

Atomfizika gyakorlófeladatok

Nagy Márton

2014. október 17.

Jótanács: ha egy feladatban kijön egy határozott integrál, ami semmilyen paramétertől sem függ, de nem tudjuk kiszámolni, akkor ne ijedjünk meg: az értékét nevezzük el valahogy, és haladjunk tovább! A *-gal jelöltek inkább csak gyakorlásra valók, mert nehezebbek, vagy több számolást tartalmaznak. Ezek olyan feladatok, amik nem voltak órán. Azokat, amik voltak, nem ismétlem meg.

Feladatok:

1. * Nagy energiájú (azaz: relativisztikus sebességű) m tömegű részecskéket szórunk szabad, kezdetben álló M tömegű részecskéken. Legyen a bejövő részecske energiája ε , impulzusának nagysága p , a szórás után pedig ε' és p' . Ezek között az $\varepsilon^2 - p^2 = \varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$ összefüggés áll fenn¹. Tegyük fel, hogy ε' -t (és így nyilván p' -t is), valamint a szóródott részecske kilépési irányát (szögét, jelöljük ezt α -val) is meg tudjuk mérni! A Compton-szórás elemzésének mintájára adjunk meg ezen két mennyiség között összefüggést! Visszkapjuk-e az $m \rightarrow 0$, $M = m_e$ esetben a Compton-képletet²?
2. Bizonyítsuk be (a relativisztikus energia és impulzus kifejezéseit használva), hogy egy szabadon mozgó elektron nem tud egy fotont kibocsátani, azaz nem létezik olyan kezdő- és végállapot, ahol a kezdőállapotban egy szabad elektron van, a végállapotban pedig egy szabad elektron és egy foton, és az energia és az impulzus is megmaradt!
3. Mozogjon egy m tömegű részecske az x tengely mentén egy egydimenziós potenciálgödörben, ahol a helyzeti energia $V(x)$. Határozzuk meg a következő esetekben, hogy a Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján mik a lehetséges energiaszintek!

¹ Ez a feladat egy elég hosszadalmas számolás, gyakorlásnak jó, ilyen nem lesz a ZH-n. Ezenkívül ebben a feladatban a c -t, a fénysebességet érdemes 1-nek venni (még így is elég hosszú a számolás): ez azt jelenti, hogy az energiát, az impulzust és a tömeget is energiában mérjük. Azaz ahol pl. m -et látsz, oda képzelj mc^2 -et, ahol p -t (impulzust), oda pc -t.

² Nyilván igen. Ha nem, elszámoltuk. Amikor $m = 0$, akkor nyilván $\varepsilon = p$, $\varepsilon' = p'$ (emlékezzünk, c -t egynek vettük). A számoláshoz segédlet: ε' -t és ε -t, valamint p -t és p' -t is egyszerre érdemes használni, úgy, hogy közben a kisujjunkban van, hogy ezek persze összefüggenek: $\varepsilon^2 - p^2 = m^2$, $\varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$. A helyes eredmény:

$$\varepsilon' = \frac{(M + \varepsilon)(M\varepsilon + m^2) + p^2 \cos^2 \alpha \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \alpha}}{(M + \varepsilon + p \cos \alpha)(M + \varepsilon - p \cos \alpha)}.$$

- Legyen először $V(x) = a \cdot x^5$, ha $x > 0$, és $V(x) = \infty$, ha $x < 0$, ahol a J/m⁵ dimenziójú konstans, a ∞ pedig azt jelenti, hogy a részecske a határról visszapat-
tan.
- Legyen most $V(x) = ax^4$, ahol a (dimenziós) konstans!
- Legyen végül $V(x) = ax^{2m}$, ahol m pozitív egész szám, a pedig ismét (dimenziós) konstans!

(Segítség: gondoljunk az energiamegmaradásra!)

