Atomfizika gyakorlófeladatok, 1. adag

kinematika, ütközések, hatáskeresztmetszetek

Nagy Márton

2016. szeptember 26.

1.) Bizonyítsuk be (a relativisztikus energia és impulzus kifejezéseit használva), hogy egy szabadon mozgó elektron nem tud egy fotont kibocsátani, azaz nem létezik olyan kezdő– és végállapot, ahol a kezdőállapotban egy szabad elektron van, a végállapotban pedig egy szabad elektron és egy foton, és az energia és az impulzus is megmaradt! (Útmutatás: az elektron tömege legyen m. Legyen a kezdő elektron impulzusa $\mathbf{P}$, energiája E, ezek között van ugye egy összefüggés. Legyen az elektron impulzusa a reakció után $\mathbf{P}'$, energiája E', a kibocsátott foton impulzusa $\mathbf{p}$, energiája ε. Számoljunk $c = 1$ egységrendszerben, és lássuk be, hogy ellentmondást kapunk. Legegyszerűbb, ha mindent a $\mathbf{P}'$-vel és $\mathbf{p}$-vel fejezünk ki. Az ellentmondás abból származik, hogy az elektron tömege $m \neq 0$.)

2.) Hasonlóan, mint az előbb, bizonyítsuk be azt is, hogy a *párkeltés*, azaz amikor egy foton elektron-pozitron párrá alakul, vákuumban nem játszódhat le, ugyancsak az energia– és impulzusmegmaradás miatt! Vagyis: nem létezik olyan, hogy a kezdőállapotban egy foton van, a végállapotban pedig egy elektron és egy pozitron, és az energia és az impulzus is megmaradt! Útmutatás: az elektron és a pozitron tömege egyenlő. Fontos esetleg, hogy az elektromos kölcsönhatás (pl. az elektron meg a pozitron között) itt egyáltalán nem játszik szerepet; csak a kezdeti ill. a végállapotbeli szabad részecske (vagy részecskék) energiájára ill. impulzusára kell koncentrálni! Itt is érdemes a $c = 1$ egységrendszerben dolgozni. Továbbra is: fotonokra $\varepsilon = p$, tömeges részecskékre $E = \sqrt{m^2 + p^2}$.

3.) Tudjuk, hogyan csökken egy nyaláb intenzitása az anyagban megtett x távolság függvényében, ha a szórócentrumok (szám)sűrűsége állandó n_0, és a mikroszkopikus teljes hatáskeresztmetszet σ_t. Tegyük fel most, hogy a közeg sűrűsége nem állandó! Legyen akármilyen $n(x)$ függvény a sűrűség az x koordináta függvényében! Hogyan csökken ekkor a bebocsátott nyaláb intenzitása? Konkrét példaként legyen $n(x) = n_0 e^{-x/L_0}$, és legyen $L_0 = 2$ cm, $\sigma_t = 4$ barn, $n_0 = 1.2 \cdot 10^{29}/\mathrm{m}^3$. A $d = 7cm$ vastag mintán a nyaláb mekkora része halad át?

4.) Hány MeV energiájú α-részecske tudja az álló, szabad (de nem rögzített) ólomatommagot ($A = 206$, $Z = 82$) annyira megközelíteni, hogy „összeérjenek”? (Az atommagok sugara kb. $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$ fm, ahol A a tömegszám.)

5.) Lassú (termikus) neutronok a ^{238}U atommagban elnyelődnek (a folyamat hatáskeresztmetszete $\sigma = 2,68$ barn), a ^{235}U magban pedig vagy elnyelődnek (ennek hatáskeresztmetszete $\sigma = 98,8$ barn), vagy elhasítják; ennek hatáskeresztmetszete $\sigma_f = 582,6$ barn, és a hasadásból átlagosan 2,47 új neutron keletkezik. Egy valódi atomreaktorban a hasadásban keletkezett neutronok egy α-nyi hányada ($0 < \alpha < 1$) elnyelődik másképp, mielőtt újra reakcióba léphetne az uránnal. Mennyi lehet maximálisan α, hogy a természetes fém-uránban, melynek 0,72%-át teszi ki a hasadó ^{235}U izotóp, létrejöhessen a hasadási láncreakció, azaz minden hasadásból legalább 1 neutron újabb maghasadást okozzon? (Útmutatás: azon kezdjünk gondolkodni, hogy ha egy neutron egy kis, Δx utat megtesz az anyagban (uránban), mekkora valószínűséggel játszódnak le vele az egyes különböző, említett folyamatok! A kritérium: átlagosan a Δx út megtétele után az egy neutronból ne legyen kevesebb, mint az „induló” egy darab. Vegyük végtelen nagynak a reaktorunkat, azaz ne foglalkozzunk azzal, hogy a neutronok ki is szökhetnek.)

