

# Atomfizika gyakorlófeladatok

Nagy Márton

2015. szeptember 29.

- Ha egy feladatban kijön egy határozott integrál, ami semmilyen paramétertől sem függ, de nem tudjuk kiszámolni, akkor ne ijedjünk meg: az értékét nevezzük el valahogy, és haladjunk tovább!
- A \* -gal jelöltek inkább csak gyakorlásra valók, mert nehezebbek, vagy több számolást tartalmaznak.
- Néhány olyan feladatot is leírok, ami volt órán.

## Feladatok:

1. Hány MeV energiájú  $\alpha$ -részecske tudja az álló, szabad (de nem rögzített) ólomatommagot ( $A = 206$ ,  $Z = 82$ ) annyira megközelíteni, hogy „megérintse”? (Az atommagok sugara kb.  $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$  fm, ahol  $A$  a tömegszám.)
2. Becsüljük meg a fúzió hőmérsékletét! Mekkora energiájú proton tud egy álló (de nem rögzített) másik protont annyira megközelíteni, hogy a vonzó magerők már hatni tudjanak, és „összetapadjon” a két atommag? Ez akkor történik meg, amikor a magok kb. „megérintik” egymást. Mekkora hőmérséklet felel meg ennek az energiának<sup>1</sup>? Mi a helyzet, ha deutérium-deutérium, vagy deutérium-trícium ütközést vizsgálunk ugyanígy? Az atommagok sugara kb.  $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$  fm, ahol  $A$  a tömegszám.
3. \* Nagy energiájú (azaz: relativisztikus sebességű)  $m$  tömegű részecskéket szórunk szabad, kezdetben álló  $M$  tömegű részecskéken. Legyen a bejövő részecske energiája  $\varepsilon$ , impulzusának nagysága  $p$ , a szórás után pedig  $\varepsilon'$  és  $p'$ . Ezek között ugyebár az  $\varepsilon^2 - p^2 = \varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$  összefüggés áll fenn<sup>2</sup>. Tegyük fel, hogy  $\varepsilon'$ -t (és így nyilván  $p'$ -t is), valamint a szóródott részecske kilépési irányát (szögét, jelöljük ezt  $\alpha$ -val) is meg tudjuk mérni! A Compton-szórás elemzésének mintájára adjunk meg ezen két mennyiség között összefüggést! Visszakapjuk-e az  $m \rightarrow 0$ ,  $M = m_e$  esetben a Compton-képletet<sup>3</sup>?
4. Bizonyítsuk be (a relativisztikus energia és impulzus kifejezéseit használva), hogy
  - Egy szabadon mozgó elektron nem tud egy fotont kibocsátani, azaz nem létezik olyan kezdő- és végállapot, ahol a kezdőállapotban egy szabad elektron van, a végállapotban pedig egy szabad elektron és egy foton, és az energia és az impulzus is megmaradt!
  - A párkeltés (vagyis amikor egy fotonból egy elektron-pozitron pár keletkezik) vákuumban nem lehetséges!
  - Egy szabad, kezdetben álló elektron nem tud egy fotont elnyelni!
5. Egy 1 MeV energiájú foton szóródik egy álló elektronon<sup>4</sup>.
  - Ha a foton a szórás után teljesen visszaverődik, mekkora lesz a visszaszóródott foton frekvenciája, hullámhossza? Mekkora lesz az elektron kinetikus energiája? Mekkora lesz az elektron hullámhossza?
  - Ugyanezeket számoljuk ki, ha a foton az eredeti irányával  $60^\circ$ -os szöget bezáró irányban halad tovább.

<sup>1</sup>Megjegyzés: az eredmény teljesen érdektelen; a valóságban a fúzió sokkal kisebb hőmérsékleteken is működik, a majd később tanulandó *alagúteffektus* miatt.

