Atomfizika gyakorlófeladatok

Nagy Márton

2013. október 29.

Jótanács: ha egy feladatban kijön egy határozott integrál, ami semmilyen paramétertől sem függ, de nem tudjuk kiszámolni, akkor ne ijedjünk meg: az értékét nevezzül el valahogy, és haladjunk tovább!

Feladatok:

1. Ha egy gáz hőmérséklete olyan alacsony, hogy a részecskék átlagos impulzusának megfelelő hullámhossz már a részecskék egymás közötti távolságának nagyságrendjébe esik, a gáz nem tekinthető ideális Boltzmann-féle gáznak, hanem a kvantumos effektusok lépnek előtérbe.
   - Becsüljük meg ezek alapján, hogy ez milyen hőmérsékleten következik be, ha a gáz részecskéinek számsűrűsége n!
   - Alkalmazzuk eredményünket a hélium 4-es tömegszámú izotópjára! Az itt szóban forgó hőmérsékleteken a hélium valójában folyékony, sűrűsége kb. 125 kg/m^3 (ebből meghatározhatjuk a számsűrűséget), de a nagyságrendi eredmény így is érdekes[1].

2. Ha egy gáz hőmérséklete annyira nagy, hogy a részecskék átlagos mozgási energiája összemérhető a nyugalmi energiájukkal, akkor már nem érvényes a Maxwell-féle sebességeloszlás, hanem a relativisztikus képleteket kell használni. A statisztikus fizika alapelvei szerint továbbra is igaz, hogy egy állapot valószínűsége $e^{-E/kT}$-vel arányos, ahol E az energia, T a hőmérséklet.
   - Hogyan néz ki ez alapján relativisztikus esetben a részecskék sebessége nagyságának valószínűségeloszlása? A gáz egyforma m tömegű részecskékből áll. (A normálási állandót nem kell kiszámolni!)
   - Hogyan függ a legvalószínűbb sebesség a T hőmérséklettől és a részecskék tömegétől?

3. Nagy energiájú elektronokat szóratunk szabad, nyugvó elektronokon. Tegyük fel, hogy a szóródott elektron ütközés utáni energiáját és kilépési irányát is meg tudjuk mérni! A Compton-szórás elemzésének mintájára adjunk meg ezen két mennyiség között összefüggést!

4. Bizonyítsuk be (a relativisztikus energia és impulzus kifejezéseit használva), hogy egy szabadon mozgó elektron nem tud egy fotont kibocsátani, azaz nem létezik olyan kezdő– és

[1] A héliumra ez a fajta „elfajulás” kb. egybeesik a szuperfolyékonnyá válás jelenségével. A tényleges hőmérsékletérték kicsit más.

végállapot, ahol a kezdőállapotban egy szabad elektron van, a végállapotban pedig egy szabad elektron és egy foton, és az energia és az impulzus is megmaradt!

5. Mozogjon egy m tömegű részecske az x tengely mentén egy egydimenziós potenciálgödörben, ahol a helyzeti energia $V(x)$. Határozzuk meg a következő esetekben, hogy a Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján mik a lehetséges energiaszintek!

   - Legyen először $V(x) = a \cdot x^5$, ha $x > 0$, és $V(x) = \infty$, ha $x < 0$, ahol a J/m^5 dimenziójú konstans, a ∞ pedig azt jelenti, hogy a részecske a határról visszapattan.
   - Legyen most $V(x) = ax^4$, ahol a (dimenziós) konstans!
   - Legyen végül $V(x) = ax^{2m}$, ahol m pozitív egész szám, a pedig ismét (dimenziós) konstans!

   (Segítség: gondoljunk az energiamegmaradásra!)

6. Vizsgáljuk a müonikus hidrogénatomot, azaz amikor a proton körül egy $m_\mu = 1,87 \cdot 10^{-28}$ kg tömegű müon „kering”. Alkalmazzuk erre a képződményre a Bohr-féle hidrogénatom-modellt!