6.) A Compton-szórást vizsgáljuk kísérletileg: fotonokat szóratunk álló, szabad elektronokon. A differenciális hatáskeresztmetszet a következő alakú (E_γ a bejövő foton energiája, ϑ a szórási szög):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0 \times \left[A^3 - A^2 \sin^2\vartheta + A\right], \quad \text{ahol} \quad A = \left[1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)\right]^{-1}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m_e c^2}\right)^2.$$

Ez az ún. Klein-Nishina-formula[1]. A σ_0 értéke 0,0395 barn.

- Mekkora a teljes hatáskeresztmetszet (a fotonenergia függvényében)? Útmutatás: ki kell integrálni a térszögre: $\int \mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta$.
- Nehezebb: mihez tart a teljes hatáskeresztmetszet, ha a fotonenergiával nullához tartunk? Útmutatás:

[1] Mellesleg az A tényező mondja meg, hogy a foton energiája az ütközés után hanyad része a kezdeti energiájának.

ehhez egy *nagyon* genyó típusú határátmenetet kell elvégezni. Állítás: $\sigma_t \to \sigma_0 \cdot \frac{16\pi}{3}$, ha $E_\gamma \to 0$. Ez éppen a Thomson-féle klasszikus hatáskeresztmetszet amúgy.

- Vizsgáljunk $E_\gamma = 0,8$ MeV energiájú fotonokat! Mekkora ezek átlagos szabad úthossza a levegőben, ha feltesszük, hogy egyedül Compton-szórással hatnak kölcsön bármivel is? (Ez amúgy nem teljesen igaz.) A levegő sűrűsége $\rho = 1,3$ kg/m^3. A szórás az elektronokon történik, amiket mind szabadnak vehetünk ekkora fotonenergia mellett. A levegőben főleg oxigén (^{16}O) és nitrogén (^{14}N) van, azaz amikor az elektronok sűrűségét számoljuk, úgy vehetjük, hogy 1 neutronra és 1 protonra jut egy elektron.)
- Legyen most a fotonenergia $E_\gamma = 1$ MeV. Mérési elrendezésünkben másodpercenként 10^6 darab foton érkezik egy $d = 1$ cm vastag jégdarabra (sűrűsége $0,9$ g/cm^3; minden benne lévő elektron szabadnak tekinthető). A 100% hatásfokú, $A = 1$cm^2 felületű detektorunkat $D = 3$ m-re lerakva a szórási helytől hány foton beütését észleljük másodpercenként $\vartheta = 30°$-nál, $\vartheta = 45°$-nál, $\vartheta = 90°$-nál, $\vartheta = 180°$-nál?

7.) Neutronokat szóratunk a laborrendszerben kezdetben álló atommagokon. A neutron tömege m, az atommagé M, a neutron kezdeti mozgási energiája E_0. Végig nemrelativisztikusan számolhatunk.