<sup>2</sup>Ez a feladat egy elég hosszadalmas számolás, gyakorlásnak jó, ilyen nem lesz a ZH-n. Ezenkívül ebben a feladatban a  $c$ -t, a fénysebességet érdemes 1-nek venni (még így is elég hosszú a számolás): ez azt jelenti, hogy az energiát, az impulzust és a tömeget is energiában mérjük. Azaz ahol pl.  $m$ -et látsz, oda képzelj  $mc^2$ -et, ahol  $p$ -t (impulzust), oda  $pc$ -t.

<sup>3</sup>Nyilván igen. Ha nem, elszámoltuk. Amikor  $m = 0$ , akkor nyilván  $\varepsilon = p$ ,  $\varepsilon' = p'$  (emlékezzünk,  $c$ -t egynek vettük). A számoláshoz segédlet:  $\varepsilon'$ -t és  $\varepsilon$ -t, valamint  $p$ -t és  $p'$ -t is egyszerre érdemes használni, úgy, hogy közben a kisujjunkban van, hogy ezek persze összefüggenek:  $\varepsilon^2 - p^2 = m^2$ ,  $\varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$ . A helyes eredmény:

$$\varepsilon' = \frac{(M + \varepsilon)(M\varepsilon + m^2) + p^2 \cos^2 \alpha \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \alpha}}{(M + \varepsilon + p \cos \alpha)(M + \varepsilon - p \cos \alpha)}.$$

<sup>4</sup>Megjegyzés: a ZH-n nem lehet füzetet használni, úgyhogy ne csak agyatlanul behelyettesítsünk a füzetből kinézett képletekbe!

6. Mozogjon egy  $m$  tömegű részecske az  $x$  tengely mentén egy egydimenziós potenciálgödörben, ahol a helyzeti energia  $V(x)$ . Határozzuk meg a következő esetekben, hogy a Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján mik a lehetséges energiaszintek!

- Legyen először  $V(x) = a \cdot x^5$ , ha  $x > 0$ , és  $V(x) = \infty$ , ha  $x < 0$ , ahol  $a$   $\text{J/m}^5$  dimenziójú konstans, a  $\infty$  pedig azt jelenti, hogy a részecske a határról visszapattan.
- Legyen most  $V(x) = ax^4$ , ahol  $a$  (dimenziós) konstans!
- Legyen végül  $V(x) = ax^{2m}$ , ahol  $m$  pozitív egész szám,  $a$  pedig ismét (dimenziós) konstans!

(Segítség: gondoljunk az energiamegmaradásra!)

7. Vizsgáljuk a hidrogénatom Bohr-modelljét még egy kicsit! Ebben a feladatban ne foglalkozunk az atommag mozgásával, azt vegyük rögzítettnek.

- Mekkora mágneses teret kelt az atommag helyén a keringő elektron a különböző  $n$ -nel jellemzett állapotokban<sup>5</sup>?
- Próbáljuk meg a *külső* mágneses tér hatását figyelembe venni a Bohr-modellben<sup>6</sup>! Legyen jelen a keringés síkjára merőleges külső,  $B_0$  nagyságú mágneses tér, és az ötlet legyen ugyanaz: az elektron mozgása a klasszikus törvények szerint megy végbe, kiegészítve azzal a („kvantum”)feltétellel, hogy az elektron impulzusmomentuma  $n\hbar$ , ahol  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Mik ekkor a lehetséges energiaszintek?

8. Vizsgáljuk a hidrogénatomot a Bohr-modellben még egy kicsit! Ne hanyagoljuk most el a proton tömegét!

- Ha a mag (proton) tömegét is figyelembe vesszük, mik lesznek az elektron energiaszintjei? (A kvantumfeltétel továbbra is ugyanaz: az össz-impulzusmomentum  $n\hbar$ .)
- Mekkora lesz az  $n = 2$  és az  $n = 3$  állapot közötti átmenetnek megfelelő foton hullámhossza?
- Ha most a mag nem egy proton, hanem egy deuteron (proton + neutron), azaz nehézhidrogénről van szó, akkor mekkora lesz az előbb kiszámolt hullámhossz<sup>7</sup>?

