Atomfizika ZH megoldások **B csoport**

1. Mivel a becsapódási sebesség sokkal kisebb a fény sebességénél, ezért használható a klasszikus fizikai képlet:

$$Ue = \frac{1}{2}mv^2, \quad E = U/d.$$

amelyből a feszültségre $U \approx 2.6 \cdot 10^3\,\mathrm{V}$, a térerősségre $E \approx 2.6 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ adódik.

2. A maximális hullámhosszat megadó egyenlet:

$$h\frac{c}{\lambda_{min}} = W_{ki},$$

ezért a kilépési munka $W_{ki} \approx 2.5\,\mathrm{eV}$. Ha a hullámhosszat kétszeresére növeljük:

$$h\frac{c}{\lambda_{max}/2} = W_{ki} + E_{mozg} \longrightarrow E_{mozg} = h\frac{c}{\lambda_{max}} = W_{ki} \approx 2.5\,\mathrm{eV}\,.$$

3. Ha $1\,\mathrm{m}^2$-re $1\,\mathrm{s}$ alatt $1500\,\mathrm{J}$ energia érkezik, akkor $t = 1$ óra alatt $A = 50\,\mathrm{m}^2$-re

$$E = I \cdot A \cdot t \approx 2.7 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$$

energia jön be. Ennek csak a 80% -át hasznosítja a napelem, ami $2.16 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$.

4. A hidrogénatom Bohr-modellje szerint:

$$E = -\frac{Ry}{n^2}, \quad N = n\frac{h}{2\pi}.$$

A 3. gerjesztett állapot azt jelenti, hogy $n = 4$, így

$$E \approx -0.85\,\mathrm{eV}, \quad N \approx 4.2 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,.$$

5. Egyatomos gáz esetén a szabadsági fokok száma $f = 3$, ezért egy részecske energiája $E = \frac{3}{2}k_BT$, amely szerint az egy szabadsági fokra jutó energia $E/3 \approx 0.33 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Egyúttal az is látszik, hogy a hőmérséklet $T \approx 481\,\mathrm{K}$.

6. A relativisztikus energia az impulzussal kifejezve a következő:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

Mivel a hullámhossz de Broglie nyomán $\lambda = h/p$, ezért ezt az impulzusra kifejezve, majd behelyettesítve az $E \approx 8.3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$ eredményt kapjuk.

7. A Wien-törvény szerint $T \cdot \lambda =$ konstans, emiatt ha az emberi hőmérsékletet $T_0 \approx 310\,\mathrm{K}$-nek tekintjük, akkor a legnagyobb energiájú fény a spektrumban

$$\lambda_0 = \lambda_{Nap} \cdot \frac{T_{Nap}}{T_0} \approx 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

hullámhosszú. Ez

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \approx 3.1 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciának felel meg.

8. Compton-szórás során a foton hullámhosszának a megváltozása:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Mivel a feladat szerint az elektron a beeső fotonra merőleges irányú impulzussal rendelkezik, ezért az impulzusmegmaradás egyenletének x komponense szerint:

$$\lambda_1 \cos\theta = \lambda_2,$$

amelyből kifejezve $\cos\theta$ -t, majd beírva a fenti egyenletbe a

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc\lambda_1}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

összefüggést kapjuk. Mivel a baloldal saját magának (-1)-szeresével arányos, az arányossági tényezőről pedig tudjuk, hogy pozitív, ezért mindkét oldalnak nullával kell egyenlőnek lennie, ami a $\lambda_1 = \lambda_2$ egyenlőséget jelenti. Ez azt jelenti, hogy a foton valójában nem is szóródott az elektrononon, ezért annak lendülete továbbra is zérus maradt, ami kisebb, mint a fotoné.