- Mekkora energiát ad át a neutron az atommagnak (azaz: mekkora lesz az ütközés után a neutron ill. az atommag mozgási energiája) *a laboratóriumi rendszerben*, ha a szórási szög *a tömegközépponti (TKP–) rendszerben* ϑ?
- Legfeljebb mekkora energiát adhat át a neutron az atommagnak a laboratóriumi rendszerben? (Ez nyilván a $\vartheta = 180°$ esetnek felel meg, de lássuk is be ezt az előző eredmény alapján!)
- Tegyük fel, hogy a szórási a TKP-rendszerben izotrop (sok valódi helyzetben ez fennáll). Átlagosan mekkora ekkor az ütközés után a neutron, illetve az atommag átlagos energiája a laborrendszerben? (Útmutatás: kifejeztük már a TKP-rendszerbeli ϑ függvényében ezeket a mennyiségeket; most ennek az eloszlására kell átlagolni.
- Végül legyen a hatáskeresztmetszet a TKP-rendszerben a következő alakú: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha + \beta\cos\vartheta + \gamma\cos^2\vartheta$. Mekkora lesz ekkor az ütközés után a neutron átlagos mozgási energiája a laborrendszerben?

8.) $E = 230$ keV energiájú neutronok szóródását vizsgáljuk berilliumatommagokon (tömegszám: $A = 9$, a berilliumfém sűrűsége 1,85 g/cm^3). A céltárgy vastagsága $d = 0,5$ mm, a hatáskeresztmetszet ilyen neutronenergiánál kb. a következő alakú: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha + \beta\cos^2\theta$. Másodpercenként 10^{10} neutron érkezik a céltárgyra, 3 cm^2 felületű detektorunkat a céltárgytól 1 m-re helyezzük el, és különböző szórási szögekhez forgatjuk. $\vartheta = 30°$-nál másodpercenként 476 beütést, $\theta = 45°$-nál pedig 482 beütést mérünk. Mennyi ez alapján az α és β állandók értéke? Mennyi a teljes szórási hatáskeresztmetszet? Lássuk be, hogy a céltárgy „vékony"-nak tekinthető!

9.) $I_0 = 10^6$/s intenzitású neutronnyaláb esik be egy 1mm×1mm×20 mm méretű, gyémántból készült téglatest legkisebb lapjára merőlegesen. (A nyaláb jól kollimált: minden neutron eltalálja a téglatestet.) A gyémánt sűrűsége 3,2 g/cm^3, a szénatom tömegszáma 12, és a gyémánt csak szénből áll). A hatáskeresztmetszet $\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta$ alakú, és tudjuk, hogy $A = 10 \cdot B$. A 100% hatásfokú, 10 cm^2 felületű detektorunkat $D = 1,5$ m-re helyezzük el, $\theta = 60°$-nál, ez másodpercenként 28 darab neutront észlel. Mennyi az A állandó? Mennyi neutron szóródik összesen?

(Útmutatás: olyan a céltárgy alakja, hogy a „másodszori szórás" elhanyagolható, de nem feltétlenül „vékony". A $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ függvényalakja megmondja a szórt neutronok irány szerinti eloszlását; ez alapján a megadott adatból kitalálható, hogy összesen mennyi neutron szóródik, ebből a szabad úthossz, ebből a teljes hatáskeresztmetszet, ebből pedig az A állandó.)

10.) Pontosítsuk azt a számolást, amivel megbecsültük, hogy mennyi energiát veszít a Rutherford-szóródó α-részecske! A tárgyalásából még kimaradt, hogy megemlítsük: a kiszámított hatáskeresztmetszet-formula valójában a mag és a beeső töltött részecske (pl. α-részecske) tömegközépponti rendszerében érvényes. Itt is érdekes tehát a kérdés, hogy mennyi energiát veszít a laborrendszerben átlagosan a beeső részecske. Mivel itt végtelen a teljes hatáskeresztmetszet, annak van értelme, ha egy adott minimális ϑ_0 szórási szögnél nagyobb szögű szórásra koncentrálunk. Mekkora az átlagos energiaveszteség ekkor, ha a beeső α-részecskék energiája E_0, a magok töltése pedig $Z \cdot e$? A ϑ_0 minimális szög ugyebár megfelel egy $b_{\max}$ maximális ütközési paraméternek (ahogy láttuk az ezek közötti összefüggést); „mennyire" függ a $b_{\max}$ megválasztásától az eredmény? Becsüljük meg $b_{\max}$-ot az atomok közötti átlagos távolságból! (Mivel ϑ_0 kicsi, ezért $\sin\vartheta_0 \approx \vartheta_0 \approx \mathrm{tg}\vartheta_0$.)