4. Vizsgáljuk a hidrogénatom Bohr-modelljét még egy kicsit! Ebben a feladatban ne foglalkozunk az atommag mozgásával, azt vegyük rögzítettnek.
 - Mekkora mágneses teret kelt az atommag helyén a keringő elektron a különböző n -nel jellemzett állapotokban³?
 - Próbáljuk meg a *külső* mágneses tér hatását figyelembe venni a Bohr-modellben⁴! Legyen jelen a keringés síkjára merőleges külső, B_0 nagyságú mágneses tér, és az ötlet legyen ugyanaz: az elektron mozgása a klasszikus törvények szerint megy végbe, kiegészítve azzal a („kvantum”)feltétellel, hogy az elektron impulzusmomentuma $n\hbar$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$. Mik ekkor a lehetséges energiaszintek?
5. Egy 1 MeV energiájú foton szóródik egy álló elektronon⁵.
 - Ha a foton a szórás után teljesen visszaverődik, mekkora lesz a visszaszóródott foton frekvenciája, hullámhossza? Mekkora lesz az elektron kinetikus energiája? Mekkora lesz az elektron hullámhossza?
 - Ugyanezeket számoljuk ki, ha a foton az eredeti irányával 60°-os szöget bezáró irányban halad tovább.
6. Tudjuk, hogyan csökken egy nyaláb intenzitása az anyagban megtett x távolság függvényében, ha a szórócentrumok (szám)sűrűsége állandó n_0 , és a mikroszkopikus teljes hatáskeresztmetszet σ . Tegyük fel most, hogy a közeg sűrűsége nem állandó!
 - Legyen akármilyen $n(x)$ függvény a sűrűség az x koordináta függvényében! Hogyan csökken ekkor a bebocsátott nyaláb intenzitása?
 - Egy konkrét példa legyen: $n(x) = n_0 e^{-x/L}$. Legyen $L = 2$ cm, $\sigma = 4$ barn, $n_0 = 10^{29}/\text{m}^3$. A $d = 5$ cm vastag mintán a nyaláb mekkora része halad át?
7. Hány MeV energiájú α -részecske tudja az álló, szabad (de nem rögzített) ólomatommagot ($A = 206$, $Z = 82$) annyira megközelíteni, hogy „megérintse”? (Az atommagok sugara kb. $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$ fm, ahol A a tömegszám.)

³A valódi atomokban is kelthet mágneses teret az atommag helyén az elektronfelhő, persze annak értékét egyáltalán nem a Bohr-modellből kell meghatározni. Az itt kiszámolt eredmény nagyságrendileg érdekes csak.

⁴E számolás eredményének viszont hangsúlyozottan *semmi* köze nincsen semmi valódi fizikai helyzethez, csak amolyan ujjgyakorlat.

⁵Megjegyzés: a ZH-n nem lehet füzetet használni, úgyhogy ne csak agyatlanul behelyettesítsünk a füzetből kinézett képletekbe!

8. Becsüljük meg a fúzió hőmérsékletét! Mekkora energiájú proton tud egy álló (de nem rögzített) másik protont annyira megközelíteni, hogy a vonzó magerők már hatni tudjanak, és „összetapadjon” a két atommag? Ez akkor történik meg, amikor a magok kb. „megérintik” egymást. Mekkora hőmérséklet felel meg ennek az energiának⁶? Mi a helyzet, ha deutérium-deutérium, vagy deutérium-trícium ütközést vizsgálunk ugyanígy? Az atommagok sugara kb. $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2 \text{ fm}$, ahol A a tömegszám.
9. Lassú (termikus) neutronok a ^{238}U atommagban elnyelődnek (a folyamat hatáskeresztmetszete $\sigma = 2,68 \text{ barn}$), a ^{235}U magban pedig vagy elnyelődnek (ennek hatáskeresztmetszete $\sigma = 98,8 \text{ barn}$), vagy elhasítják; ennek hatáskeresztmetszete $\sigma_f = 582,6 \text{ barn}$, és a hasadásból átlagosan 2,47 új neutron keletkezik. Egy valódi atomreaktorban a keletkezett neutronok egy α -nyi hányada ($0 < \alpha < 1$) elnyelődik másképp, mielőtt újra reakcióba léphetne az uránnal. Mennyi lehet maximálisan α , hogy a természetes fém-uránban, melynek 0,72%-át teszi ki a hasadó ^{235}U izotóp, létrejöhessen a hasadási lánreakció, azaz minden hasadásból legalább 1 neutron újabb maghasadást okozzon⁷?
10. A Compton-szórást vizsgáljuk kísérletileg: fotonokat szórunk elektronokon. A hatáskeresztmetszet a következő alakú (itt E_γ a foton energiája):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0 \times [A^3 - A^2 \sin^2 \vartheta + A], \quad \text{ahol} \quad A = \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta) \right)^{-1}.$$

Ez az ún. Klein-Nishina-formula⁸. A σ_0 állandó értéke 0,0395 barn.