9. A feladat a szabadsági fokok meghatározása. Mivel a rendszer be van kényszerítve egy csőbe, ezért a haladó szabadsági fokok száma 1-re redukálódik, forogni nem tud, a térben 3 független rezgési módus közül most, 1 dimenzióban csak 2 tud működni. A rezgésekhez viszont $2-2$ szabadsági fok tartozik, amely a relatív mozgásokhoz tartozó kinetikus-, illetve a rugóenergiából származik. Ennek megfelelően összesen 5 szabadsági fokkal rendelkezik az objektum, melynek következtében T hőmérsékleten az átlagos energiája

$$E = \frac{5}{2}k_B T.$$

10. A feladat szerint két részecske nem lehet azonos energiájú állapotban. Ha a dobozba csak λ hullámhosszúságú részecske kerülhet, az egyúttal az energiát is rögzíti, mivel a hullámhosszhoz egyértelműen egyetlen energiaérték tartozik. Ekkor viszont csak kétféle lehetséges állapota van a rendszernek: vagy van benne egyetlen részecske, vagy pedig nincs. Ezek rendre $E_0 = 0$ és $E_1 = \epsilon$ energiájúak, ahol ϵ egy λ hullámhosszúságú részecske energiája. A Boltzmann-statisztika szerint az egyes megvalósulási valószínűségek:

$$P(E_i) = Ne^{-E_i/k_B T},$$

ahol N a normálási faktor és mivel $\sum_i P(E_i) = 1$ kell legyen, ezért értéke

$$N = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}}.$$

Ha kiszámoljuk az átlagos energiát és elosztjuk egyetlen részecske energiájával, megkapjuk az átlagos részecskeszámot.

$$\bar{E} = \sum_i E_i P(E_i) = \epsilon \frac{e^{-\epsilon/k_B T}}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}},$$

azaz

$$\bar{n} = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/k_B T}},$$

amit Fermi-Dirac eloszlásnak is neveznek.

11. A 40 nA áramerősség azt jelenti, hogy másodpercenként $\Delta N_A/\Delta t \approx 1.25 \cdot 10^{11}$ db/s α-részeszcske érkezik. Eszerint 1 óra alatt $N_A \approx 4.5 \cdot 10^{14}$ db ütközik a fóliával. Mivel a detektor hatásfoka 80%, ezért az események száma $2 \cdot 10^5/0.8 = 2.5 \cdot 10^5$ az eltelt 1 óra alatt. Mivel ismerjük az egységnyi felületre eső szórócentrumok n_B számát, ezért a hatáskeresztmetszet (a megfelelő térszögre vonatkozóan)

$$\sigma_\Omega = \frac{\text{események száma}}{N_A \cdot n_B} \approx 1.1 \cdot 10^{-35}\,\text{cm}^2.$$

A térszög pedig definínió szerint $\Omega = A/r^2 \approx 6.1 \cdot 10^{-6}$, a detektor felületének és távolságának ismeretében. Ezzel a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányára vonatkozóan már meghatározható:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\sigma_\Omega}{\Omega} \approx 1.8 \cdot 10^{-30}\,\text{cm}^2.$$

12. A sebesség négyzetének átlaga definíció szerint

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2k_B T\pi}\right)^{3/2} v^4 e^{-mv^2/2k_B T} dv.$$

Vezessük be a $\tilde{v} = v\sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$ integrációs változót! Ekkor az elvégzendő integrál az alábbira egyszerűsödik:

$$\bar{v^2} = \frac{8k_B T}{\sqrt{\pi} m} \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Vezessük be a következő, λ paramétertől függő integrált:

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda \tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Ekkor láthatóan

$$I''(\lambda = 1) = \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v},$$

vagyis a feladat $I(\lambda)$ meghatározása. Ez viszont rögtön adódik, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

hiszen ekkor $\tilde{x} = x/\sqrt{\lambda}$ helyettesítéssel látszik, hogy $I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$. Eszerint pedig $I''(\lambda = 1) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$, tehát

$$\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}.$$

Ugyanerre az eredményre juthattunk volna, ha kihasználjuk, hogy a 3 haladási szabadsági fokra átlagosan $\frac{1}{2}k_B T$ energia jut, eszerint

$$\frac{1}{2} m\bar{v^2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

amelyből ismét $\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$ adódik.