Atomfizika ZH megoldások **A csoport**

1. A relativisztikus energia és impulzus kifejezések:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Behelyettesítve a megadott adatokat:

$$E \approx 1.24 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}\,, \quad p \approx 3.1 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2. A hidrogénatom Bohr-modellje szerint:

$$E = -\frac{Ry}{n^2}, \quad N = n\frac{h}{2\pi}.$$

A 8. gerjesztett állapot azt jelenti, hogy $n = 9$, így

$$E \approx -0.17\,\mathrm{eV}\,, \quad N \approx 9.5 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,.$$

3. A minimális frekvenciát a következő egyenlet adja meg:

$$h\nu_{min} = W_{ki} \longrightarrow \nu_{\mathrm{min}} \approx 1.06 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}\,.$$

Ha a frekvenciát kétszeresére növeljük:

$$2h\nu_{min} = W_{ki} + E_{mozg} \longrightarrow h\nu_{\mathrm{min}} = E_{mozg} = W_{ki} = 4.4\,\mathrm{eV}\,.$$

4. Az azonos tömegű, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltések ugyanolyan sugarú körpályára állnak, csak egymással ellentétes irányba kezdenek mozogni. Emiatt ha mindegyik félkört tesz meg, akkor a becsapódási pontok távolsága $4R$ lesz, ahol R a körpálya sugara:

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow R = \frac{mv}{qB} \approx 5.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,,$$

vagyis

$$d = 4R \approx 2.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\,.$$

5. Használva a már feljebb idézett relativisztikus impulzus-formulát, a hullámhossz a következőképpen írható (majd behelyettesítve a megfelelő adatokat):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \approx 4.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Mivel a fény frekvenciája $\nu = \frac{c}{\lambda}$, ezért az ilyen hullámhosszal rendelkező fény

$$\nu \approx 7.14 \cdot 10^{19}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciájú.

6. Feltéve, hogy a Nap fénye teljesen elnyelődik (becslésről lévén szó, ez ésszerű feltevés), a nyomás:

$$p = \frac{I}{c},$$

ahol I az egységnyi felületre érkező teljesítmény. Ha erőt akarunk számolni, akkor a sugárzásra merőleges vetületét kell az adott felületnek tekinteni, a Föld esetén ez $R_F^2\pi$ nagyságot jelent:

$$F = pR_F^2\pi \approx 6.3 \cdot 10^8\,\mathrm{N}\,.$$

7. A Wien-törvény szerint T/ν =konstans, emiatt ha az emberi hőmérsékletet $T_0 \approx 310\,\mathrm{K}$-nek tekintjük, akkor a legnagyobb energiájú fény a spektrumban

$$\nu_0 = \nu_{Nap} \cdot \frac{T_0}{T_{Nap}} \approx 3.1 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciájú. Ez

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \approx 9.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

hullámhosszat jelent.

8. A feladat szerint két részecske nem lehet azonos energiájú állapotban. Ha a dobozba csak λ hullámhosszúságú részecske kerülhet, az egyúttal az energiát is rögzíti, mivel a hullámhosszhoz egyértelműen egyetlen energiaérték tartozik. Ekkor viszont csak kétféle lehetséges állapota van a rendszernek: vagy van benne egyetlen részecske, vagy pedig nincs. Ezek rendre $E_0 = 0$ és $E_1 = \epsilon$ energiájúak, ahol ϵ egy λ hullámhosszúságú részecske energiája. A Boltzmann-statisztika szerint az egyes megvalósulási valószínűségek:

$$P(E_i) = Ne^{-E_i/k_BT},$$

ahol N a normálási faktor és mivel $\sum_i P(E_i) = 1$ kell legyen, ezért értéke

$$N = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon/k_BT}}.$$

Ha kiszámoljuk az átlagos energiát és elosztjuk egyetlen részecske energiájával, megkapjuk az átlagos részecskeszámot.

$$\bar{E} = \sum_i E_i P(E_i) = \epsilon\frac{e^{-\epsilon/k_BT}}{1 + e^{-\epsilon/k_BT}},$$

azaz

$$\bar{n} = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/k_BT}},$$

amit Fermi-Dirac eloszlásnak is neveznek.

