Atomfizika pótZH megoldások (2009)

1. A Compton-féle hullámhosszeltolódási egyenlet:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

A feladat szövege szerint a hullámhosszeltolódás:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

ahol a sebesség: $v = c/2$, így:

$$\Delta\lambda = \sqrt{3}\frac{h}{mc}.$$

Eszerint a keresett szög

$$cos\theta = 1 - \sqrt{3} \approx -0.732 \longrightarrow \theta \approx 137.1^\circ.$$

2. A részecskék energiája a gravitációs helyzeti energiából fakad. A Boltzmann statisztika szerint a keresett valószínűség

$$P(h)dh \sim e^{-\frac{mgh}{k_BT}}dh \Longrightarrow P(h) = Ce^{-\frac{mgh}{k_BT}},$$

ahol C a normálási faktor, mely értékét az határozza meg, hogy a valószínűségsűrűség integrálja 1 kell legyen:

$$\int_0^\infty P(h)dh = C\int_0^\infty e^{-\frac{mgh}{k_BT}}dh = \frac{k_BT}{mg}C \longrightarrow C = \frac{mg}{k_BT}.$$

Az átlagos hely eszerint:

$$< h >= \int_0^\infty hP(h)dh = \int_0^\infty h\frac{mg}{k_BT}e^{-\frac{mgh}{k_BT}}dh = \frac{k_BT}{mg}.$$

3. Jelölje az elektron bejövő haladási irányának a kondenzátorlapok normális irányával bezárt szögét α, míg a kimenő haladási irány esetén ugyanez a mennyiség legyen β. A kondenzátoron belül az elektromos tér a lapokra merőleges, ezért az elektron sebességének lapsík irányú komponense nem változhat meg. Vagyis érvényes, hogy

$$v\sin\alpha = \tilde{v}\sin\beta \longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tilde{v}}{v} \equiv n,$$

ahol v a bejövő, $\tilde{v}$ a kimenő sebességet jelöli, n pedig a "törésmutató". Írjuk fel a munka-tételt:

$$\frac{1}{2}m\tilde{v}^2 = E + Ue,$$

ahol $E = \frac{1}{2}mv^2$ az elektron kezdeti mozgási energiája, Ue pedig az elektromos tér által végzett munka. Rendezve:

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E+Ue} \longrightarrow n = \frac{\tilde{v}}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E+Ue}}{\sqrt{\frac{2}{m}E}} = \sqrt{\frac{E+Ue}{E}}.$$

4. Az időegység alatt beérkező részecskék száma:

$$N_{be} = \frac{I}{e} = \frac{32 \cdot 10^{-9} A}{1.6 \cdot 10^{-19} C} = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

A részecskeszámsűrűség a fóliában (M jelöli egy récsecske tömegét):

$$\rho = \frac{\rho_m}{M} = \frac{2\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3}{12\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol}} = 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}.$$

Mivel az események száma (szóródó részecskék száma) a hatáskeresztmetszet (σ) ismeretében az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$N = \sigma \cdot N_{be} \cdot \rho \cdot \Delta x,$$

ezért a fólia vastagsága

$$\Delta x = \frac{N}{\sigma \cdot N_{be} \cdot \rho} = \frac{10^6\,\mathrm{s}^{-1}}{10^{-28}\,\mathrm{cm}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}} = 0.5\,\mathrm{cm}\,.$$

5. Elegendő a problémát úgy megoldani, hogy $i > 0$ és $j > 0$, mert a megoldásnak szimmetrikusnak kell lennie az $i \to -i$ és $j \to -j$ tükrözésekre. Tegyük fel, hogy

$\longrightarrow$ a jobbraugrások száma N_j,
$\longrightarrow$ a balraugrások száma N_b,
$\longrightarrow$ a felugrások száma N_f,
$\longrightarrow$ a leugrások száma N_l.

Ha n jelenti a vízszintes irányú ugrások, míg m a függőleges irányú ugrások számát, akkor teljesül, hogy

$\longrightarrow$ $N_j + N_b = n$ és $N_j - N_b = i$,
$\longrightarrow$ $N_f + N_l = m$ és $N_f - N_l = j$.

Vagyis az egyes ugrások száma:

$\longrightarrow$ $N_j = \frac{n+i}{2}, \quad N_b = \frac{n-i}{2}$,
$\longrightarrow$ $N_f = \frac{m+j}{2}, \quad N_l = \frac{m-j}{2}$.

Mivel az irányok egyenértékűek, rögzített n és m mellett a keresett valószínűség:

$$P_{nm}(i,j) = (1/4)^{\frac{n+i}{2}}(1/4)^{\frac{n-i}{2}}(1/4)^{\frac{m+j}{2}}(1/4)^{\frac{m-j}{2}} \cdot \text{ esetek száma}\,,$$

ahol az esetek számát az jelenti, hogy különböző sorrendben juthat el a részecske ugyanarra a helyre:

$$\text{esetek száma } = \frac{N!}{(\frac{n+i}{2})!(\frac{n-i}{2})!(\frac{m+j}{2})!(\frac{m-j}{2})!}.$$

Ezzel kapjuk, hogy:

$$P_{nm}(i,j) = \frac{1}{4^N}\frac{N!}{(\frac{n+i}{2})!(\frac{n-i}{2})!(\frac{m+j}{2})!(\frac{m-j}{2})!}.$$

Ahhoz, hogy a keresett valószínűséget megkapjuk, összegeznünk kell n-re és m-re. Az összegzésben azonban csak olyan párokat kell figyelembe venni, melyre teljesül, hogy $n+m=N$. Teljesülnie kell továbbá annak, hogy $n \leq i$ és $m \leq j$, illetve hogy $n+i$ és $m+j$ páros:

$$P(i,j) = \frac{1}{4^N}\sum_{n,m}\frac{N!}{(\frac{n+i}{2})!(\frac{n-i}{2})!(\frac{m+j}{2})!(\frac{m-j}{2})!}.$$