9. Tudjuk, hogyan csökken egy nyaláb intenzitása az anyagban megtett  $x$  távolság függvényében, ha a szórócentrumok (szám)sűrűsége állandó  $n_0$ , és a mikroszkopikus teljes hatáskeresztmetszet  $\sigma$ . Tegyük fel most, hogy a közeg sűrűsége nem állandó!

- Legyen akármilyen  $n(x)$  függvény a sűrűség az  $x$  koordináta függvényében! Hogyan csökken ekkor a beocsátott nyaláb intenzitása?
- Egy konkrét példa legyen:  $n(x) = n_0 e^{-x/L}$ . Legyen  $L = 2$  cm,  $\sigma = 4$  barn,  $n_0 = 10^{29}/\text{m}^3$ . A  $d = 5$  cm vastag mintán a nyaláb mekkora része halad át?

10. Lassú (termikus) neutronok a  $^{238}\text{U}$  atommagban elnyelődnek (a folyamat hatáskeresztmetszete  $\sigma = 2,68$  barn), a  $^{235}\text{U}$  magban pedig vagy elnyelődnek (ennek hatáskeresztmetszete  $\sigma = 98,8$  barn), vagy elhasítják; ennek hatáskeresztmetszete  $\sigma_f = 582,6$  barn, és a hasadásból átlagosan 2,47 új neutron keletkezik. Egy valódi atomreaktorban a keletkezett neutronok egy  $\alpha$ -nyi hányada ( $0 < \alpha < 1$ ) elnyelődik másképp, mielőtt újra reakcióba léphetne az uránnal. Mennyi lehet maximálisan  $\alpha$ , hogy a természetes fém-uránban, melynek 0,72%-át teszi ki a hasadó  $^{235}\text{U}$  izotóp, létrejöhessen a hasadási láncreakció, azaz minden hasadásból legalább 1 neutron újabb maghasadást okozzon<sup>8</sup>?

11. A Compton-szórást vizsgáljuk kísérletileg: fotonokat szórunk elektronokon. A hatáskeresztmetszet a következő alakú (itt  $E_\gamma$  a foton energiája):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0 \times [A^3 - A^2 \sin^2 \vartheta + A], \quad \text{ahol} \quad A = \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)\right)^{-1}.$$

Ez az ún. Klein-Nishina-formula<sup>9</sup>. A  $\sigma_0$  állandó értéke 0,0395 barn.

<sup>5</sup>A valódi atomokban is kelthet mágneses teret az atommag helyén az elektronfelhő, persze annak értékét egyáltalán nem a Bohr-modellből kell meghatározni. Az itt kiszámolt eredmény nagyságrendileg érdekes csak.

<sup>6</sup>E számolás eredményének viszont hangsúlyozottan *semmi* köze nincsen semmi valódi fizikai helyzethez, csak amolyan ujjgyakorlat.

<sup>7</sup>Így fedték fel a deutériumot (Urey, 1931); észrevették, hogy vannak kicsit eltolt hullámhosszú átmeneti vonalak is a hidrogén színképében.

<sup>8</sup>Vegyük végtelen nagyra a reaktorunkat, azaz ne foglalkozunk azzal, hogy a neutronok ki is szökhetnek.

<sup>9</sup>Az  $A$  tényező került elő a foton ütközés utáni energiájának órai számolásánál is, ha emlékszünk.