9. Legyen $j < 0$. Ha N ugrás van, és a j. koordinátába akarunk érkezni, akkor $n_{bal} = \frac{N+j}{2}$ balra, illetve $n_{jobb} = \frac{N-j}{2}$ ugrás kell. Mivel az egyes valószínűségek $p_{bal} = 2/3$, $p_{jobb} = 1/3$, ezért annak a valószínűsége, hogy N lépés után j-ben legyen a részecske:

$$P_N(j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(N+j)/2} \cdot \text{esetek száma}\,.$$

Mivel az esetek száma

$$\frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!},$$

ezért

$$P_N(j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(N+j)/2} \frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!}.$$

Fontos, hogy $N + j$ páros kell legyen (ekkor nyilván $N - j$ is az), ellenkező esetben a valószínűség nulla. Ha $j > 0$, akkor formálisan fel kell cserélni a jobbra és balraugrások valószínűségét a kapott képletben, ezért ekkor

$$P_N(j) = \left(\frac{1}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(N+j)/2} \frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!}.$$

10. A feladatban a hullámhossz-változás tévesen szerepelt: a kiszóródó foton hullámhossza kétszeresére nő (nem pedig felére csökken). A Compton-féle hullámhosszváltozásra vonatkozó

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

kifejezést alkalmazva, majd kihasználva, hogy $\theta = \pi/2$, kapjuk:

$$2\lambda_0 - \lambda_0 = \lambda_0 = \frac{h}{mc} \approx 2.4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Mivel a foton impulzusa felére csökkent, ezért az impulzusmegmaradás vektori alakját használva látható, hogy

$$\tan\alpha = 1/2,$$

ahol α az elektron szóródási szöge. Innen $\alpha \approx 26.6°$.

11. A 30 nA áramerősség azt jelenti, hogy másodpercenként $\Delta N_A/\Delta t \approx 1.875 \cdot 10^{11}$ db/s hidrogénion érkezik. Eszerint 1 óra alatt $N_A \approx 6.75 \cdot 10^{14}$ db ütközik a fóliával. Mivel a detektor hatásfoka 90%, ezért az események száma $5 \cdot 10^5/0.9 \approx 5.5 \cdot 10^5$ az eltelt 1 óra alatt. Mivel ismerjük az egységnyi felületre eső szórócentrumok n_B számát, ezért a hatáskeresztmetszet (a megfelelő térszögre vonatkozóan)

$$\sigma_\Omega = \frac{\text{események száma}}{N_A \cdot n_B} \approx 8.1 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{cm}^2.$$

A térszög pedig definínió szerint $\Omega = A/r^2 \approx 8 \cdot 10^{-6}$, a detektor felületének és távolságának ismeretében. Ezzel a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányára vonatkozóan már meghatározható:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\sigma_\Omega}{\Omega} \approx 10^{-29}\,\mathrm{cm}^2.$$

12. A sebesség négyzetének átlaga definíció szerint

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2k_B T\pi}\right)^{3/2} v^4 e^{-mv^2/2k_B T} dv.$$

Vezessük be a $\tilde{v} = v\sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$ integrációs változót! Ekkor az elvégzendő integrál az alábbira egyszerűsödik:

$$\bar{v^2} = \frac{8k_B T}{\sqrt{\pi}m} \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Vezessük be a következő, λ paramétertől függő integrált:

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Ekkor láthatóan

$$I''(\lambda = 1) = \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v},$$

vagyis a feladat $I(\lambda)$ meghatározása. Ez viszont rögtön adódik, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

hiszen ekkor $\tilde{x} = x/\sqrt{\lambda}$ helyettesítéssel látszik, hogy $I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$. Eszerint pedig $I''(\lambda = 1) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$, tehát

$$\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}.$$

Ugyanerre az eredményre juthattunk volna, ha kihasználjuk, hogy a 3 haladási szabadsági fokra átlagosan $\frac{1}{2}k_B T$ energia jut, eszerint

$$\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}k_B T,$$

amelyből ismét $\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$ adódik.