow\rangle$ állapotok) lineárkombinációjaként! Azaz: keressünk olyan $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$ vektorokat, amelyek sajátállapotai az $\mathbf{n}$ irányú spinmérésnek! Segítség: paraméterezzük az egységvektort gömbi koordinátákkal! Ne feledkezzünk meg a normálásról!

13. Ismételjük meg az előző feladat levezetését úgy, hogy $\mathbf{n}$-et *nem* gömbi koordinátákban vesszük fel! Miután megkerestük az $\mathbf{n}$ irányú spinmérés $+\frac{\hbar}{2}$-höz tartozó sajátállapotát, vegyünk fel egy *másik* egységvektort, $\mathbf{m}$-et, és tegyük fel a kérdést: mekkora az előző állapotban az $\mathbf{m}$ irányú spinmérés várható értéke[3]?

[3] És válaszoljuk is meg! :D Egyszerű eredményt kell kapnunk.