   - Vegyük figyelembe, hogy a müon tömege nem elhanyagolható a protonéhoz képest, azaz a keringés a közös tömegközéppont körül történik. A müon mozgására alkalmazva a megbeszélt feltételt, mik a müon lehetséges energiaszintjei?
   - Hogy viszonyulnak ezek a „rendes” hidrogénatom energiaszintjeihez?
   - Egyúttal látható az is ebből a feladatból, hogy mennyire inkonzisztens a Bohr-modell már erre az esetre is. Itt ugye a proton is kering a tömegközéppont körül; az előbb feltettük, hogy azok a mozgások valósulhatnak meg, amikor a müonra igaz, hogy a hullámhossza egész számúszor fér rá a körpályájára. Kiderül, hogy ezekben az esetekben a protonra egyáltalán nem lesz igaz ugyanez a feltétel. Lássuk ezt be!

7. Vizsgáljuk a hidrogénatomot a Bohr-modellben még egy kicsit! Ne hanyagoljuk most el a proton tömegét!

   - Ha a mag (proton) tömegét is figyelembe vesszük, mik lesznek az elektron energiaszintjei?
   - Mekkora lesz az $n = 2$ és az $n = 3$ állapot közötti átmenetnek megfelelő foton hullámhossza?
   - Ha most a mag nem egy proton, hanem egy deuteron (proton + neutron), azaz nehézhidrogénről van szó, akkor mekkora lesz az előbb kiszámolt hullámhossz[2]?

8. Egy 1 MeV energiájú foton szóródik egy álló elektronon.

   - Ha a foton a szórás után teljesen visszaverődik, mekkora lesz a visszaszóródott foton frekvenciája, hullámhossza? Mekkora lesz az elektron kinetikus energiája? Mekkora lesz az elektron hullámhossza?
   - Ugyanezeket számoljuk ki, ha a foton az eredeti irányával 60°-os szöget bezáró irányban halad tovább.

[2] Így fedezték fel a deutériumot (Urey, 1931); észrevették, hogy vannak kicsit eltolt hullámhosszú átmeneti vonalak is a spektrumban.

Megjegyzés: a ZH-n nem lehet füzetet használni, úgyhogy ne csak agyatlanul behelyettesítsünk a füzetből kinézett képletekbe!

9. Tudjuk, hogyan csökken egy nyaláb intenzitása az anyagban megtett x távolság függvényében, ha a szórócentrumok (szám)sűrűsége állandó n_0, és a mikroszkopikus teljes hatáskeresztmetszet σ. Tegyük fel most, hogy a közeg sűrűsége nem állandó!
   - Legyen akármilyen $n(x)$ függvény a sűrűség az x koordináta függvényében! Hogyan csökken ekkor a bebocsátott nyaláb intenzitása?
   - Egy konkrét példa legyen: $n(x) = n_0 e^{-x/L}$. Legyen $L = 2$ cm, $\sigma = 4$ barn, $n_0 = 10^{29}/\mathrm{m}^3$. A $d = 5cm$ vastag mintán a nyaláb mekkora része halad át?

10. Hány MeV energiájú α-részecske tudja az álló, szabad (de nem rögzített) ólomatommagot ($A = 206$, $Z = 82$) annyira megközelíteni, hogy „megérintse”? (Az atommagok sugara kb. $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$ fm, ahol A a tömegszám.)

11. Becsüljük meg a fúzió hőmérsékletét! Mekkora energiájú proton tud egy álló (de nem rögzített) másik protont annyira megközelíteni, hogy a vonzó magerők már hatni tudjanak, és „összetapadjon” a két atommag? Ez akkor történik meg, amikor a magok kb. „megérintik” egymást. Mekkora hőmérséklet felel meg ennek az energiának? Mi a helyzet, ha deutérium-deutérium, vagy deutérium-trícium ütközést vizsgálunk ugyanígy? Az atommagok sugara kb. $R = \sqrt[3]{A} \cdot 1,2$ fm, ahol A a tömegszám. (Megjegyzés: az eredmény teljesen érdektelen; a valóságban a fúzió sokkal kisebb hőmérsékleteken is működik, a majd később tanulandó *alagúteffektus* miatt.)