- Mekkora a teljes hatáskeresztmetszet (a fotonenergia függvényében)?
  - \* Mihez tart a teljes hatáskeresztmetszet, ha a fotonenergiával nullához tartunk<sup>10</sup>?
  - Vizsgáljunk  $E_\gamma = 0,8$  MeV energiájú fotonokat! Mekkora ezek átlagos szabad úthossza a levegőben, ha feltesszük, hogy egyedül Compton-szórással hatnak kölcsön bármivel is<sup>11</sup>? (A levegő sűrűsége  $\rho = 1,3$  kg/m<sup>3</sup>. A szórás az elektronokon történik, amiket mind szabadnak vehetünk ekkora fotonenergia mellett. A levegőben főleg oxigén (<sup>16</sup>O) és nitrogén (<sup>14</sup>N) van, azaz amikor az elektronok sűrűségét számoljuk, úgy vehetjük, hogy 1 neutronra és 1 protonra jut egy elektron.)
  - Legyen most a fotonenergia  $E_\gamma = 1$  MeV. Mérési elrendezésünkben másodpercenként  $10^6$  darab foton érkezik egy  $d = 1$  cm vastag jégdarabra (sűrűsége  $0,9$  g/cm<sup>3</sup>; minden benne lévő elektron szabadnak tekinthető). A 100% határfokú,  $A = 1$  cm<sup>2</sup> felületű detektorunkat  $D = 3$  m-re lerakva a szórási helytől hány foton beütését észleljük másodpercenként  $\vartheta = 30^\circ$ -nál,  $\vartheta = 45^\circ$ -nál,  $\vartheta = 90^\circ$ -nál,  $\vartheta = 180^\circ$ -nál?
12. Neutronokat szórátunk a laborrendszerben kezdetben álló atommagokon, a neutron tömege  $m$ , az atommagé  $M$ . A hatáskeresztmetszet a szórás tömegközépponti (TKP) rendszerében a következő alakú:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta$ . Mekkora lesz az ütközés után a neutron *átlagos* mozgási energiája? (Segítség: számoljuk ki a TKP rendszerben a különböző  $\vartheta$  értékek valószínűségét, aztán az ezen  $\vartheta$  értékekhez tartozó ütközés utáni neutronenergiát (a laborrendszerben), majd ezt integráljuk össze. Közben szükség lesz a teljes hatáskeresztmetszetre is.)
13. Számoljuk ki egy kvantumozó harmonikus oszcillátor fajhőjét<sup>12</sup>! Legyen a körfrekvencia  $\omega$ . Tudjuk, hogy az energiaszinteket egy  $n \in \mathbb{N}$  szám indexeli: az  $n$ -edig lehetséges energia  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ . Induljunk ki abból, hogy  $T$  hőmérsékleten egy adott  $E$  energiájú állapot valószínűsége,  $p_n$  az  $e^{-E/kT}$ -vel arányos<sup>13</sup>! Mennyi ebből az energia várható értéke, vagyis mennyi energiája van a „testnek” (oszcillátornak)  $T$  hőmérsékleten? Ennek deriváltja a fajhő.
14. Ha egy gáz hőmérséklete annyira nagy, hogy a részecskék átlagos mozgási energiája összemérhető a nyugalmi energiájukkal, akkor már nem érvényes a Maxwell-féle sebességeloszlás, hanem a relativisztikus képleteket kell használni. A statisztikus fizika alapelvei szerint továbbra is igaz, hogy egy állapot valószínűsége  $e^{-E/kT}$ -vel arányos, ahol  $E$  az energia,  $T$  a hőmérséklet.
- Hogyan néz ki ez alapján relativisztikus esetben a részecskék sebessége nagyságának valószínűségeloszlása? A gáz egyforma  $m$  tömegű részecskékből áll. (A normálási állandót nem kell kiszámolni!) Fontos segítség: az impulzustérben vannak „egyenletesen” állapotok!!!
  - Hogyan függ a legvalószínűbb sebesség a  $T$  hőmérséklettől és a részecskék tömegétől?

Nagy Márton

<sup>10</sup>Ehhez egy *nagyon* genyó típusú határátmenetet kell elvégezni. Állítás:  $\sigma_t \rightarrow \sigma_0 \cdot \frac{16\pi}{3}$ , ha  $E_\gamma \rightarrow 0$ .

<sup>11</sup>Ez nem teljesen igaz.

<sup>12</sup>Ezt, amit most csinálunk, Einstein tette meg először. Történeti érdekessége, hogy ez volt az első számolás, amiben bárminek is a fajhője hőmérsékletfüggőnek adódott.

<sup>13</sup>Nem egyenlő vele: meg kell még szorozni egy olyan normálási állandóval, hogy  $\sum_n p_n = 1$  legyen.