Kvantummechanika gyakorlófeladatok

NM

2012.

Feladatok:

1. Mekkora a hőmérséklete egy a világűrben a Naptól földpálya sugárnyira, a Nap irányára merőlegesen elhelyezett vékony testnek termikus egyensúlyban, ha
   a) a lap csak a nap-érte oldalán sugároz ki hőt
   b) a hátoldalán is?
   Milyen frekvencián a legnagyobb ezekben az esetekben a test által kisugárzott hőmérsékleti sugárzás intenzitása? (A Nap-Föld távolság most legyen 150 millió km, a Nap átmérője 1392000 km, felszíni hőmérséklete 5800 K.)

2. Oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet abban az esetben, amikor a $V(x)$ potenciális energia a hely függvényében a következő:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ V_0, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

   Tekintsük balról beeső $E > V_0$ energiájú részecskék áramát! Hanyad részük halad tovább a $+\infty$ irányba, és hanyad részük verődik vissza?

3. Oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet a Dirac-delta alakú potenciálban: legyen a potenciális energia $V(x) = -V_0\delta(x)$, ahol $V_0 > 0$! Kialakul-e kötött (azaz $E < 0$ energiájú) állapot? Ha igen, mekkora lehet E? Ne feledjük: a hullámfüggvénynek kötött állapotban normáltnak kell lennie. Másrészt a Dirac-delta potenciálokban a hullámfüggvénynek „törése” lesz, aminek nagyságát az órán megbeszéltek alapján kell kigondolni.

4. Lehet fokozni: oldjuk meg az egydimenziós Schrödinger-egyenletet olyan potenciálban, ahol *két* egyforma mély Dirac-delta alakú völgy van, azaz legyen $V(x) = -V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a)$! (Tehát a Dirac-delták $+a$-nál és $-a$-nál vannak.) Kialakul-e kötött (azaz $E < 0$ energiájú) állapot? Ha igen, mekkora lehet E?

5. Írjuk fel a határfeltételekből adódó egyenleteket (nem kell megoldani őket!!!), ha a Schrödinger-egyenletben szereplő $V(x)$ potenciál a következő:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < -b, \\ V_0, & \text{ha} \quad -b < x < -a, \\ 0, & \text{ha} \quad -a < x < a, \\ V_0, & \text{ha} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{ha} \quad x > a, \end{cases}$$

   ahol a és b pozitív hosszúságdimenziójú állandók, $a < b$. (A potenciál tehát két V_0 magasságú fal).

6. Írjuk fel a határfeltételekből adódó egyenleteket (nem kell megoldani őket!!!), ha a Schrödinger-egyenletben szereplő potenciál a következő: $V(x) = V_1(x) + \alpha\delta(x)$, ahol

$$V_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < -a, \\ V_0, & \text{ha} \quad -a < x < a, \\ 0, & \text{ha} \quad x > a, \end{cases}$$

   ahol α megfelelő (milyen?) dimenzójú állandó, V_0 energia dimenziójú, a pedig hosszúság dimenziójú állandó.

7. Számítsuk ki (hozzuk egyszerűbb alakra) a következő kommutátorokat, ($\hat{x}$ és $\hat{p}$ a koordináta– és impulzusoperátor, a $V(\hat{x})$ operátor, csakúgy, mint a Schrödinger-egyenletben, a $V(x)$ függvénnyel való szorzás operátora):

$$\left[\hat{x}^2, \hat{p}\right] = ? \quad [\hat{x}\hat{p}, \hat{p}] = ? \quad \left[\hat{p}^2, \hat{x}^2\right] = ? \quad [\hat{p}, V(\hat{x})] = ?$$

8. Számítsuk ki a következő mátrixelemeket (a $|n\rangle$-ek a harmonikus oszcillátor energiasajátállapotai, $\hat{x}$ és $\hat{p}$ mint fent, $\hat{a}$ és $\hat{a}^\dagger$ az eltüntető– és keltőoperátor):

$$\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle = ? \quad \langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle = ? \quad \left\langle n\right|\hat{x}^2\left|m\right\rangle = ? \quad \left\langle n\right|\hat{p}^2\left|m\right\rangle = ? \quad \left\langle n\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\left|m\right\rangle = ?$$

9. Normáljuk a következő feles spinű állapotokat (azaz határozzuk meg az A, B, C, stb. állandókat úgy, hogy az állapot egyre legyen normált), majd határozzuk meg az adott állapotban az x, y és z irányú spin-operátor várható értékét:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix} \frac{i}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

10. Normáljuk a következő feles spinű állapotokat (azaz határozzuk meg az A, B, C, stb. állandókat úgy, hogy az állapot egyre legyen normált), majd határozzuk meg az adott állapotban, hogy mekkora valószínűséggel mérünk az $\mathbf{n}$ irányban történő spin-méréssel abba az irányba mutató spint:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \sqrt{2}i \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix},$$

és legyen

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

vagy másik példaként, legyen

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_z = 0.$$

11. Oldjuk meg általánosan is az előzőt: egy általános $|\psi\rangle$ spinállapotban milyen az $\mathbf{n}$ irányban történő spinmérés várható értéke? Mennyi az $\mathbf{n}$ irányban „fel", és az $\mathbf{n}$ irányban „le" eredmények valószínűségei? Segítség: paraméterezzük az egységvektort gömbi koordinátákkal, a spinállapotot pedig legyen $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$, és az α és β-ra ugye igaz, hogy $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, paraméterezzük őket kényelmesen!