12. Lassú (termikus) neutronok a ^{238}U atommagban elnyelődnek (a folyamat hatáskeresztmetszete $\sigma = 2,68$ barn), a ^{235}U magban pedig vagy elnyelődnek (ennek hatáskeresztmetszete $\sigma = 98,8$ barn), vagy elhasítják; ennek hatáskeresztmetszete $\sigma_f = 582,6$ barn, és a hasadásból átlagosan 2,47 új neutron keletkezik. Egy valódi atomreaktorban a keletkezett neutronok egy α-nyi hányada ($0 < \alpha < 1$) elnyelődik másképp, mielőtt újra reakcióba léphetne az uránnal. Mennyi lehet maximálisan α, hogy a természetes fém-uránban, melynek 0,72%-át teszi ki a hasadó ^{235}U izotóp, létrejöhessen a hasadási láncreakció, azaz minden hasadásból legalább 1 neutron újabb maghasadást okozzon?

13. A Compton-szórást vizsgáljuk kísérletileg: fotonokat szóratunk elektronokon. A hatáskeresztmetszet a következő alakú:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \sigma_0 \times \left[A^3 - A^2 \sin^2\vartheta + A\right], \quad \text{ahol} \quad A = \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)\right)^{-1}, \quad \sigma_0 = 0,0794 \text{ barn}.$$

   Ez az ún. Klein-Nishina-formula[3].

   - Mekkora a teljes hatáskeresztmetszet? Hogyan függ ez a beeső foton energiájától?
   - Vizsgáljunk $E_\gamma = 0,8$ MeV energiájú fotonokat! Mekkora ezek átlagos szabad úthossza a levegőben, ha feltesszük, hogy egyedül Compton-szórással hatnak kölcsön bármivel

[3] Az A tényező került elő a foton energiaváltozásának számolásánál is, ha emlékszünk.

is[4]? (A levegő sűrűsége $\rho = 1,3$ kg/m^3. A szórás az elektronokon történik, amiket mind szabadnak vehetünk ekkora fotonenergia mellett. A levegőben főleg oxigén (^{16}O) és nitrogén (^{14}N) van, azaz amikor az elektronok sűrűségét számoljuk, úgy vehetjük, hogy 1 neutronra és 1 protonra jut egy elektron.)

- Legyen most a fotonenergia $E_\gamma = 1$ MeV. Mérési elrendezésünkben másodpercenként 10^6 darab foton érkezik egy $d = 1$ cm vastag jégdarabra (sűrűsége $0,9$ g/cm^3; minden benne lévő elektron szabadnak tekinthető). A 100% hatásfokú, $A = 1\text{cm}^2$ felületű detektorunkat $D = 3$ m-re lerakva a szórási helytől hány foton beütését észleljük másodpercenként $\vartheta = 30°$-nál, $\vartheta = 45°$-nál, $\vartheta = 90°$-nál, $\vartheta = 180°$-nál?

14. Neutronokat szóratunk atommagokon, a hatáskeresztmetszet $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \alpha + \beta\cos\vartheta + \gamma\cos^2\vartheta$ alakú.

- Mekkora a teljes szórási hatáskeresztmetszet?
- Mekkora a szabad úthossz, ha $a = 0,1$ barn, $b = 0,01$ barn, $c = 0,005$ barn, és a mintánkban az atommagok (=szórócentrumok) sűrűsége $n = 5 \cdot 10^{28}$ /m^3?
- Ha ebből a mintából egy $d = 2$ cm vastag céltárgyat készítünk, mekkora része fog szóródni a beeső neutronoknak?
- Tudva, hogy milyen a szórás irányeloszlása, az eddigiek alapján mennyi neutron fog érkezni az $L = 1$ m-re lévő, $A = 50$ cm^2 felületű detektorunkba $\vartheta = 15°$, $\vartheta = 30°$, $\vartheta = 45°$, $\vartheta = 90°$, $\vartheta = 135°$ szórási szögek esetén? (Olyan alakú mintát készítettünk, hogy a „másodszori szórást” elhanyagolhassuk.)

Nagy Márton

[4]Ez nem teljesen igaz.