- Mekkora a teljes hatáskeresztmetszet (a fotonenergia függvényében)?
- * Mihez tart a teljes hatáskeresztmetszet, ha a fotonenergiával nullához tartunk⁹?
- Vizsgáljunk $E_\gamma = 0,8 \text{ MeV}$ energiájú fotonokat! Mekkora ezek átlagos szabad úthossza a levegőben, ha feltesszük, hogy egyedül Compton-szórással hatnak kölcsön bármivel is¹⁰? (A levegő sűrűsége $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$. A szórás az elektronokon történik, amiket mind szabadnak vehetünk ekkora fotonenergia mellett. A levegőben főleg oxigén (^{16}O) és nitrogén (^{14}N) van, azaz amikor az elektronok sűrűségét számoljuk, úgy vehetjük, hogy 1 neutronra és 1 protonra jut egy elektron.)
- Legyen most a fotonenergia $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$. Mérési elrendezésünkben másodpercenként 10^6 darab foton érkezik egy $d = 1 \text{ cm}$ vastag jégdarabra (sűrűsége $0,9 \text{ g/cm}^3$; minden benne lévő elektron szabadnak tekinthető). A 100% hatásfokú, $A = 1 \text{ cm}^2$ felületű detektorunkat $D = 3 \text{ m}$ -re lerakva a szórási helytől hány foton beütését észleljük másodpercenként $\vartheta = 30^\circ$ -nál, $\vartheta = 45^\circ$ -nál, $\vartheta = 90^\circ$ -nál, $\vartheta = 180^\circ$ -nál?

⁶Megjegyzés: az eredmény teljesen érdektelen; a valóságban a fúzió sokkal kisebb hőmérsékleteken is működik, a majd később tanulandó *alagúteffektus* miatt.

⁷Vegyük végtelen nagynak a reaktorunkat, azaz ne foglalkozzunk azzal, hogy a neutronok ki is szökhetnek.

⁸Az A tényező került elő a foton ütközés utáni energiájának órai számolásánál is, ha emlékszünk.

⁹Ehhez egy *nagyon* genyő típusú határátmenetet kell elvégezni. Állítás: $\sigma_t \rightarrow \sigma_0 \cdot \frac{16\pi}{3}$, ha $E_\gamma \rightarrow 0$.

¹⁰Ez nem teljesen igaz.

11. * Neutronokat szórattunk a laborrendszerben kezdetben álló atommagokon, a neutron tömege m , az atommagé M . A hatáskeresztmetszet a szórás tömegközépponti (TKP) rendszerében a következő alakú: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta$. Mekkora lesz az ütközés után a neutron *átlagos* mozgási energiája? (Segítség: számoljuk ki a TKP rendszerben a különböző ϑ értékek valószínűségét, aztán az ezen ϑ értékekhez tartozó ütközés utáni neutronenergiát (a laborrendszerben), majd ezt integráljuk össze. Közben szükség lesz a teljes hatáskeresztmetszetre is.
12. Számoljuk ki egy kvantumoz harmonikus oszcillátor fajhőjét¹¹! Legyen a körfrekvencia ω . Tudjuk, hogy az energiaszinteket egy $n \in \mathbb{N}$ szám indexeli: az n -edik lehetséges energia $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$. Induljunk ki abból, hogy T hőmérsékleten egy adott E energiájú állapot valószínűsége, p_n az $e^{-E/kT}$ -vel arányos¹²! Mennyi ebből az energia várható értéke, vagyis mennyi energiája van a „testnek” (oszcillátornak) T hőmérsékleten? Ennek deriváltja a fajhő.
13. Egy 10 fényévre lévő bolygó értelmes lényei foton-interferométerrel nézegetik a mi Napunkat.
- Hány darab láthatófény-foton¹³ érkezik hozzájuk a Napból egy négyzetméterre másodpercenként?
 - Mi van, ha infravörös fotonokat néznek? Tegyük fel, hogy a 10-20 μm közötti hullámhosszú fotonokra kíváncsiak¹⁴? Ezekből hány darab érkezik oda?
 - És összesen hány (bármilyen frekvenciájú) foton érkezik?
14. A dobozba zárt hőmérsékleti sugárzás fotonjai egyenletes irányeloszlásúak, és folyamatosan ütköznek a fallal. Mekkora nyomást fejtenek ki rá, ha az energiasűrűség $\varepsilon = E/V$ adott¹⁵? (Útmutatás: tekintsük egy adott térszögelemben haladó foton által a falnak átadott impulzust, szorozzuk meg azzal, hogy hány ilyen foton ütközik a fallal másodpercenként, majd ezt átlagoljuk ki a (fal felé mutató) fél térszögére!) A helyes válasz: $p = \varepsilon/3$.

Nagy Márton

¹¹Ezt, amit most csinálunk, Einstein tette meg először. Történeti érdekessége, hogy ez volt az első számolás, amiben bárminek is a fajhője hőmérsékletfüggőnek adódott.

¹²Nem egyenlő vele: meg kell még szorozni egy olyan normálási állandóval, hogy $\sum_n p_n = 1$ legyen.

¹³Az ő szemüknek ugyanaz a látható, mint a miénknek. A Nap teljesítménye: $3,26 \cdot 10^{26}$ W, felszíni hőmérséklete 5700 K.

¹⁴Vigyázat! Hasonlítsuk össze $\hbar\omega$ -t $k_B T$ -vel!

¹⁵Persze hogy adott: kiszámoltuk a Planck-eloszlásból. De a konkrét alak nem is fog kelleni.